Vybrané kapitoly z kombinatoriky

2. ledna 2013

Obsah

1 Řídké grafy

Budeme uvažovat grafy s velkým počtem vrcholů (malé jsou sporné, jestli jsou řídké nebo husté), např. spočetně mnoho.

Případně budeme uvažovat posloupnosti grafů, kde počet vrcholů u G_i jde k ∞.

Také třídy grafů.

Řídké jsou například:

- Stromy
- S omezeným stupněm
- Rovinné, vnořitelné
- 2-nafouknutí (každý vrchol dvakrát, místo hrany dám $K_{2,2}$
- Podgraf

Naopak husté:

- Úplné
- 1-podrozdělení hustého.

1.1 Značení

$H \subseteq_i G$ je indukovaný podgraf.

$G[A]$ je podgraf G indukovaný množinou A.

$\delta(G)$ je minimální stupeň, $\overline{d}(G)$ průměrný a $\Delta(G)$ maximální.

1.2 Vybírání

Když mám graf, můžu vybrat bipartitní podgraf, který má alespoň polovinu hran.

Můžu vybrat podgraf, který mám $\delta(H) \geq \frac{\overline{d}(G)}{2}$ (postupným trháním malých vrcholů).

Také lze zařídit, aby $\delta(H) \geq (1-\epsilon) \cdot \frac{\overline{d}(G)}{2}$ a $|V(H)| \geq \epsilon \cdot |V(G)|$. Stejný postup.

Lemma 1 (Pyber) *Lze najít bipartitní podgraf takový, že všechny vrcholy mají stupeň* $\delta = \frac{\overline{d}(G)}{4}$.

Důkaz:
Napřed se najde bipartitní s dostatečným počtem hran. Průměrný stupeň bude alespoň poloviční. Potom najdeme graf s dostatečně velkým minimálním stupněm. Potom můžu zahazovat hrany.

☻

Degenerovanost grafu $\deg(G)$ je minimální číslo takové, že každý podgraf bude mít vrchol stupně nejvýše $\deg(G)$.

Tvrzení 1 *Následující je ekvivalentní:*

1. $\deg(G) \leq k$
2. $\exists v_1, v_2, \ldots, v_n; d_{G-v_1-v_2\ldots-v_{i-1}}(x_i) \leq k$
3. $\forall v_1, v_2, \ldots, v_n; d(x_1)$ *je minimální v* $G - v_1 - v_2 \ldots - v_{i-1} \Rightarrow d(x_i) \leq k.$

Důkaz:
Z 3 plyne 3 triviálně, vždy vezmu ten s minimálním jako další.

Z 2 plyne 1, protože minimální stupeň je dostatečně malý.

Z 1 plyne 3, celkem přímo.

☻

1.3 Problém nejhustšího podgrafu

Chci $H \subseteq G$ takové, že $\overline{d}(G)$ je maximální. Značíme $mad(G)$.

Zespodu je to omezené $\deg(G)$, triviálně.

Opačně, $\deg(G) \cdot 2 \geq mad(G)$, najdeme ten nejhustší podgraf, z něho lze vybrat graf, který má minimální stupeň alespoň polovina, ale to musí být nejvýše $\deg(G)$. Toto je optimální pro stromy.

1.4 Stromovatost

Arboricita $\gamma(G)$ je minimální počet lesů takový, že je jimi možné pokrýt hrany grafu.

Věta 1 (Nash-Williams)

$$\gamma(G) = \max_{|A|>1} \frac{|V([A])|}{|A|-1}$$

Pokud má graf $\deg(G) = k$, potom můžu udělat acyklickou orientaci s $\Delta^i(G) \leq k$. To mi pomůže vyrobit ty stromy.

Taktéž můžeme trhat stoky při stavbě rozebírání, což dokazuje i opačně.

Omezme vstupní stupeň vrcholu funkcí $\varphi(v)$. Pokud $\varphi(v) = c$, potom každý podgraf má omezený stupeň.

Určitě jde najít orientaci, pokud součet φ je alespoň $\frac{|E(G)|}{2}$. *`TODO: Je to pravda? Není to jen špatně napsané?`*.

