Lineární algebra a optimalizace

Michal Vaner

2. ledna 2013

1 Vektorový prostor

Nechť $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso. Množina V spolu s operací $+$ na V, a zobrazením $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ se nazývá ***vektorový prostor*** $(V, +, *)$, splňuje-li následující axiomy:

- $\forall u, v, w \in V; u + (v + w) = (u + v) + w$
- $\forall u, v \in V; u + v = v + u$
- $\exists 0 \forall u \in V; 0 + u = u$, kde 0 je nulový vektor.
- $\forall u \in V; u + (-u) = 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \forall u \in V; a \cdot (b * u) = (a \cdot b) \cdot u$
- $\exists 1 \in \mathbb{K} \forall u \in V; \in \mathbb{K}; 1 \cdot u = u$, 1 je jednotkový prvek $\mathbb{K}$
- $\forall a \in \mathbb{K}; \forall u, v \in V; (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
- $\forall a, b \in \mathbb{K}; \forall u \in V; a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$

Prvky tělesa $\mathbb{K}$ se nazývají skaláry.

Příklady:

- ***Triviální vektorový prostor***, $V = 0$, funguje nad libovolným tělesem.
- Prostor $\mathbb{K}^n, n \in N$ - ***aritmetický vektorový prostor***, obsahuje uspořádané n-tice prvků z $\mathbb{K}$. Součet je po složkách a násobení také. Každé těleso lze vnímat jako vektorový prostor nad sebou samým ($\mathbb{K}^1$).
- Matice řádu $m \times n \Leftrightarrow \mathbb{K}^{m \cdot n}$. Operace jsou stejně jako u předchozí.
- Polynomy nad $\mathbb{K}$ přirozeného stupně.
- Spojité funkce nebo diferencovatelné funkce nebo funkce na R, na intervalu.

- Systém podmnožin $A \subseteq S$. Součet je symetrická diference (to co nemají společné), $0 = \emptyset, -A = \overline{A}$. Lze chápat jako aritmetický vektorový prostor $\mathbb{Z}_2^{|S|}$.
- Přímka v prostoru, ale jen někdy (např, když obsahuje nulu).

Prvky 0 a $-u$ jsou určeny jednoznačně. Stejně jako u skalárů.

$\forall u \in V \forall a \in \mathbb{K}; 0 \cdot u = a \cdot 0 = 0.$
$0 \cdot u = 0 \cdot u + 0 = 0 \cdot u + 0 \cdot u - 0 \cdot u = (0 + 0 \cdot u - 0 \cdot u = 0.$
$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) - a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0.$

$a \cdot u = 0 \Rightarrow a = 0 \vee u = 0$
Sporem:
$a \neq 0, u \neq 0$
$0 \neq u = 1 \cdot u = (a \cdot a^{-1}) \cdot u = a^{-1}(a \cdot u) = a^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \neq 0.$

1.1 Podprostor

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a $U \subset V$ taková:

- $\forall u, v \in U; u + v \in U$
- $\forall a \in \mathbb{K}, u \in U; a \cdot u \in U$

potom $(U, +, \cdot)$ je ***podprostor*** V.

Každý podprostor je též vektorovým prostorem. (Stačí ověřit axiomy)

Tvrzení:
$(U_i, i \in I)$ je systém podprostorů vektorového systému V, pak průnik všech těchto je také podprostor vektorového prostoru V.
U je průnik toho systému. $\forall u, v \in U \Rightarrow \forall i \in I; u \in U_i \wedge v \in U_i \Rightarrow \forall i \in I u + v \in U_i \Rightarrow u + v \in U$. Pro násobek stejně.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a $X \subseteq V$. Potom ***podprostor generovaný*** X je průnik všech U podprostorů V takových, že $X \subseteq U$. Značíme jej $\mathcal{L}(X)$ a nazýváme ho též ***lineárním obalem*** X.

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $X \subset V$. Potom lineární obal obsahuje právě všechny ***lineární kombinace*** vektorů z X.
$\mathcal{L}(X) \{u; u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i; n \geq 0, \forall a \in \mathbb{K}, \forall x_i \in X\}$.

Důkaz:

- Druhým způsobem je to podprostor obsahující X. Jednak, obsahuje to X (protože každý prvek lze v tom součtu s $n = 1, a_1 = 1$ vytvořit). Jednak, určitě to obsahuje součet dvou prvků tohoto (pro n

součtu jednotlivých n sčítaných prvků a jednoduše součty dát za sebe, jsou komutativní, asociativní, takže se to může provést). A nakonec, násobek prvku tam je také, protože můžu znásobit každé a_i a vyjde mi násobek (což můžu, na $\mathbb{K}$ je definované násobení a násobení je asociativní). Z toho důvodu to první je podmnožina toho druhého (toto je jedna z věcí, se kterou se dělá ten průnik).

- Není tam nic navíc. Pokud by tam některý prvek vygenerovaný tímto způsobem nebyl, pak jde postupným sčítáním a násobením vytvořit. Tudíž taková věc by nebyla podprostorem (nebyla by prostorem) a nedostane se mezi ony věci mezi kterými se dělá průnik. Tudíž to druhé je podmnožinou toho prvního.

