Matematické struktury

2. ledna 2013

Obsah

1 Úvodní informace

Skripta na `http://kam.mff.cuni.cz/~pultr`. Opakováný obvyklých matematických struktur. Na různé struktury lze pohlížet různě, na $\mathbb{R}$ lze pohlížet jako na axiomaticky zavedenou, vektorový prostor, přímku…

2 Opakování

Kartézský součin množin X a Y je $X \times Y = \{(a, b), a \in X, b \in Y\}$.

n***-ární relace*** $R \subseteq X \times X \times X \ldots \times X$.

Relační systém – má typ $\Delta = (\Delta_t), t \in T$ je soubor relací $\mathbb{R} = (R_t), t \in T$, kde R_t je Δ_t-ární na X.

Homomorfizmus relačních struktur $\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}$, kde $\mathbb{R}$ je typu Δ na X a $\mathbb{S}$ je typu Δ na Y, je zobrazení $f : X \to Y$, takové, že:

$$\forall t \in T; (x_1, \ldots, x_{\Delta_t}) \in R_t \Rightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_{\Delta_t})) \in S_t$$

2.1 Skupiny zobrazení

Vnoření – máme relační systém a zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{S}$. Pokud $\mathbb{R}$ na X, $\mathbb{S}$ na Y, $X \subseteq Y$ a $\forall t \in T; R_t \subseteq S_t$, pak ho nazveme vnoření. Vnoření je prostý homomorfizmus.

Projekce – relační systém $\mathbb{R}$ je na X, $\mathbb{S}$ na $X \times Y$. Projekce je zobrazení $p_i : X^n \to X$, kde $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Jakým způsobem vybudovat na X^n relační systém, aby každá projekce byla homomorfizmus.

$$(u_1, \ldots, u_{\Delta_t}) \in R_t^1 \wedge (u'_1, \ldots, u'_{\Delta_t}) \in R_t^2 \Rightarrow \left((u_1, u'_1), \ldots, (u_{\Delta_t}, u'_{\Delta_t})\right) \in S_t$$

f je zobrazení z X do Y je relací $R \subseteq X \times Y$, kde $\forall x \in X \exists! y \in Y; (x, y) \in R; f(x) = y; f : X \to Y$. Reprezentace trojicí (X, Y, R).

Skládání – mám zobrazení $f : X \to Y, g : Y \to Z$, potom $gf : X \to Z$, $(gf)(x) = g(f(x))$.

Prosté zobrazení – $\forall x, y; x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Zobrazení na – $\forall y \in Y \exists x \in X; f(x) = y$.

Vzájemně jednoznačné zobrazení je takové, které je zároveň prosté a na.

Pozorování 1 *f je bijekce. Poté existuje $f^{-1}Y \to X$ takové, že $f^{-1}f = id_x, ff^{-1} = id_y$. Je to ekvivalence.*

Pozorování 2 *f je prosté, právě když $fg = fh \Rightarrow g = h$.*

Pozorování 3 *f je na, právě když $gf = hf \Rightarrow g = h$.*

3 Částečné uspořádání

$(x, \leq)$

- $x \leq x$
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

Částečné uspořádání nezaručuje porovnatelnost libovolných dvou prvků. Pokud platí, že $\forall x, y; x \leq y \vee y \leq x$, tak se mu říká ***lineární***.

3.1 Supremum, infimum

Mám množinu s částečným uspořádáným $X(\leq)$. ***Horní mez*** podmnožiny $M \subseteq X$ je libovolné $x \in X; \forall m \in M; m \leq x$.

Supremum $\sup M$ je nejmenší horní mez.

Obdobně definuji ***dolní mez*** a ***infimum***.

Řekneme, že prvek $m \in M$ je ***největší***, pokud $\forall x \in M; x \leq m$.

Prvek $m \in M$ je ***maximální***, pokud $\forall x \in M; m \not\leq x$.

Tvrzení 1

$$\begin{aligned} M_i &\subseteq X \\ \sup\{\sup M_i\} &= \sup \bigcup M_i \end{aligned}$$

Kdykoliv má levá strana smysl.

Důkaz:
$s_i = \sup M_i, s = \sup s_i$. s je horní mez $\bigcup M_i$.

Vezmeme nyní x horní mez $\bigcup M_i$. Tedy $x \geq s_i$ (je horní mezí libovolného M_i).

☻

Řekneme, že $N \subseteq M$ je ***kofinální*** v M, pokud $\forall m \in M; \exists n \in N; m \leq n$. Opačně se to nazývá ***koiniciální***.

Věta 1 *Buď N kofinální v M. Potom $\sup M = \sup N$ právě když má kterákoliv strana smysl.*

Důkaz:
Mají stejné množiny horních mezí.