Věta 2 *Máme řídký graf na n vrcholech. Potom obsahuje indukovanou cestu alespoň délky* $\frac{\log |E(G)|}{\log |V(G)|}$ *`TODO: Tohle je divný. Achjo, chybějí brýle..`*

Důkaz:
Dokazovalo se nějak přes tu orientaci. Jsou tam některé hrany „navíc“, tak to mezi přeskočím.

Seřadím, aby vše vedlo doprava. Poslední má omezený stupeň, tak to rozsekám na kusy „mezi“ konci těch hran. Opakuju. *`TODO: Nemůžou tam být cykly?`*

☻

Máme různé řídké grafy, např.:

- k-degenerované.
- S omezeným stupněm.
- Rovinné.
- S omezenou barevností.

Věta 3 *Pro každé k existuje graf bez $3, 4, 5$ cyklů, jehož barevnost je alespoň k.*

Důkaz:
Začnu s C_7, potom konstruuji indukcí, vezmu nezávislou množinu na dost vrcholech, nějak přes brambory.

☻

2 Chromatic number

$$P(G;k) = \#\{f : V(G) \to 1 \dots k; (uv) \in E(G) \to f(u) \neq f(v)\}$$

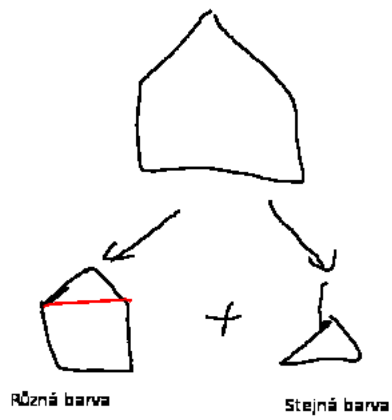
To je počet homomorfizmů z G do K_k.

Také $P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k)$, kde G/e je zkontrahování hrany e. To je jednoduché, pokud mám jen jednoduché hrany. Při násobných třeba rozebrat pár případů, ale taky to jde. Tohle jde občas použít k rozumnému počítání barviček, např. na stromu o n vrcholech. Lze zobecnit i na chordální grafy.

Podobně snadno půjde i cyklík.

Obvykle nám z toho vypadne polynom v k (pro každý graf jiný).

Tohle kontrakční lemma jde i otočit a hrany naopak přidávat a kontrahovat.



Z toho potom vypadnou nějaké úplňáky, ze kterých se to posčítá. Vypadá to, že jdou docela cachovat a znovu používat. Ten barevný polynom $P(G;k) = \Sigma(-1)^i c_i(g) k^{|V|-1} = \Sigma a_i(G) k^i = \Sigma k \cdot (k-1)^i \cdot (-1)^{|V|-i} \cdot t_i(G)$.

$k^i = P(k_i, k)$, to a_i je něco ohledně rozdělení a $t_i(g)$ je počet stromů s tolika vrcholy jako je počet listů mazace-vytvářecího stromu.

`TODO: Tahle hodina nějak nestojí za nic :-(`

G je graf s orientací hran ω. Máme abelovskou grupu A řádu k. Hranám přiřadíme věci z této grupy ($\varphi : E \to A$).

Definujeme funkci $\partial\varphi(v) := \Sigma_{v \to u}\varphi(uv) - \Sigma_{u \to v}\varphi(uv) = \Sigma_{e \in \omega^+(v)}\varphi(e) - \Sigma_{e \in \omega^-(v)}$.

Potom $\varphi : E \to A$ je ***A*-tok**, pokud $\forall v; \partial\varphi(v) = 0$. Dále je ***nenulový***, pokud $\forall e; \varphi(e) \neq 0$.

3 Toky

Bereme takové ty toky, které se točí a jsou nad libovolnou komutativní grupou.

Například můžeme mít $\varphi : E \to (-k+1) \dots (k-1) \subseteq \mathbb{Z}$ a libovolnou orientaci ω grafu G.

Ten graf lze sestavit z trojůhelníčků (často). Může to vypadat např. takto:

[redacted]

Ale často chceme vše nenulová. Pak to jde udělat třeba takto (když dolní trojúhelník otočím):

[redacted]

Na té orientaci nezáleží, stačí negovat ty hodnoty. Když to bylo nenulové předtím, teď je také.

