Topologické metody v kombinatorice a geometrii

Michal Vaner

2. ledna 2013

1 Úvod

Topologie je spojitá věda, dokáže řešit i diskrétní otázky.

Např. mějme N-prvkovou množinu $1, 2, \ldots, N$ a všechny k-prvkové podmnožiny $\binom{[m]}{k}$ máme obarvit tak, aby každé disjunktní množiny měly různé barvy.
Doměnka: $m \geq n - 2k + 2$. (pokud $n \geq 2k$). Dokázáno pomocí topologie.

Postaveno na algebraické topologii.

Topologie se dělí na obecnou/množinovou a algebraickou topologii.

1.1 Literatura

- Matoušek: Using the Boesvik-Ulam theorem
- Munkers: Elements of alg. topology
- Hatcher: Algebrak topology (elektronická verze)
- Vassilev: Introduction to topology (zjednodušená)
- Günter M. Ziegberg: Topologie (elektronické, německy)

1.2 Cvičení

Martin Tancer, poprvé 11.10., 8 hodin ráno.

2 Topologie

„Geometrie gumové blány". Povolují se spojité bijekce jako ekvivalence objektů.

Topologický prostor je uspořádaná dvojice (X, o), X je nějaká množina, většinou nekonečná, o je systém otevřených podmnožin X splňující tyto axiomy:

- $\emptyset, X$ jsou otevřené
- o je uzavřené na sjednocení množin

- o je uzavřená na konečné průniky

Například $X = \mathbb{R}^d$, obvyklá otevřená okolí pomocí obsahu okolí každého bodu. Obdobná definice tvoří topologii pro každý metrický prostor.

Samozřejmě existují i jiné topologie, ne všechny lze získat z nějaké metriky. Např. topologie spočetných doplňků—množina otevřená, když je její doplněk spočetný.

Topologický podprostor je $(Y \subset X, \{U \cap Y : U \in o\})$.

Součin topologických podprostorů $\prod (X_i, o_i)\,; X = \prod X_i$. Otevřené množiny vezmu součin otevřených množin a uzavřu na sjednocení a spočetné průniky.

2.1 Konvence

Obvykle budeme psát jen topologický prostor X, kde X je ona nosná množina.

Předpokládejme, že všechny topologické prostory jsou hausdorffovské, tedy

$$\forall x, y \in X; x \neq y \Rightarrow \exists U, V \text{ otevřené }; x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

2.2 Spojité zobrazení

Zobrazení $f : X \to Y$ je ***spojité***, pokud vzor otevřené množiny je otevřená množina.

V metrických prostorech je to ekvivalentní s $\epsilon - \delta$ definicí.

Většina probíraných zobrazení bude spojitých.

X, Y jsou ***stejné***, pokud mezi nimi existuje homeomorfizmus. ***Homeomorfizmus*** je bijekce spojitá oběma směry.

Uzavřená množina je taková, jejíž doplněk je otevřený.

Uzávěr množiny Y je průnik všech uzavřených množin obsahujících Y.

Hranice je průnik uzávěru a uzávěru doplňku.

2.3 Kompaktnost

Topologický prostor X je ***kompaktní***, $\Leftrightarrow \forall U$ otevřené pokrytí $X \exists U_0 \subset U$ konečné. Otevřené pokrytí je množina otevřených množin taková, že jejich sjednocení dá právě X.

Lze zobecnit pro množiny.

Vlastnosti kompaktnosti:

- X je kompaktní, $F \subset X$ uzavřená, $\Rightarrow F$ je kompaktní.
- $\forall$ kompaktní podmnožina hausdorffovského topol. prostoru je uzavřená.
- $f : X \to Y$ spojité, X kompaktní $\Rightarrow f(X)$ kompaktní.

- Spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ na kompaktním prostoru nabývá maxima a minima.
- $A \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní $\Leftrightarrow$ omezená a uzavřená.

Důkaz:

- **Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní.** Mějme kompaktní prostor X a $Y \subset X$ uzavřený. Každé dělení Y je jen podsystém toho X—když přidáme doplněk Y, dostaneme celé pokrytí X a z něho to jde vybrat. Doplnit to lze díky uzavřenosti
- **Kompaktní množina hausdorfovského topologického prostoru je uzavřená.** Vezmeme z z doplňku Y. $\forall x \in Y$ z hausdorfovosti plyne, že $\exists U_x$, že jsou s tím z jsou v oddělených vícebodových množinách. Tímto lze vytvořit pokrytí toho $Y, \exists$ konečné podpokrytí, pro každou existje nějaké okolí z otevřené. Průnikem tohoto dostáváme otevřenou množinu (z mohlo být libovolně blízko).
- **Obraz kompaktního prostoru při spojitém zobrazení je kompaktní.** Máme V otevřené pokrytí $f(X)$. $f^{-1}(V)$ také pokrytí, tentokrát na X, které je kompaktní, vezmeme konečné podpokrytí. Obrazem toho je konečné podpokrytí je opět konečné pokrytí, proto je obraz konečný.
- **Spojitá funkce $X \to \mathbb{R}$ na komptní neprázdné množině X nabývá minima.** $\exists x_0 \in X, \forall x \in X; f(x_0) \leq f(x)$. $Y := f(x)$, dle předchozího bodu je kompaktní, podle 2 je uzavřená, je také omezená (protože by nebyla kompaktní, lze vzít intervaly od délky $2, 4, \ldots$ okolo nuly, nelze najít konečný podsystém). $\exists y \in Y, y = \inf Y, Y$ je uzavřený, proto ho obsahuje a je omezený, proto je konečný.
- $Y \in \mathbb{R}^d$ **je kompaktní $\Leftrightarrow$ uzavřená a omezená.** $\Rightarrow$ je obdobné jako v minulém bodě. $\Leftarrow$ stačí si všimnout, že každá uzavřená krychle je kompaktní. Uzavřený interval je kompaktní, nechť pro spor předpokládejme, že nejde. Vezměme začátek, který pokrýt jde (tedy, sup toho, co pokrýt jde), dokáže se, že to není sup. Rozšíření na kryche viz tychonovova věta.

Tichonovova věta:
Součin libovolně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní. Bez důkazu.

2.4 Souvislý prostor

Mezi $\forall$ body $\exists$ cesta.

Nejde rozdělit na dva různé kusy.

Topologický prostor je ***nesouvislý***, pokud $X = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$ otevřené množiny, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$.

Topologický prostor X je ***obloukově souvislý***, pokud $\forall a, b \in X \exists f : \langle 0, 1\rangle \to X$ spojité, $f(0) = a, f(1) = b$.

Topologický prostor nedefinuje pojem ***dimenze***, existuje mnoho definic, které se mohou lišit. Základní předpoklad je, že je to invariant.

3 Homotopická ekvivalence a homotopie

X je topologický prostor, Y je podprostor. ***Deformační retrakce*** X na Y je systém spojitých zobrazení, $f : (\langle 0, 1\rangle, X) \to X$, takové že:

- $f(0, ?)$ je identita.
- $f(?, y)$ je identita pro libovolné $y \in Y$.
- Je spojité pro ten argument $\langle 0, 1\rangle$.
- $f(1, ?) \in Y$.

Pokud existuje deformační retrakce z X do Y, pak Y je ***deformační retrakt***. X a Y jsou pak ***homotopicky ekvivalentní***.

X je homotopicky ekvivalentní s Y, pokud existuje nějaké Z, který je obsahuje oba obsahuje jako deformační retrakty.

$f, g : X \to Y$ spojitá, f a g jsou homotopická ($f\ g$), pokud $\exists \{h_t\}, t \in \langle 0, 1\rangle$ takové, že

- $h_0 = f$
- $h_1 = g$
- $h_? : X \to Y$ je spojité.
- Je to spojité podle t.

X, Y jsou ***homotopicky ekvivalentní***, pokud existují:

- $$f : X \to Y$$
- $$f : Y \to X$$
- $$g \cdot f$$

  je homotopické s identitou.

Zobrazení $f : X \to Y$ je ***nulhomotopické***, pokud je homotopické konstantnímu zobrazení (posílá celé X do jednoho bodu).

Prostor je ***kontrahovatelný***, pokud je homotopicky ekvivalentní bodu.

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$$
$$S^{n-1} = \partial B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \, |x| = 1\}$$

4 Simpliciální komplexy

Máme body $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ jsou ***afinně nezávislé***, když vektory $(v_1, 1), (v_2, 1), \ldots, (v_n, 1)$ jsou lineárně nezávislé. (přilepíme ke každému jedničku)

Simplex je komplexní obal bodů $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$, které jsou afinně nezávislé. Poté říkáme, že má tento simplex dimenzi n - je to objekt v n-dimenzionálním prostoru a má $n+1$ vrcholů.

$\sigma := conv(V)$ je simplex. Vezměme $\sigma_w := conv(W), W \subset V$ tvoří stěnu (je to taky simplex).

(Geometrický) simpliciální komplex Δ je množina simplexů v $\mathbb{R}^n$, která splňuje následující axiomy:

- $$\emptyset \in \Delta$$
- $$\sigma \in \Delta, \tau \text{ stěna } \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$$
  Je dědičný.
- $$\sigma_1, \delta_2 \in \Delta \sigma_1 \cap \sigma_2 \text{ je stěna } \sigma_1 \text{ i } \sigma_2$$

Smějí být slepeny jen stěnou.

σ je simplex. Množina všech jeho stěn tvoří simpliciální komplex. Třeba ověřit třetí axiom, ostatní jsou zřejmé.

Mám simpliciální komplex Δ a $\Delta' \subset \Delta$ dědičné, pak nazýváme Δ' ***podkomplex*** (a je také koplexem).

k-skelet $\Delta := \{\sigma \in \Delta; \dim \sigma \leq k\}$. 1-skelet je graf.

$$\dim(\Delta) := \max(\dim \sigma; \sigma \in \Delta)$$

$$|\Delta| \ \textbf{\textit{polyedr}} \ := \text{ topologický prostor } \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma$$

$$U \subset |\Delta| \text{ otevřená } \Leftrightarrow U = \cap \sigma \text{ otevřená } \forall \sigma \in \Delta \text{ na } \sigma \text{ bereme topologii podprostoru } \mathbb{R}^n$$

.

Menší problémy při nekonečném množství simplexů, jinak ale dodržuje topologii podprostoru $\mathbb{R}^n$.

Poznámka:
Od teď budeme brát všechny simpliciální komplexy konečné. Δ je konečný, $|\Delta|$ je kompaktní.

Ne všechny prostory lze reprezentovat jako simpliciální komplexy.

Mějme X topologický prostor a Δ je simpliciální komplex. Δ se nazývá ***triangulace*** pokud je jeho polyedr homeomorfní s X. ($|\Delta| \cong X$)

Abstraktní simpliciální komplex je dvojice (V, K). V je množina, $K \subset 2^V$ je dědičný systém podmnožin V ($F \in K, G \subset F \Rightarrow G \in K$).

$F \in K$ simplex nebo stěna. $\dim(K) := max\,\{|F| - 1 : F \in K\}$.

Z geometrického lze udělat abstraktní:

- $$V := v\,(\Delta)$$
- $$K := \{v\,(\sigma)\,, \sigma \in \Delta\}$$

Nechť K je abstraktní simpliciální komplex a Δ je jeho geometrická realizace. Potom $|\Delta|$ je také ***polyedr*** K.

K je konečný simpliciální komplex. Pak má (alespoň jednu) geometrickou realizaci. K realizujeme jako podkomplex simplexu s touto množinou vrcholů. (očísluju vrcholy a spojuju)

K, L jsou abstraktní simpliciální komplexy. ***Simpliciální zobrazení*** z K do L je zobrazení $f : V(K) \to V(L)$, které zobrazuje simplexy na simplexy ($\forall F \in K; f(F) \in L$, můžou se stěny „splácnout“ - ubýt jim vrcholy) Simpliciální zobrazení je vlastně kombinatorický protějšek spojitého zobrazení.

Mám Δ_1, Δ_2 geometrické simpliciální komplexy, $K_1, K2$ jsou příslušné abstraktní simpliciální komplexy a $f : V(K_1) \to V(K_2)$. Potom mohu definovat $|f| : \Delta_1 \to \Delta_2$ spojité zobrazení polyedrů.

Pokud je f bijekce, pak se nazývá ***homeomorfizmus***.

Tvrzení:
$|f|$ je dobře definované, spojité. Když je f prosté nebo isomorfizmus, pak $|f|$ je také prosté nebo homeomorfizmus.

Isomorfizmus znamená, že to je stejné až na přejmenování vrcholů.

Z toho plyne, že geometrická reprezentace abstraktního simplexu je jednoznačná až na isomorfizmus.

4.1 Dimenze geometrických realizací

$\forall$ konečný d-dimenzionální komplex se jeho realizace vejde do $\mathbb{R}^{2d+1}$. Když umístím vrcholy, tak už je to určené jednoznačně. Potenciální geometrická realizace: když mám simplex, tak mu přiřadím konvexní obal zobrazených bodů.

Když to takle umístím, tak to jsou opravdu simplexy. Nyní je třeba ověřit, že je to opravdu stěna, když se to protne.

$\forall$ n bodů lze vnořit do R^{2d+1} tak, že každých $2d+2$ z nich je afinně nezávislých. Lze je umístit pomocí momentové křivky (viz geometrie). Množina $(t, t^2, t^3, \ldots, t^{2d+1}) \in \mathbb{R}^{2d+1}$ Každých $2d+2$ bodů je afinně nezávislý, dokazuje se v geometrii.

4.2 První barycentrické podrozdělení simplexiálního komplexu

Vrcholy se umístí do těžišť stran a spojí se vždy strana s vrcholem (rozdělení pomocí těžnic u trojúhelníku).

4.2.1 První konstrukce

Mám uspořádanou množinu $P = (V, <)$, simpliciální komplex: lineárně uspořádané množiny $\Delta(P)$.

4.2.2 Druhá konstrukce

K simplexiální komplex, udělám z toho uspořádanou množinu stěn $P(K) := (K - \{\emptyset\}, \subset)$.

Pokud udělám $\Delta(P(K))$ vyjde jako první barycentrické podrozdělení.

Tedy, vezmu si množinu vrcholů a udělám si nákres všech simplexů a podsimplexů jako uspořádání na množině. Pak zakreslím všechny body, včetně těch složených (tedy, ne jen $1, 2, 3 \ldots$, ale i $1-2, 2-3, 1-3, \ldots$) a do jednoho simplexu přijdou všechny, které leží na nějaké cestě shora dolů.

4.3 Jednoduchá homotopická ekvivalence

Mám K simpliciální komplex a F je nějaká stěna. Pokud existuje jediný simplex G, který obsahuje, ale není F a G je maximální v K (tedy, neexistuje nic, co by obsahovalo G). Výsledek ***elementárního kolapsu*** je K bez G a bez F. Výsledek je homotopicky ekvivalentní původnímu K.

Když K' vznikne z K elementárním kolapsem, tak K vznikne z K' ***elementárním antikolapsem***.

Potom K je ***jednoduše homotopicky ekvivalentní*** s L, pokud lze L z K získat posloupností elementárních kolapsů a elementárních antikolapsů.

K je kolabovatelné, pokud lze K pomocí elementárních kolapsů získat jediný bod. Pokud je něco kolabovatelné, pak je to i kontrahovatelné. Opačně to neplatí.

