4. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 26. 10. 2020

Věta (Binomická). Pro každé $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Příklad 1.
Dokažte binomickou větu matematickou indukcí.

Příklad 2.
Dokažte kombinatorickou úvahou i výpočtem:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Příklad 3.
Sečtěte:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

Příklad 4.
Kolika způsoby umíme vybrat množiny $A, B \subseteq [n]$ takové, že:

a) $A \subseteq B$

b) $A = \{x\}$ a $x \in B$

c) $A \cup B = [n]$

d) $|A \cap B| = 0$

e) $|A \cap B| = 1$

f) $|A \setminus B| = 1$

Příklad 5.
Kolik existuje možností, jak rozmístit n nerozlišitelných kuliček do p rozlišitelných přihrádek? Co když jsou kuličky rozlišitelné? A co když v každé přihrádce musí být alespoň jedna kulička?

Příklad 6.
Mějme n bílých kuliček v řadě. Kolika způsoby můžeme přebarvit k z nich na černo tak, aby nebyly vedle sebe dvě černé?

Příklad 7.
Kolika způsoby lze rozestavit bílého a černého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali?