Strukturální teorie tříd uzavřených na indukované podgrafy

2. ledna 2013

Obsah

1 Perfektní grafy

Perfektní graf je takový, který má stejnou barevnost jako klikovost a platí to i pro všechny jeho indukované podgrafy.

Věta 1 *Graf je perfektní* $\Leftrightarrow$ *neexistuje ani lichou díru ani lichou antidíru.*

Věta 2 G *je perfektní* $\Leftrightarrow$ $\overline{G}$ *je perfektní.*

Umíme na tom algoritmicky počítat barevnost v polynomiálním čase.

$$\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \chi(\overline{G})$$
$$\omega(G) \leq \Theta(\overline{G}) \leq \chi(G)$$

Máme vektory $U := u_1, u_2, \dots u_n$ jednotkové vektory. Pokud $ij \in E(G)$, potom jsou na sebe kolmé.

Potom
$$\Theta(U) = \min_{|c|=1} \max_{i=1}^{n} \frac{1}{\langle u_i | c \rangle^2}$$

Z toho utluču ty nerovnosti nahoře. Je to hodně utloukání, ale nic moc hezkého.

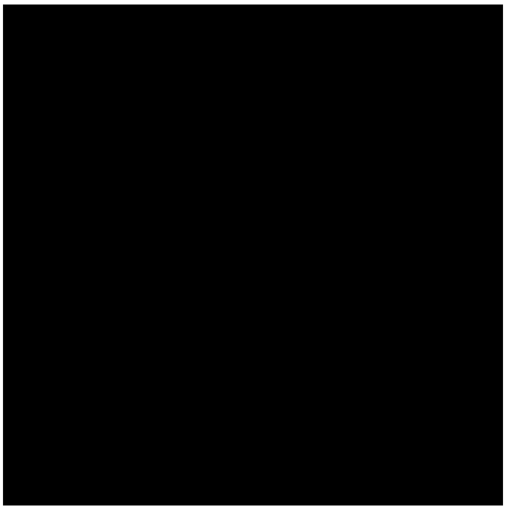
Pomocí nějakého semidefinitního programu jde najít dostatečně dobrá aproximace (např. s přesností $\frac{1}{2}$).

Hledání vlastní kliky jde (odeberu, zjistím, jestli se to změnilo, a tak dále).

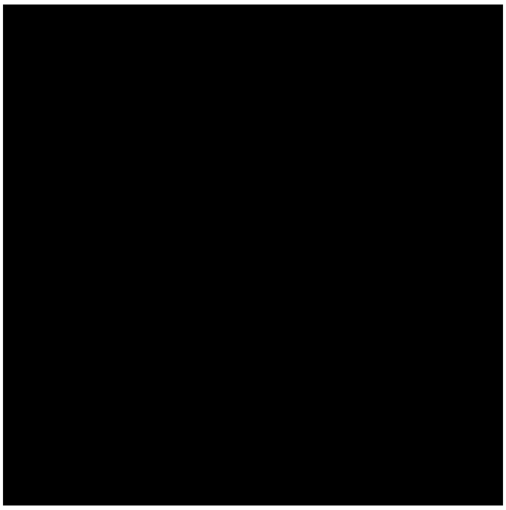
Věta 3 G *je Bergeovský (bez liché díry a liché anti-díry)* $\Leftrightarrow$ *jedno z:*

- G *nebo* $\overline{G}$ *bipartitní.*
- G *nebo* $\overline{G}$ *je line-graph bipartitního grafu.*
- G *je double-split graf.*
- G *má* 2*-join.*
- G *má balanced skew partition.*
- G *má proper homogenous pair.*

double-split je graf skládající se ze 4 bambulí, 2 dohromady jsou bipartitní graf, 2 jsou doplněk bipartitního. Kdykoliv mám spojenou dvojici nahoře a nespojenou dvojici dole, tak vertikálně mezi nimi vedou právě dvě hrany a to buď úplně vertikálně, nebo křížem (ne vidlička).



2-join je, že můžu vzít dvě části. V každé části mám dvě disjunktní množiny vrcholů. Mezi $A_1 - A_2$ jsou všechny hrany, mezi $B_1 - B_2$ taky všechny, ale žádné mezi $A_1 - B_2$ a naopak. Každá komponenta v jedné části musí protínat obě množiny. Každá část má alespoň 3 vrcholy.



Skew partition je rozklad na dvě množiny. Levá není souvislá, doplněk té vpravo není souvislý.

balanced skew partition je, že nemám žádnou lichou indukovanou cestu délky alespoň 3, jejichž konce jsou v pravé části a celý vnitřek v levé. Také opačně s lichou indukovanou anticestou.

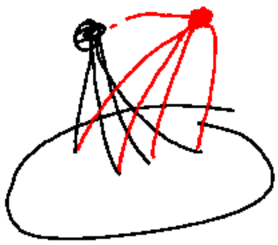
proper homogenous pair – mám dvě disjunktní podmnožiny A_1, A_2. Vrchol venku má do každé z A_1, A_2 buď všechny hrany, nebo žádné (do každé zvlášť, můžu mít vše do A_1 a nic do A_2). Ty množiny samotné neobsahují žádný vrchol, který by byl připojen k celé druhé nebo nepřipojen k celé druhé. Od každého druhu vrcholu je tam alespoň jeden.