4.4 Borsukova-Ulamova věta

Má několik znění:

- $\forall$ spojitá zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n \exists x \in S^n ; f(x) = f(-x)$.
- Pro každé antipodání spojité $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ $(f(-x) = -f(x))$ $\exists x \in S^n :$ $f(x) = 0$.
- Neexistuje antipodání spojité, $f : S^n \to S^{n-1}$.
- Neexistuje spojité $f : B^n \to S^{n-1}$ antipodání z koule na její hranici.
- Pro každé pokrytí uzavřenými množinami $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1} \exists i \exists x ; x \in F_i, -x \in F_i$.
- Totéž pro pokrytí otevřenými množinami.

Brouwerova věta o pevném bodě:
Mějme kouli B^n a funkci $f : B^n \to B^n$ spojité. Potom $\exists x ; f(x) = x$.

Důkaz:
Kdyby $f : B^n \to B^n$ nemělo pevný bod, pak definujeme zobrazení $g : B^n \to S^{n-1}$. Vezměme přímku z $f(x)$ do x. Toto je spojité zobrazení té koule na její hranici (neexistuje pevný bod, proto je to dobře definované). Toto zobrazení ale protiřečí minulé větě.

Tuckerovo lemma:
T je simpliciální komplex, který je triangulací B^n. Triangulace antipodání je symetrická na hranici.

Přiřaďme zobrazení $\lambda : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, +n, -n\}$ takové, že je antipodání na hranici. Pak existuje komplementární hrana (tedy označená jako $a, -a$).

Lze z toho dokázat Borsukovo-Olamovu větu. (Plyne to i opačně)

Nechť $\exists f : B^n \to S^{n-1}$ spojité antipodání na hranici. Vytvořím triangulaci T, které je antipodání na hranici, které má simplexy menší než nějaké δ. Definujme zobrazení $k(v) := \min \left\{ i ; |f(v)_i| \geq \frac{1}{\sqrt{m}} \right\}$. $\lambda(v) := \pm k(v)$ podle toho, jaká je první nenulová souřadnice toho zobrazení. (Tedy, vezmu si index první dostatečně nenulové souřadnice a dle její hodnoty vyberu znaménko toho indexu). Toto splňuje předpoklady Tuckerova lemmatu.

Protilehlé souřadnice se musí lišit v i-té souřadnici alespoň o $\frac{2}{\sqrt{m}}$. Když ale zvolím δ dostatečně malé, tak to nepůjde splnit.

Tuckerovo lemma lze říci i jinak:
T je triangulace B^n, která je antipodání symetrická na hranici. $\Diamond$ je simpliciální komplex. $v(\Diamond^{n-1}) = \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ $F \subseteq v(\Diamond^{n-1})$ je simpliciální komplex $\Leftrightarrow \nexists i ; i - i \subset F$. Neexistuje simpliciální zobrazení z T do $\Diamond^{n-1}$ antipodání na hranici.

4.4.1 Řetězce

k-řetězcem (C_k) nazýváme množinu k-dimenzionálních simplexů se „značkami" 0 a 1. Bereme to jako algebraický vektor nad $\mathbb{Z}_2$ a sčítání funguje jako sčítání (mod 2).

Mějme $f : K \to L$ simpliciální zobrazení. $\forall k = 0, 1, \ldots$ dostaneme zobrazení $f_{\sharp k} : C_k \to D_k$ – buď k-řetězec stávající z obrazu, pokud má stejné dimenze, nebo 0, pokud má menší dimenzi.

Lemma:
K, L jsou dvě triangulace sféry, $f : K \to L$ simpliciální zobrazení. A_{n-1} je k-řetězec udělaný ze všech simplexů K. Jeho obraz jsou buď všechny $(n-1)$-simplexy L a nebo 0.

Lemma:
K, L jsou antipodálně simetrické triangulace S^{n-1}, K respektuje strukturu $H_k^{\pm}$.

$$H_k^+ := \left\{x \in S^{n-1}; x_{k+1} \geq 0, x_{k+2} = x_{k+3} = \ldots = x_n = 0\right\}$$

S H_k^- obdobně, jen je tam $\leq$. $f : K \to L$ antipodální simpliciální zobrazení. Stupeň f je potom sudý.

