Analýza

Michal Vaner

2. ledna 2013

1 Metrické prostory

Často se používá metrický N-rozměrný euklidovský prostor.

P je neprázdná množina, $\rho : P \times P \to \langle 0, \infty)$

- $$\forall x, y \in P; \rho\left(x, y\right) \geq 0, \rho\left(x, y\right) = 0 \Rightarrow x = y$$
- $$\forall x, y \in P; \rho\left(x, y\right) = \rho\left(y, x\right)$$
- $$\forall x, y, z \in P; \rho\left(x, z\right) \leq \rho\left(x, y\right) + \rho\left(y, z\right)$$

ρ se poté nazývá ***metrika*** a uspořádané dvojici (P, ρ) ***metrický prostor***.

1.1 Příklady

- $$P = \mathbb{R}, \rho\left(x, y\right) = |x - y|$$
- $$P = \mathbb{R}^N$$
  - Euklidovský prostor
    $$\rho\left(x, y\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - y_i\right)^2}$$
  - Maximová
    $$\rho\left(x, y\right) = max_{i=1}^{N}(|x_i - y_i|)$$
  - Manhatonská
    $$\rho\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|$$

- Pařížská metrika - na stejné přímce do počátku - přímo vzdálenost, jinak vzdálenost do počátku a z něj zase tam.

- $$P, \forall x, y \in P; \rho(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \neq y; \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

- $$P = C(\langle a, b \rangle)$$

spojité funkce

  - Supremální
    $$\sup_{\langle a,b \rangle} |f : x - y|$$
  - $$\int_a^b |f(t) - g(t)|$$

1.2 Otevřené a uzavřené

Otevřená koule se středem v bodu $x \in P$ o poloměru $\epsilon < \mathbb{R}^+$ je množina $B(x,\epsilon) = \{y \in P; \rho(x,y) < \epsilon\}$ ***Uzavřena koule*** je totéž, jen je tam $\leq \epsilon$.

Otevřená množina G je taková, kde $\forall g \in G; \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+; B(g,\epsilon) \subset G$. ***Uzavřená množina*** je taková, jejíž doplněk je otevřená množina.

Otevřené a uzavřené intervaly pasují na oboje.

Vlastnosti otevřených a uzavřených množin:

- $\emptyset, P$ je zároveň otevřená i uzavřená.
- $\alpha_a; a \in I$ je otevřená $\Rightarrow \cup_{a \in I} \alpha_a$ je otevřená.
- Obdobně průnik a uzavřené.
- Průnik konečné množiny množin otevřených je otevřená.
- Obdobně sjednocení a uzavřené.

Důkaz z definice a toho, jak funguje sjednocení/průnik.
Otevřená koule je kdekoliv otevřená množina.

1.3 Konvergence posloupností v metrickém prostoru

Nechť $\{A_i \in P\}$. Pokud $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists i \in \mathbb{N} \forall A_{j,j \geq i}; \rho(L, A_j) < \epsilon$, pak posloupnost ***konverguje k*** L.

$M \subset P$. ***Vnitřek množiny*** M, značeno M°, je sjednocením všech otevřených podmnožin M. ***Uzávér množiny*** M, značeno $\overline{M}$, je průnik všech uzavřených nadmnožin M.

$F \subset P$ je uzavřená, $\Leftrightarrow \forall \{A_i\} \subset F; \lim \{A_i\} = x \in P \Rightarrow x \in F$.

Důkaz:

- Množina je uzavřená - doplněk je otevřený. Kdyby $x \notin F$, tedy leží v doplňku a proto v doplňku musí ležet i nějaká koule - spor s limitou.
- G je doplněk F. Předpokládejme $\exists x \in G \forall \frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+ B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subset F \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \{x_n\} \to x, x_n \in F \Rightarrow x \in F$.

TODO: zpracovat

$(P, \rho), (Q, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : P \to Q$ je ***spojité***, pokud $\forall X = B\left(x \in P, \epsilon \in \mathbb{R}^+\right) \exists Y = B\left(f(x) \in Q, \delta \in \mathbb{R}^+\right); a \in X \to f(a) \in Y$. x je ***hromadný bodem*** množiny M, jestliže $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$ je množina $B(x, \delta) - \{x\} \cup M \neq \emptyset$

Limita lze odvodit ze spojitosti a prstencového okolí. $M \subset P$. Bod množiny $x \in M$ je ***izolovaný***, pokud $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ B(x, \epsilon) \cap M = \{x\}$.

$x \in P$ je ***hromadný bod*** M pokud $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ (B(x, \epsilon) - \{x\}) \cap \neq \emptyset$.

$x \in M$ je ***vnitřní bod***, jestliže $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+; B(x, \epsilon) \subset M$

$x \in P$ je ***hraniční bod*** množiny M, jestliže leží v rozdílu uzávěru a vnitřku množiny M.

TODO: spojitost a limita

Haineho věta:
$(P, \rho), (Q, \sigma)$ metrické prostory, zobrazení $f : P \to Q$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- f je spojitá.
- $\forall \{x_n\} \in P; x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

TODO: Důkaz utlouct z definice.

Charakterizace spojitých zobrazení:
$(P, \rho), (Q, \sigma)$ metrické prostory, $f : P \to Q$ spojité na množině P. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- f je spojité na prostoru P.
- Pro každé otevřené $G \subset Q$ je $f^{-1}(G)$ otevřená nad P.
- Pro kazdé uzavřené $G \subset Q$ je $f^{-1}(G)$ uzavřená nad P.

Důkaz:
Druhé a třetí se na sebe dá bez problémů převádět.

Mějme otevřené G, $x \in G$, $f^{-1}(x) \in G^{-1}$. Máme tedy nějaké okolí $B(x, \epsilon)$ a dle spojitosti k tomu nějaké okolí $B(f^{-1}(x), \delta)$, to se ale zobrazí do tamté.

Když opačně, tak to platí skoro přímo.

Spojitost spojitého zobrazení:
$(P,\rho),(Q,\sigma),(T,\tau)$ metrické prostory, $f : P \to Q, g : Q \to T$ spojitá zobrazení. $g \cdot f$ je spojité.

TODO: Sestavit důkaz - od prava, pro každou kouli vpravo existuje nějaká uprostřed a pro každou uprostřed existuje nějaká vlevo

2 Funkce více proměnných

Použijeme $\mathbb{R}^n$ a metriky buď euklidovskou, maximovou nebo manhatonskou, jsou navzájem ekvivalentní.

Obvyklé limity a spojitosti:
Součet, násobek, rozdíl funkce se vůči limitě a spojitosti chová normálně. Pokud obor hodnot je $\mathbb{R}$, pak i násobek a podíl.

2.1 Projekce

2.1.1 Π_i

$\Pi_i := [x_1, x_2, \ldots, x_n] \to x_i$.

TODO: Důkal limity a spojitosti - z definice

2.1.2 Lineární zobrazení

Přenásobením vektoru maticí.

2.2 Parciální derivace a totální diferenciál

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}^n; \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že f má ***derivaci v bodě*** x ***a směru*** v, pokud existuje

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x) - f(x+tv)}{t}$$

a pak je její hodnota právě toto číslo.

Pokud budeme za v vezmeme j-tý kanonický vektor. Pak to nazýváme ***j-tou parciální derivaci***.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. f má v bodě a ***totální diferenciál*** $df(a)$, jestliže existuje lineární zobrazení $fl : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové: $f(a+h) = f(a) + fl(h) + \omega(h)$, kde $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0$. Totální diferenciál je potom takovéto lineární zobrazení. (Tedy, ať to říznu směrem jakkoliv, vždycky dostanu jako derivaci tu přímku, kterou dostanu říznutím toho diferenciálu). Poznámka:
Jestliže existuje totální diferenciál v $x \to B(x,\epsilon) \subset Df$.

Přeformulování: $\exists L = df(x), \mu : B(0) \to \mathbb{R}, \mu(0) = 0, \forall h \in B(0), h \neq 0, \mu(h) = \frac{f(x+h)-f(x)-L(h)}{|h|}$ a je spojitá v počátku.

Spojitost:
Nechť $\exists df\,(x)$. Pak f je v bodě x spojitá. Převedeme na derivaci v libovolném směru.

Totální diferenciál a derivace ve směru:
Když si vyberu směr, tak derivaci dostanu jako to, co vypadne z říznutého diferenciálu tímto směrem, tedy $df(x)(v)$. (Pozn.—nemusí existovat diferenciál, aby existovala derivace v nějakém směru).

Zvolme tedy nějaký (nenulový) směr $v \in \mathbb{R}^n$. *TODO: Důkaz se utluče dosazením definice derivace ve směru a totálního diferenciálu.*

Důsledek:
Po určení derivací ve směru pro kanonické vektory získáváme totální diferenciál.

Vektoru parciálních derivací říkáme ***gradient*** a značíme jej $\nabla f(x) = \left[\frac{df}{d_{x_1}}(x), \ldots, \frac{df}{d_{x_n}}\right]$ a pokud existují všechny, pak máme kandidáta na totalní diferenciál (ještě nemusí existovat).

Věta o střední hodnotě:
Předpokládejme, že funkce f má na $B(a)$ parciální derivace. Zvolme $x \in B(a)$ Pak $\exists \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in B\,(a)\,; f\,(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_f}{d_{x_i}}\,(\xi_i)\,(x_i - a_i)$.
Důkaz:

$$\forall i = 1, \ldots, n; g\,(t) = f\,(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Tedy, nasekám ty body tak, že vždy měním jen jednu souřadnici a pak použiji lagrangovu větu o střední hodnotě pro funkci jedné proměnné (na každém tom zubu se mění jen jedna souřadnice $\rightarrow$ funkce jedné proměnné).

Existence diferenciálu a spojitost parciálních derivací:
TODO: Není tahle věda špatně? Nějak mi nesedí... Nechť f má v x spojité parciální derivace. Pak existuje $D_f(x)$.

Vezmeme $f(x+h)$. Rozepíše se to pomocí věty o střední hodnotě, odečte se diferenciál a dokáže se, že se limití k nule.

Tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $[x, f\,(x)]$. Vektor kolmý k této rovině se nazývá ***normála***.

Parciální derivace vyšších řádů se dělají derivováním těch parciálních derivací nižších řádů (může být podle jiných proměnných, než ta minulá).

Věta o záměnosti parciálních derivací:
Předpokládáme, že f má na $B(a)$ parciální derivace $\frac{d_f}{d_{x_i}}, \frac{d_f}{d_{x_j}}$. Nechť dále existuje $\frac{{d_f}^2}{d_{x_j} d_{x_i}}$ je spojitá, pak $\exists \frac{{d_f}^2}{d_{x_i} d_{x_j}}$ a má hodnotu té minulé.

Věta totálního diferenciálu složeného zobrazení:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Poznámka:
Zobrazení do $\mathbb{R}^n$ lze chápat jako n-tici funkcí.

Nechť má f na $x \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál reprezentován maticí $A^{m\times n}$. g má v $y := f(x)$ totální diferenciál reprezentován maticí $B^{k\times m}$ Složené zobrazení $g \cdot f$ má v bodě x totální diferenciál reprezentován maticí $C^{k\times n} = B \cdot A$. Poznámka:
Plyne z toho věta o derivaci složené funkce. ***TODO: Důkaz přes dosazení těch zbytkových funkcí, musejí jít k nule***

Parciální derivace složeného zobrazení:
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má parciální derivace $\frac{df}{dx_i}(x)$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ má parciální derivace $\frac{dg}{dx_i}(f(x))$. Pak existuje parciální derivace $\frac{dg \cdot f}{dx_i}(x)$.

Jednoduše se z toho uděláme funkci jediné proměnné (v tom jednom směru) a z toho je to triviální.

Poznámka:
Předpokládejme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace druhého řádu na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Pak diferenciál druhého řádu je zobrazení $d^2 f(a) : \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2 f}{dx_j}(a) h_i h_j, a \in G$.

Lze provést totéž, jako s Taylorem—přesnější odhady pomocí vyšších řádů derivací.

La-Grangeův tvar zbytku:
$G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $a \in G$, $k \in \mathbb{N}$, f má spojité derivace $k+1$-ho řádu na G.

Úsečka $\langle a, a+h \rangle = \{x \in \mathbb{R}^n; x = a + th; t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ je součást G. Pak $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_1}(a) h_1 + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{df}{dx_i dx_j} + \ldots + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{k_1, k_{k+1}}^{n} \frac{d^{k+1} f}{dx_1 dx_2 \ldots dx_{k+1}}(a + \xi h) h_1 \ldots h_{k+1}$

3 Implicitní funkce

O implicitní funkci:
$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující následující:

- $F(a, b) \neq \emptyset$.
- F má spojité parciální derivace až do nějaké hodnoty $k \in \mathbb{N}$.
- $\frac{dF}{dy}(a, b) \neq 0$.

Pak $\exists \delta > 0; \Delta > 0; \forall x \in B(a, \delta) \exists! y \in B(y, \Delta)$ tak, že $F(x, y) = 0$. (Říká, že když mám nějakou implicitní formuli, třeba $x^2 + y^2 = 0$, tak na každém bodu najdu nějaké okolí, kde to jde popsat jako $y =$ cosi). Označíme-li $y = f(x)$, má f spojité derivace na okolí a až do k-tého řádu. ***TODO: Nějak zpracovat to, co je jen na fotkách***

3.1 Extrémy funkcí více proměnných

Poznámka:
Protože potřebujeme uspořádání, budou to reálné funkce.

Řekneme, že funkce f nabývá v nějakém bodě $a \in M \subseteq D_f$ svého ***maxima*** na množině M@, pokud $\forall x \in M; f(x) \leq f(a)$ Řekneme, že funkce f nabývá v nějakém bodě $a \in M$ ***ostrého maxima*** na množině M, pokud $\forall x \in M - \{a\}\,; f(x) < f(a)$.

Obdobně pro minima. Minimum nebo maximum nazýváme extrém.

f má v bodě $a \in M$ ***lokální maximum***, pokud $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x \in M \cap B(a, \epsilon); f(x) \leq f(a)$. Obdobně ostrá maxima, minima,....

Nutná podmínka prvního řádu:
Předpokládejme, že funkce f nabývá v a lokální extrém. Dále předpokládejme, že existuje nějaká derivace ve směru. Ta je poté rovná nule.

Důkaz přes to, že je to jen derivace funkce jedné proměnné.

Nutná podmínka druhého řádu:
Dále, druhá derivace je nenulová. Opět z funkcí jedné proměnné.

Mějme $B^{n \times n}$ matici. Matice je pozitivně definitní, jestliže pro každé $h \neq 0$ je její kvadratická forma kladná. Je pozitivně semidefinitní, jestliže pro každé h je její kvadratická forma nezáporná. Je negativně definitní, jestliže ...je záporná, obdobně negativně semidefinitní. Je indefinitní, jestliže není ani jedno z předchozího. c je stacionární bod funkce f, jestliže všechny parciální derivace jsou rovny nule.

Nutná podmínka pro lokální extrém druhého řádu:
Předpokládejme, že f má v bodě a lokální minimum a předpokládáme, že má na nějakém okolí druhé spojité derivace. Matice je pozitivně semidefinitní.

Lemma:
A je pozitivně definitní $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \forall h \in \mathbb{R}^n; h^{-1} \cdot A \cdot h \geq |h|^2$ Důkaz:
$\Leftarrow$ zřejmě platí. Opačně dokážeme sporem.

Postačující podmínka lokálního extrému:
Má spojité derivace druhého řádu, gradient je roven 0 a Hasselova matice je pozitivně definitní $\Rightarrow f$ má ostré lokální minimum.

Když je Hasselova matice negativně definitní $\Rightarrow$ ostré lokální maximum.

3.2 Vázané extrémy

Hledáme extrém, který splňuje nějakou podmínku (tedy vazbu). Rozlišíme na dva případy:

- Ty co leží uvnitř takové množiny. Pak je to i lokální extrém.
- Leží na okraji.

Pokud leží na okraji, tak lze převést na funkci o méně proměnných.

O Lagrangerových multiplikátorech pro jednu vazbu:
Mám funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. M je množina nulových bodů funkce g. $c \in M$. f, g mají spojité parciální derivace v okolí c a f má v c lokální extrém vzhledem k množině M. Gradient g v c není roven nule. Existuje jediné λ, že gradient f je násobkem gradientu g.

3.3 Kompaktní množiny v metrickém prostoru

Mějme metrický prostor P a podmnožinu $K \subseteq P$. K je ***kompaktní***, pokud pro každou posloupnost $\{k_n \in K\}$ existuje vybraná podposloupnost $\{k_{n_o}\}$, která konverguje k nějakému $k \in K$.

Poznámka:
Každá kompaktní množina je uzavřená. Zřejmé.

Poznámka:
Pro každou konvergentní posloupnost z K, která konverguje k nějakému k, $k \in K$.

Poznámka:
Pokud mám kompaktní K a uzavřenou $U \subseteq K$. Pak U je také kompaktní. Lze dokázat z definice – protože U je podmnožina kompaktní, musí existovat vybraná konvergentní podposloupnost. A každá posloupnost z U, která konverguje musí konvergovat k něčemu z U, protože je uzavřená.

Mějme množinu M. Říkáme, že M je ***omezená***, pokud $\exists c \in P, \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ ; M \subseteq B(c, \epsilon)$.

Poznámka:
Na výběru středu koule nezáleží, pokud existuje nějaký, na libovolný jiný se to dá převést zvětšením poloměru.

Omezená kompaktní množina:
Mějme K kompaktní. Potom je K omezená.

Důkaz:
Sporem. Vezmu nějaký střed a postupně beru body ve vzdálenosti $1, 2, 3, 4, \ldots$. Z této posloupnosti vezmu limitu, což je nějaké X. Jeho vzdálenost je určitě konečné, ale posloupnost vzdáleností limití k ∞, což je ve sporu se spojitosti vzdálenosti.

Uzavřená a omezená:
Každá uzavřená a omezená množina je kompaktní.

Důkaz:
Pokud je omezená, pak ji zavřeme do krychle o hraně $2a$ se středem v počátku (pro nějaké a).

Taková krychle je kartézský součin intervalů $\langle -a, a \rangle$. Takový interval je kompaktní, když beru postupně každý index zvlášť, tak lze dokázat, že i ta krychle je kompaktní, indukce podle počtu indexů.

Tato množina je uzavřená a je podmnožina kompaktní množiny, proto na ni aplikujeme minulou větu.

O kompaktním obrazu:
$f : (P, \rho) \to (Q, \sigma); K \subseteq P$ kompaktní, f spojité na K. $f(K)$ je kompaktní.

Důkaz:
Z každé posloupnost i z K vybereme konvergentní posloupnost, která má limitu $k \in K$. Když vezmu obrazy této posloupnosti, tak dle hayneho věty konvergují k obrazu k.

Spojitá reálná funkce na kompaktní množině:
Mějme metrický prostor (P, ρ), K kompaktní množinu a $f : K \to \mathbb{R}$ spojité na K. Potom je f na K omezené a pro $K \neq \emptyset$ nabývá maxima a minima.

Důkaz:
Obraz je kompaktní množina, proto je omezená.

Obraz je neprázdná a omezená, proto má supremum. Vezmu posloupnost bodů čím dál tím blíže k supremu, což můžu – ta funkce je spojitá – musí jít k supremu. A protože je kompaktní, tak musí to supremum obsahovat.

Mějme metrický prostor (P, ρ) a (Q, σ), $M \subset P$, $f : M \to Q$ je ***stejnoměrně spojitá***, pokud platí, že:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in M; \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \epsilon$$

.

O spojitých a stejnoměrně spojitých zobrazeních na kompaktních množinách:
$(P, \rho), (Q, \sigma)$ metrické prostory, $K \subset P$ kompaktní, $f : K \to Q$ je spojité na K. Pak je také stejnoměrně spojité.

Důkaz:
Sporem.

Mějme metrický prostor (P, ρ). Řekneme, že je ***úplný***, pokud každá Cauchyovská posloupnost tohoto prostoru má limitu.

`TODO: Doplnit, nějak to dnes nedávám`

4 Obyčejné diferenciální rovnice

Funkcionální rovnice, kde je nejen rovnice ale i její derivace.

Pokud tam je nejvýše k-tá derivace té funkce, říkáme, že taková rovnice je k-tého řádu.

Nemusí mít jednoznačné řešení.

Mějme otevřenou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, f : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}, f$ je spojitá. ***Diferenciální rovnice prvního řádu*** je $y' = f(t, y)$.

Dále máme ***počáteční podmínku*** úlohy, tedy nějaký bod z Ω. Pak hledáme takové řešení (takovou funkci), které splňuje tuto podmínku.

Funkce y řeší tuto rovnici na nějakém intervalu (α, β), jestli:

- $$\forall t \in (\alpha, \beta) : [t, y(t)] \in \Omega$$
- $$\forall t \in (\alpha, \beta) \exists y'(t) \in \mathbb{R}$$
- $$\forall t \in (\alpha, \beta); f'(t) = f(t, y(t))$$

y je ***maximální*** řešení, jestliže y je řešení na I a $\forall \widetilde{y}$ na Jtakové, že $\exists t_0 \in I \cap J \wedge y(t_0) = \widetilde{y}(t_0) \Rightarrow J \subset I$.

Peanova věta:
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá, bod $\left[t_0, y^0\right] \in \Omega, \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ a rovnice $y : \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle \to \mathbb{R}^n$, která řeší tu rovnici na tomto intervalu, pak $y(t_0) = y^0$.

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. f splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku na množině Ω vzhledem k proměnné y, jestliže platí, $\forall \left[t_0, y^0\right] \in \Omega \exists B(\left[t_0, y^0\right]) \subset \Omega$ a $\exists L \in \mathbb{R}^+ \forall \left[t, y\right], [t, \widetilde{y}] \in B(\left[t_0, y^0\right]); |f(t, y) - f(t, \widetilde{y})| \leq L \cdot |y - \widetilde{y}|$.

Poznámka:
f má spojité parciální derivace vzhledem k y na $\Omega \Rightarrow f$ splňuje lokální Lipschitzovu podmínku.

5 Vícerozměrný integrál

5.1 Velikost množiny

Uděláme funkci, co je nad množinou 1 a jinde 0. Riemanův integrál se při tom chová špatně.

Zadefinujeme ***vnější míru***.

$$\lambda^*(M) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} vol i, M \subset \bigcup_i \right\}$$

I je nějaká množina kvádrů.