Chceme pomocí toho dokázat, že ty Bergeovské jsou právě perfektní.

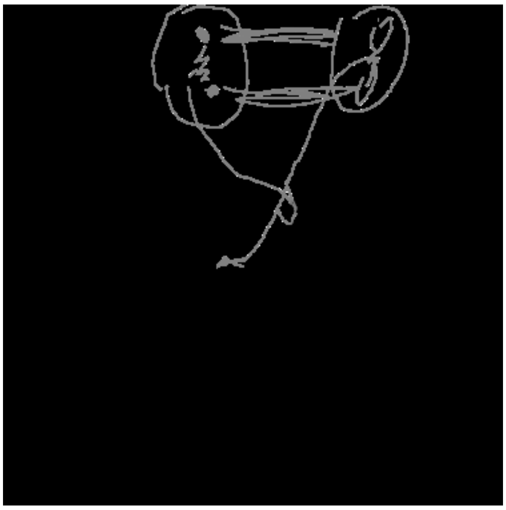
Potřebujeme dokázat, že každý z těch základních je bipartitní a naopak. Ty jsou jednoduché. Také chceme ukázat, že žádná z těch dalších „rozkladů“ není v nejmenším protipříkladu.

U double-split je to docela vidět.

Když vezmu vrchol v perfektním grafu a vezmu k němu dvojníka (spojeného s ním), tak je to také perfektní. A naopak (pokud nebylo, stále není).



U 2-join to uděláme tak, že ty poloviny rozstřihneme a dáme tam cestu mezi ně cestu, tak to stále bude perfektní. A opačně.



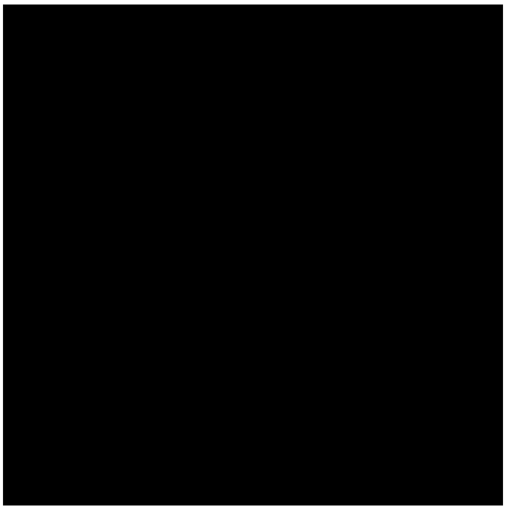
To, že je můžu rozstřihnout, to je skoro vidět. To lepení je zajímavější. Jdu na to přes podgrafy těch G_1 a G_2 bez té cesty a přes barvy na nich, že je můžu sloučit/přejmenovat, podle parity té cesty mezi nimi (té klikaté).

Budeme při tom lepení klonovat ty vrcholy té cesty (něco jako $\omega - a_1$ a a_1 krát, poslední je $\omega - b1$). To nenadělá kliku větší, než ω.

Ale protože platí tohle rozstřihávaní (že G je perfektní právě když jak G_1 a G_2 jsou perfektní), tak tohle nemůže být nejmenší protipříklad – menší by byl jeden ten rozpůlený.

Mohlo by mi to ještě degenerovat – na jedné straně rovnou jen cesta. Ale ta musí mít alespoň jeden vrchol stupně 2. Ale potom po odebrání by to bylo perfektní. No ale potom umím dobarvit i tenhle (rozbor případů), nebo dostanu lichou kružnici.

Star cut set je speciální případ skew partition, máme řez, který má jeden úplný vrchol a něco jiného – ten zbytek není souvislý a tohle není antisouvislé.

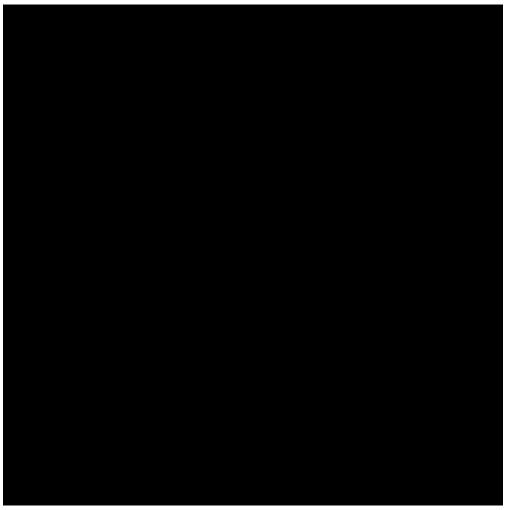


Tohle zřejmě není v nejmenším protipříkladu, jinak bych to zpropagoval na buď jednu malou kuličku, nebo ten zbytek. Beru takové, co mají jinou barvu, než ten úplný vrchol v každém z nich, ty dohromady tvoří nezávislou množinu:

A teď v tom budeme hledat kliku. Každá klika musí obsahovat buď v, nebo vrchol z S_1, obdobně musí obsahovat v nebo S_2, můžeme to zmenšit.