Když si vezmeme dvě množiny, co teče dovnitř musí být totéž, jako co teče ven.

[redacted]

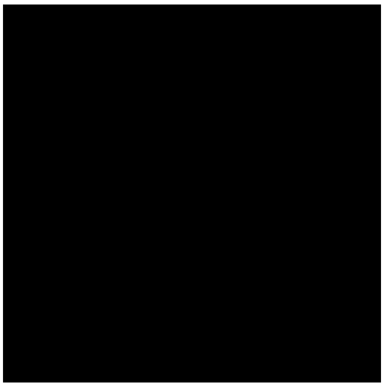
Budeme tomu říkat ***A*-tok**, když to máme nad nějakou komutativní grupou A, ***k*-tok** to bude v případě že je to $(-k+1)\dots(k-1)$. ***Nenulový*** bude pokud všechny hrany jsou různé od nuly.

Pro každou skupinu vrcholů (např. jeden vrchol) platí, že součet dovnitř je stejný jako součet ven.

Pokud tam máme most, tak na něm musí být 0.

Můžeme jinak vzít kostru a postavit cykly tak, že bereme jednotlivé hrany okolo, každá definuje cyklus. Velikost cyklu (asi) závisí na max. stupni té kostry.

Eulerovské grafy mají nenulový $\mathbb{Z}_2$-tok. Mějme bipartitní kubický graf. Potom můžu najít nz tok nad $\mathbb{Z}_3$ tím, že orientuji z jedné partity do druhé – v každém vrcholu bude ± 3.



Když to chceme nad $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Chceme mít hodnoty a, b, c takové, že libovolné dva se sečtou nenulové, ale všechny 3 nulové. Což ale platí u těch 3 nenulových prvků této grupy.

Ale když to není bipartitní (např. peterson), tak to nefunguje.

Máme aditivní komutativní grupu A, $|A| = k$. Označíme si $F_A(G)$ počet nenulových A-toků na G. Zřejmě, pokud je to smyčka, tak je to $k-1$.

Dále, pokud tam je smyčka, tak ji můžeme odebrat a bude to $F_A(G) = (k-1) \cdot F_A(G-e)$. Pokud není, tak $F_A(G) = F_A(g/e) - F_A(g-e)$.

Vypadne z toho tokový polynom.

Podobně s k-toky a $F(G,k)$. Počty nesouhlasí, ale A-tok existuje právě když existuje k-tok. Stěny jdou obarvit právě když jdou obarvit vrcholy. Dokáže se přes duál.

Cyklus v G odděluje vrcholy v G^*. Dívám se na toky v tom původním grafu a to převádím na ty hrany v duálu. To musí vyjít (když odečítám/přičítám tok, podle průchodu hranou), protože budou sousedi různí a až dojdu zpátky, tak se to vynuluje na původní barvu.

Každý tok mi dá z každé počáteční barvy právě jedno unikátní obarvení. Takže:

$$P(G^*; k) = k \cdot F(G; k)$$

4 Tutte

Polynom $T(G)$ je počet koster. Opět máme pravidla na odebrání hrany, kontrakci hrany, smyčku a most.

Tutteův polynom $T(G, x, y)$ je:

- $T(G/e, x, y) + T(G - e, x, y)$
- $T(G, x, y) = x \cdot T(G/e, x, y)$ pokud e je most.
- $T(G, x, y) = y \cdot T(G - e, x, y)$ pokud e je smyčka.
- $T((V, \emptyset), x, y) = 1$

Pokud máme b mostů, l smyček a jinak žádné další hrany, tak to vyjde $x^b y^l$.

Mějme grafový parametr $f(G)$, který funguje takto:

- $f(G) = \alpha \cdot f(G/a) + \beta \cdot f(G - e)$
- $f(G) = x \cdot f(G/e)$ pro most.
- $f(G) = y \cdot f(G - e)$ pro smyčku.
- $f((V, \emptyset)) = \gamma^{|V|}$

Tenhle zápis je univerzálnější, dá se do toho napasovat třeba počet obarvení nebo toků.

A tutte z toho jde udělat jako:

$$\gamma^{c(G)} \cdot \alpha^{r(G)} \cdot \beta^{|E|-r(G)} \cdot T(G, \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta})$$