☻

Věta 2 *Nechť f je monotónní zobrazení. Potom platí:*

$$f(\sup M) \geq \sup f(M)$$

Za předpokladu, že obě strany mají smysl.

3.2 Svazy

$\forall a, b \in L; \exists \inf \{a, b\}$. Potom je to ***dolní polosvaz***. Obdobně je ***horní polosvaz***.

Svaz je něco, co je obojí zároveň.

Podmínky říkají, že máme suprema (resp. infima) libovolné neprázdné konečné podmnožiny.

O nejmenším prvku se obvykle mluví jako o nule. Největší bývá jednička. Pokud existují, tak mají infima a suprema všechny množiny.

Pokud každá podmnožina má supremum a infimum, tak je to ***úplný svaz***. Z toho plyne, že má vždycky nulu a jedničku.

Věta 3 *Má-li každá podmnožina $M \subseteq X(\leq)$ supremum, potom $X(\leq)$ je úplný svaz.*

Důkaz:
Mějme množinu M.

Označme $N = \{x; x \text{ je dolní mez } M\}$.

Vezměme $i = \sup N$. Tvrdíme, že i je dolní mez M. Každé $m \in M$ je horní mez N. Navíc je největší z nich.

☻

Máme množiny X a Y. Máme $f : X \to Y, G : Y \to X$ monotónní. Jsou ***adjugována*** (f nalevo, g napravo), jestliže platí $\forall x, y; f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$.

Také se tomu říká Galoisova konexe. Pokud to existuje, je to jednoznačné. Chová se to trochu jako inverzní (inverze takle funguje, ale i jiné věci jsou tohle).

Pozorování 4 *Jsou-li f a g v adjunkci (f nalevo, g napravo), platí*

$$\begin{aligned} \forall x \quad &; \quad x \leq g(f(x)) \\ \forall y \quad &; \quad f(g(y)) \leq y \end{aligned}$$

Naopak platí-li $\forall x; x \leq g(f(x)) \wedge \forall y; f(g(y)) \leq y$, pak jsou f a g adjugovány.

Důkaz:
První část je vidět.

Nechť $f(x) \leq y$. Potom $x \leq g(f(x)) \leq g(y)$. Obdobně s druhou částí.

☻

Pozorování 5

$$gfg = g, fgf = f$$

Věta 4 *Levé G adjunkty zachovává všechna existující suprema. Pravé zachovávají všechna existující infima.*

Důkaz:
$M \subseteq X$, s je $\sup M$. $f(s)$ je hroní mez $f(M)$. Nechť x je horní mez $F(M)$. $\forall m \in M; f(m) \leq x$. $s \leq f(x)$.

☻

Věta 5 *Jsou-li X, Y úplné svazy, potom $f : X \to Y$, resp. $g : X \to Y$ má pravý, resp. levý adjunkt $\Leftrightarrow$ zachovává suprema, resp. infima.*

Důkaz:
Nechť f zachovává suprema. Definujme $g(y) := \sup \{x; f(x) \leq y\}$. Tohle už funguje (stačí ověřit).

☻

Věta 6 (Knaster,Tarski) *Nechť L je úplný svaz. $f : L \to L$ monotóní zobrazení. Potom existuje nejmenší x takové, že $f(x) = x$.*

Důkaz:
$x := \sup\{y; y \leq f(y)\}$

☻

Věta 7 (Cantor-Berustein) *Existuje-li prosté $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$, pak existuje i vzájemně jednoznačné $h : X \cong Y$.*

Důkaz:
Vezmu $\mathcal{P}(X)$, vezmu $\varphi(M) := X - g\,(Y - f(M))$. φ je monotóní. Tedy $\exists A; \varphi(A) = A \Leftrightarrow A = X - g(Y - f(A))$.

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad h(x) = f(x) \\ x \in X - A \quad &\Rightarrow \quad h(x) = g^{-1}(x) \end{aligned}$$

Stačí jen dokázat, že je prosté a na.

☻

Věta 8 (Zornovo lemma) *Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina taková, že $\forall C \subseteq X$ uspořádané lineárně a existuje pro něj horní mez. Potom $\forall x \in X$ existuje m maximální v $(X, \leq)$ takové, že $x \leq m$.*

Lemma 1 *Nechť F je filtr a J ideál v distributivním svazu. Nechť $F \cap J = \emptyset$. Potom existuje prvoideál $\overline{F}$ takové, že $F \subseteq \overline{F} \wedge \overline{F} \cap J = \emptyset$.*

Věta 9 (Birkhoffova) *Nechť F je filtr a J ideál v distributivním svazu, $F \cap J = \emptyset$. Potom existuje prvofiltr $\overline{F} \supseteq F$ a prvoideál $\overline{J} \supseteq J$ nakové, že $\overline{F} \cap \overline{J} = \emptyset$*

Důsledek 1 *Nechť v distributivním svazu jsou $a \not\leq b$. Potom existuje prvofiltr F takový, že $a \in F \wedge b \notin F$.*

b je ***pseudokomplement*** prvku a, jestliže $x \leq b \equiv x \wedge a = 0$. Značí se $b = a^*$.

Tvrzení 2

$$a \leq a^{**}$$

Důkaz:
Dosadím a^*.

☻

Tvrzení 3

$$a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$$

Důkaz:

$$b \wedge b^* = 0 \Rightarrow a \wedge b^* = 0, b \wedge a^* = 0$$

☻

Tvrzení 4

$$a^* = a^{***}$$

Důkaz:

$$a^* \leq (a^*)^{**}, (a^{**})^* \leq a^*$$

☻

Tvrzení 5

$$a \wedge b = 0 \equiv a^{**} \wedge b = 0$$

Tvrzení 6

$$(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$$

Důkaz:

$$(a \wedge b)^{**} \leq a^{**} \wedge b^{**}$$

$a \wedge b \leq (a \wedge b)^{**}$. Ale když se použije definice: $a \wedge b \wedge (a \wedge b)^* = 0$. Tedy $a^{**} \wedge (b \wedge (a \wedge b)^*) = 0$. $(a \wedge b)^{**} \wedge (a \wedge b)^* = 0$. $a^{**} \wedge b^{**} \leq (a \wedge b)^{**}$.

☻

Tvrzení 7 *De-Morganova formule Nechť v pseudokomplementárním svazu* $\exists \sup a_i$. *Potom* $\exists \inf a_i^*$ *a platí* $\inf a_i^* = (\sup a_i)^*$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} \forall i; x &\leq a_i^* \\ \equiv a_i &\leq x^* \\ \equiv x \wedge \sup_i a_i &= 0 \forall i; a_i \leq x^* \\ \equiv \sup_i a_i &\leq x^* \\ \equiv x \wedge \sup_i a_i &= 0 \\ \equiv x &\leq (\sup a_i)^* \end{aligned}$$

☻

Nechť X je distributivní svaz. x je ***komplement*** a, jestliže $a \wedge x = 0$ a $a \vee x = 1$.

Svaz L nazveme ***Heytingovou algebrou***, existuje-li další binární operace $y \to z$ taková, že $x \wedge y \leq z \equiv x \leq y \to z$.

Věta 10 *V Booleově algebře L jsou o vlastním filtru $F \subseteq L$ následující tvrzení ekvivalentní.*

- *F je prvofiltr*
- *F je maximální filtr*
- *$\forall a \in L$ je buď $a \in F$ nebo $\overline{a} \in F$*

Důkaz:
První a druhé je ekvivalentní z věty 9.

$a \vee \overline{a} = 1 \in F$, proto tam musí být alespoň jedno z toho. Tedy, z první plyne třetí.

Nechť nyní platí třetí, ale není maximální, tedy $F \subset G \neq L$. Tedy v G je nějaké a i $\overline{a}$.

☻

4 Algebry

Mají nějaké n-ární operace, pro libovolné n, n může být i nekonečné, počet operací také.

4.1 Homomorfizmus

Homomorfizmus pro operaci to je, když:

$$h(\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \omega'(h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n))$$

nebo, jinak zapsáno:

$$\forall \xi : A \to X; h(\alpha(\xi)) = \beta(h \cdot \xi)$$

Pokud je to na algebře, tak to platí pro každou operaci.

Věta 11 *Buď α, β, γ A-nární operace po řadě na X, Y, Z. Buď $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ prostý homomorfizmus, $g : (Z, \gamma) \to (Y, \beta)$ libovolný homomorfizmus a $h : Z \to X$ takové, že $f \circ h = g$. Potom h je homomorfizmus.*

Důkaz:

$$f(h(\gamma\xi)) = g(\gamma(\xi)) = \beta(g \circ \xi) = \beta(f \circ h \circ \xi) = f(\beta(h \circ \xi))$$

☻

`TODO: Chybí hodina`

4.2 Součin algeber

Máme algebry $(X_i, +_i)$. V součinu $\prod X_i$ uděláme sčítání $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Tedy po složkách.

Věta 12 *Buď A netriviální třída algeber nějakého finitárního typu. Buď A uzavřená na produkty a podobjekty.*

Potom v A existuje nad každou množinou volná algebra.

Důkaz:
Vezměme M a vezměme množinu $B \subseteq A$ takovou, že v ní existuje isomorfní algebra pro každou $X \in A$ generovaná nejvýše $|M|$ prvky.

☻

$f : (X, \tau) \to (Y, \omega)$ je spojité, pokud $\forall x \forall V$ okolí $f(x) \exists U$ okolí z tak, že $f(U) \subseteq V$.

Věta 13 *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *f je prosté*
2. *$\forall V$ otevřené v Y je $f^{-1}(V)$ otevřená v X*
3. *$\forall A$ uzavřenou v Y je $f^{-1}(A)$ uzavřená v X*
4. *$\forall A \subseteq X$ je $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$*
5. *$\forall B \subseteq Y$ je $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(\overline{B}$*

Důkaz:
1) $\Rightarrow$ 2): Buď V otevřená v Y, $x \in f^{-1}(V)$, kdy $f(x) \leq V, \exists U$ okolí x, $f(U) \subseteq V, x \in U \subseteq f^{-1}(V)$.

2) $\Leftrightarrow$ 3): f^{-1} zachovává doplňky.

3) $\Rightarrow$ 4): $\overline{f\left(A\right)}$ je uzavřená množina. $f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right)$ je také uzavřená množina a $\supseteq f^{-1}\left(f\left(A\right)\right) \supseteq A$. $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \supseteq \overline{A}$.

4) $\Rightarrow$ 5): $f\left(\overline{f^{-1}\left(B\right)}\right) \subseteq \overline{ff^{-1}\left(B\right)} \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$

5) $\Rightarrow$ 1): V okolí $f(x)$, $f(x) \notin \overline{Y-V}$, $x \notin f^{-1}\left(\overline{y-V}\right)$, $x \notin \overline{f^{-1}\left(Y-V\right)} = \overline{X - f^{-1}(V)}$. $U = f^{-1}(V)$ je okolí x, $f(U) \subseteq V$.

☻

Věta 14 $\forall$ *soustavu* $f_j : (Y, \omega) \to (X_j, \tau_j) \exists! f(Y, \omega) \to \prod(X_i, \tau_i)$ *takové, že* $p_i f = f_i \forall i$.

Lemma 2 (Alexandrovo) *Nechť v X existuje subbáze S taková, že každé pokrytí prvky S obsahuje konečné podpokrytí. Potom X je kompaktní.*

Důkaz:
τ je topologie X. Sporem, tedy, nechť X není kompaktní. Potom existuje nějaké pokrytí, z něhož nejde vybrat konečné (nazveme ho ***ošklivé***). Existuje maximální ošklivé pokrytí (to dokážu Zornovým lemmatem (8) – sjednocení ošklivých je zase ošklivé). Označme $\mathcal{A}$ nějaké ošklivé maximální pokrytí. Při přidání libovolného prvku přestane být ošklivé. $u \notin \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{A}; U \cup V_1 \ldots V_n = X$.

Nechť $\mathcal{B} = \tau - \mathcal{A}$. Vlastnosti:

- $U \in \mathcal{B}, U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{B}$

- $U_1, U_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$

$x \in X, \exists U \in \mathcal{A}, x \in u, \exists S_1, \ldots, S_n \in S, x \in \bigcap S_i \subseteq U$. Tedy $\bigcap S_i \notin \mathcal{B}$ tedy nějaké $S_k \in \mathcal{A}$, tedy $S \cap \mathcal{A}$ je pokrytí. To je ale konečné, a tedy spor.

☻

Věta 15 *Libovolný součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

Důkaz:
Vezmeme subbázi $S = \{p_i^{-1}(U) | U \in \tau_i\}$. $U \subseteq S$ pokrytí. $U_i := \{U \in \tau_i | p_i^{-i}(U) \in U\}$.

Některé U_i pokrývá X_i. Jinak $x_i \notin \bigcap U_i, x = (x_i)$, ten nebyl pokrytý.

☻

Tato věta je ekvivalentní s axiomem výběru.

Pokud považuju průniky za násobení, tak se některé množiny chovají jako prvočísla. Například $X - \overline{\{x\}}$.

Prostor je ***střízlivý***, pokud žádná jiná prvočísla neexistují.

Prostor X je nesouvislý, jestliže existuje nějaká množina, která je otevřená a uzavřená zároveň, kromě úplné a prázdné.

Buď $f : X \to Y$ spojitý a X souvislý. Potom $f(X)$ je souvislý.

Důkaz:
Nechť $f(X) = U_1 \cup U_2$ jsou disjunktní, neprázdné a obě uzavřené. Vezmu vzory, o nich to musí platit také. Spros se souvislostí X.

☻

Věta 16 *Nechť $X = \bigcup X_i$, X_i souvislé, $\bigcap X_i \neq \emptyset$. Potom X je souvislý.*

Důkaz:
Nechť $X = U \cup V$, U, V jsou otevřené. Zvolme $x_0 \in \bigcap X_i$ a definujme $U_i = X_i \cap U, V_i = X_i \cap V$. $x_0 \in U$, vždy $V_i = \emptyset$, tedy $V = \emptyset$.

☻