Takže, pokud bych měl v minimálním protipříkladu skew partition, tak ne takovou, kde vpravo je jeden univerzální vrchol. Z doplňku, nalevo není izolovaný vrchol. To mimo jiné znamená, že každá strana má alespoň 2 vrcholy.

Vezmeme antikomponentu vpravo a přidáme k ní univerzální vrchol.



Tím jsem si zřejmě lichou díru ani antidíru nevytvořil (není, kde by vznikla ta lichá kružnice, díky té balancovanosti).

Nyní, vezmeme z levé stany jen jednu komponentu. Tím nám klesl počet vrcholů (přidali jsme jeden, ztratili alespoň jednu komponentu, co má alespoň

2 vrcholy). To musí být z minimality perfektní. z naklonujeme $\omega - b$ krát (b je klikatost v B). Takže celé to má ω obarvení. Vezmeme podmnožinu A_1, která používá jen barvy z B_1. Nazveme ji C_1. Obdobně celý proces uděláme s A_2 a tak dále. Umím to rozložit, obarvit a zase složit, takže tohle taky nebyl minimální protipříklad. `TODO: Tady chybí hodina`

2 Strukturální věta

Máme G Bergeovský. Potom je to bipartitní, doplněk bipartitního, linegraf bipartitního, etc.

`TODO: Důkaz je asi dost nezapsatelný z přednášky :-/`

3 Polosilná věta o perfektních grafech

Věta 4 *G je perfektní. Když H je 4-izomorfní G, potom je taky perfektní.*

H je 4-***izomorfní*** G právě když pro každá čtveřice vrcholů v G indukuje P_4 právě když to indukuje v H.

Lemma 1 *Pokud G je 4-isomorfní H, ale $G \neq H, \overline{H}$. Potom nastává jedno z:*

- *H obsahuje C_5 jako proper podgraf.*
- *H je křehký (H nebo $\overline{H}$ obsahuje star-cut).*
- *H má vlastní endomorfizmus.*

Disk je cyklus na alespoň 5 vrcholech, nebo jeho doplněk.

Lemma 2 *Disky kromě velikosti 6 jsou 4-isomorfní jen sami sobě nebo svému doplňku.*

Lemma 3 *Graf je bez disků, potom je křehký.*

Dvojici hran budeme nazývat ***invariantní***, pokud tam v obou G i H je nebo v obou není. ***Variantní*** je když je to křížem (je právě v jednom grafu). O množině D to budeme říkat, pokud to platí pro každou dvojici vrcholů v té množině.

Lemma 4 *Máme G a H 4-izomorfní a jsou invariantní na nějakém disku D. Potom platí jedno z:*

- $H = G$.
- *H je křehký.*
- $C_5 \subseteq H$.

Důkaz:
Začnu tím, že H nebude křehký a nebude mít v sobě C_5. Budu říkat o čím dál tím hranách, že jsou invariantní, až dojdu k tomu, že jsou všechny.

☻

4 Poznávání Bergeovských grafů

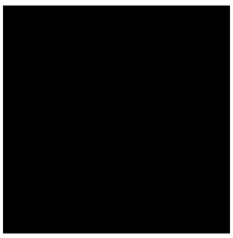
Mějme kružnici C. Potom vrchol mimo C bude C***-velký***, pokud jeho sousedé nejsou podmnožinou 3-vrchovolé cesty na C. Úplně cizí vrchol není velký (prázdná množina je podmnožina).

Kružnice je ***čistá***, pokud k ní neexistují žádné velké vrcholy.

Čistič je podmnožina vrcholů G taková, která nemá nic společného s C a obsahuje všechny velké vrcholy. ***Skoročistič*** je něco jako čistič, ale smí mít i vrcholy z C, ale ty vrcholy musí být na nějaké 3-cestě.

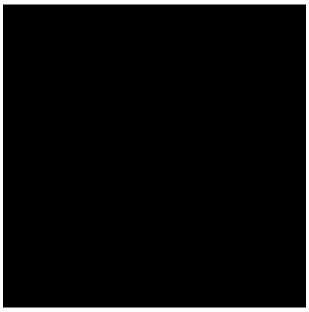
Lichá díra je ***poslušná*** je velikosti alespoň 7 a pro každou antisouvislou množinu X C-velkých vrcholů existuje v C X-úplný vrchol.

Pyramida je tohle:



Rám pyramidy jsou vrcholy uprostřed cest k tomu trojůhelníku.

Šperk je takovýto 5-cyklus (nehrany čárkovaně):



Mezi tou cestou venku a vrcholy na 5-cyklu nic nevede.

4.1 Rutiny

1. Pro graf G a skoročistič pro nejkratší lichou díru v G X najdeme nějakou lichou díru v G.
2. Najdeme neposlušnou lichou díru.
3. Najdeme polynomiálně mnoho množin vrcholů takovýc, že ke každé C poslušné liché díře existuje nalezená množina čistič.