4.5 Aplikace Borsukovy& Ulamovy věty

Přímá věta o sendwiči:

Mějme $A_1, \ldots, A_d$ kompaktní množiny v $\mathbb{R}^d$. Pak existuje nadrovina dimenze $d-1$ taková, že všechny ty množiny rozpůlí.

Důkaz:
Uděláme přiřazení μ :nadrovina$\to$ $(\mu_1(h^+), \ldots, \mu_d(h^+))$ – tedy do vektoru velikostí jedněch dílů množin.

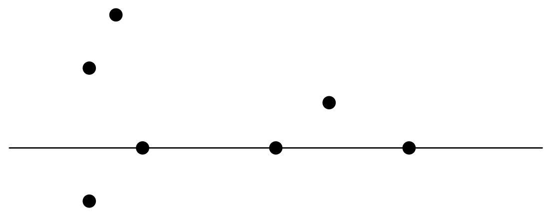
Diskrétní věta o sendwiči:
Pro $A_1, \ldots, A_d$ konečné bodové množiny, pak to platí také.

Rozdělení A na polovinu je takové rozdělení, že v každé otevřené polonadrovině je $\leq |A|$.

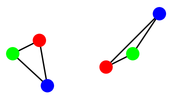
Dělení množin:
Akyana, Alon $A_1, \ldots, A_d$ jsou konečné bodové množiny v R^d, každá má n bodů, v obecné podobě. $A_1, \ldots, A_d$ lze rozložit na duhové d-tice (když každá množina má svoji barvu), jejichž konvexní obaly jsou disjunktní.

Důkaz:
Když $n = 1$, tak je to jasné, když víc, tak použiji větu o sendwiči.

O náhrdelníku:



Obrázek 1: Ukázka rozpůlení množiny



Obrázek 2: Ukázka duhového rozdělení

Mějme posloupnost prvků z d množin, z každé sudý počet. Když chceme rozdělit posloupnost na 2 skupinky podřetězců tak, aby každá skupina měla stejný počet z každé množiny.

Stačí k tomu d řezů posloupnosti.

Důkaz:
Položíme na momentovou křivku v $\mathbb{R}^d$ a to podle věty o sandwichi lze přeříznout.

Kneserovy grafy:
Mějme $\binom{[m]}{k}$ (tedy všechny k-prvkové podmnožiny množiny $1, 2, \ldots, m$, chceme rozdělit na části aby žádné neobsahovaly žádné disjunktní množiny.

Stačí $n - 2k + 2$, nejlepší možné řešení.

Lemma (Galeovo):
$\forall d, k \exists X \subset S^d, |X| = d + 2k$, každá otevřená polokoule obsahuje alespoň k bodů z nich.

$\overline{g} := \left\{\left(1, t, t^2, \ldots, t^d\right); t \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ momentová křivka. Tyto body lze promítnout na kouli. Vybereme body $w_1, w_2, \ldots, w_{d+2k} \in \overline{g}$ a body $v_i := (-1)^i w_i, X = \{v_i\}$.

Pro každou nadrovinu h procházející 0, pak otevřený poloprostor $H^{\oplus}$ obsahuje alespoň k bodů. Počet lichých v $h^{\ominus}$ a sudých v $h^{\oplus}$ musí být alespoň k.

4.5.1 Schrijverovy grafy

Vrcholově kritický podgraf Knasserova grafu – když se mu libovolný vrchol sebere, tak se sníží barevnost.

Vezmu pouze stabilní k-tice. Vezmeme vrcholy na kružnici, vezmeme je tak, aby byly nezávislé.

Barevnost je stejná jako Knasserova grafu $\binom{[n]}{k}$, navíc je vrcholově kritický.

Lemma (Zesílené Galeovo):
$\forall d, k \exists X \subset S^d, |x| = d + 2k$, každá otevřená polokoule obsahuje stabilní k-tici.

5 Z_2 prostory

Z_2 ***prostor*** je uspořádaná dvojice (X, ν), X je topologický prostor, $\nu : X \to X$ homeomorfizmus, $\nu \circ \nu = id_x$.

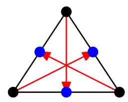
Základní příklad je sféra se zobrazením $\nu(x) = -x$.

Z_2 je ***volný*** Z_2 prostor, pokud $\forall x; \nu(x) \neq x$.

Z_2-zobrazení je zobrazení mezi dvěma Z_2 prostory. Tedy máme (X, ν), (Y, ω), $f : X \to Y$ spojité a $f \circ \nu = \omega \circ f$.

5.0.2 Simpliciální Z_2 komplex

Např. tak, že udělá baricentrické dělení, zobrazí vrchol vždy na doplněk (ten na protější stěně).



Obrázek 3: Jak to vypadá pro trojúhelník

5.1 Homeomorfizmus grafů

Je možné dokázat, že mezi grafy není homeomorfizmus, pokud pro každý z grafů sestrojíme simpliciální komplex tak, že vytvoříme 2 kopie jeho vrcholů a simplexy vzniknou tak, že spojíme $A \uplus B$, právě když tvoří úplný bipartitní graf v G a vše z A i z B má nějakého společného souseda.

Zobrazení ν bude takové, že se vždy vrchol vymění se svojí kopií. Dokonce je volné, protože všechny simplexy se zobrazí na simplexy s jinými vrcholy.

Pak stačí dokázat, že mezi těmi komplexy neexistuje Z_2 zobrazení. Naopak, pokud existuje, pak se z něj dá zkonstruovat homeomorfizmus původního grafu.

5.2 Indexy

index Z_2 zobrazení je rozměr nejmenší sféry, do které existuje Z_2 zobrazení.

coindex je nejmenší sféra, ze které existuje Z_2 zobrazení.

Obvykle index a coindex bývají stejné, ale být to nemusí.

5.2.1 Jednoduché vlastnosti

- Index sféry je totéž co její coindex.
- Jestli $idx(X) > idx(Y)$, tak $X \overset{Z_2}{\not\to} Y$.
- $\forall x; coidx(X) \leq idx(X)$.
- K je volný simpliciální Z_2-komplex. Pak jeho komplex je nejvýše jeho dimenze.
- X k-souvislý $\Rightarrow coidx(X) \geq k + 1$

5.2.2 k-souvislost

X je topologický prostor, $k \geq -1$.

X je k-souvislý, pokud $\forall l = -1, 0, 1, \ldots, k$ platí, že $\forall$spojité $f : S^l \to X$ lze rozšířit na $\overline{f} : B^{l+1} \to X$. „$X$ nemá l-dimenzionální díru".

-1-souvislý znamená neprázdný. 0-souvislý je neprázdný a obloukově souvislý. 1-souvislý je neprázdný, obloukově neprázdný a každá uzavřená křivka se dá smrštit do bodu.

5.2.3 Aplikace na grafy

Věta:
Chromatické číslo každého grafu je alespoň $idx_{z_2}(B(G)) + 2$ – viz zobrazení grafu na simplex.

Deleted join:

$$K^{\star 2}_{\triangle} = \left\{ F \overset{+}{\bigcup} G : F, G \in K, F \cap G = \emptyset \right\}$$

Lemma (X, Y jsou simpliciální Z_2-komplexy, pak $ind(X \star Y) \leq ind(X) + ind(Y) + 1$. Dokáže se přes skládání koulí z S^0.):

Věta:

$ind_{z_2}(K^{\star 2}_{\triangle}) \geq d{+}1 \Rightarrow \forall f : |K| \to R^d$ spojité $\exists x, y \in |K|$ s oddělenými nosiči ; $f(x) = f(y)$

5.2.4 Aplikace

Topologická Radonova věta:

$$K := \sigma^n; \forall K \to \mathbb{R}^{n-1} \text{ sloučí body s oddělenými nosiči.}$$

Kombinatorický dolní odhad na $ind(K^{\star 2}_{\triangle})$
Mějme dědičný systém $\subseteq 2^V$.