1.2 Prostory určené maticí

Nechť $A_{m\times n}$ je matice nad tělesem $\mathbb{K}$. ***Sloupcový prostor*** $\mathcal{S}(A)$ je podprostor $\mathbb{K}^m$ generovaný sloupci A. $\mathcal{S}(A) = \{u, u \in \mathbb{K}^n, u = Ax \forall x\}$. ***Řádkový prostor*** $\mathcal{R}(A)$ je podprostor $\mathbb{K}^n$ generovaný řádky. ***Jádro*** matice A je podprostor $\mathbb{K}^n$ tvořený všemi řešeními homogenní soustavy $Ax = 0$. Značí se $Ker(A)$.

Důkaz, že $Ker(A)$ je podprostor K^n:
Určitě je to podmnožina $\mathbb{K}^n$ - je to aritmetický vektor o n prvcích. A prostor to je také - obsahuje součet dvou prvků tohoto $(0+0=0)$ a násobky tohoto $(a*0=0)$.

Poznámka:
Elementární úpravy nemění jádro matice ani $\mathcal{R}(A)$.

Závislost jádra a řádkového prostoru:
Nechť $v \in \mathcal{R}(A), x \in Ker(A) \Rightarrow v^T x = 0$, $v^T x$ je maticový součin (takže se smí násobit). $v^T x = \left(A^T y\right)^T x = y^T (Ax) = y^T 0 = 0, y \in \mathbb{K}^n$

1.3 Lineární nezávislost

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Daná n-tice vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Nazvu ji ***lineárně nezávislou*** $\Leftrightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0, a_1 = a_2 = a_3 = 0$. (Má jen triviální řešení).

Poznámka:
Nezáleží na pořadí vektorů.

Poznámka:
Je-li $v_1 = v_j, i \neq j \Rightarrow$ je lineárně závislé (např. $a_i = 1, a_j = -1$). Tudíž se stačí omezit na množiny.

Poznámka:
$v_i = 0 \Rightarrow$ je lineárně závislá.

Nekonečná množina je lineárně nezávislá $\Leftrightarrow$ všechny její konečné podmnožiny jsou lineárně nezávislé.

Množina $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ je lineárně závislá. Tudíž $\exists a_1, a_2, \dots a_n \exists i; a_i \neq 0 \wedge a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$. $v_i = \frac{a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{+1} + \dots + a_nv_n}{a_n}$. Tudíž lze vyjádřit ostatními vektory a je zbytečný.

$X \subseteq Y \wedge X$ závislá $\Rightarrow Y$ je závislá.

$X \subseteq Y \wedge Y$ nezávislá $\Rightarrow X$ je nezávislá.

X je nezávislá $\Leftrightarrow \forall u \in X; u \notin L(X \backslash u)$.

1.3.1 Postup ověřování

$X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{K}^n$.

- Zkusit vyřešit a najít tu kombinaci, co „dělá problémy“. Řekne i kombinaci, při které se najde ten navíc. Pokud jsou tam volné proměnné, pak má více řešení a je závislá.

- Sestaví se matice B vektorů $v_1, \dots, v_n$ po řádcích. B se převede do odstupňovaného tvaru. X je lineárně nezávislá, B' v odstupňovaném tvaru neobsahuje nulový řádek.

Báze vektorového prostoru V nazveme každé $X \subseteq V$, která je lineárně nezávislá a zároveň generuje celý prostor V. Složení každého prvku ve V z prvků X je jednoznačné.

Nechť $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je složené uspořádání báze V nad K. Pro každý vektor $u \in V$ nazveme ***souřadnice*** vzhledem k X ony koeficienty, které jsou potřeba pro získání tohoto vektoru. Značíme $[u]_X$.

Kanonická báze K prostoru $V = \mathbb{K}^n$ obsahuje samé vektory s právě jednou 1 a zbytkem 0.

Tvrzení:
Nechť X je tělesová báze taková, že $\mathcal{L}(X) = V$ a $\forall Y \subset X; \mathcal{L}(Y) \neq V$. Potom X je báze prostoru V.

Důkaz:
Generuje celý prostor (již z předpokladu). A při odebrání nějakého u do toho vektorového prostoru nebude toto u patřit.

Důsledek:
Z každého konečného počtu generátorů (těch co generuje prostor) lze vybrat bázi.

Důsledek:
Každý vektorový prostor má bázi. Buď má konečný počet generátorů (pak viz výše).

Lemma o výměně:
Nechť $u_1, u_2, \dots u_n$ je systém generátorů V a u je libovolný vektor z V. Potom $\forall i, u = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \wedge a_i \neq 0; u_1, u_2, \dots u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots u_n$ je také systém

generátorů. Tedy, pokud $u \neq 0$, pak můžu některý z oněch vektorů nahradit za něj.

Důkaz:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots a_nu_n, a_i \neq 0$$
$$v_i = \left(\frac{a_1}{a_i}u_1 + \dots \frac{a_n}{a_i}u_n\right) + \frac{1}{a_i}u$$
$$\forall w \in V, w = \sum k = 1^n b_kv_k, \qquad \text{dosadím } v_1$$
$$w = \left(b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1\right)u_1 + \dots$$

Tedy generuje celý prostor.

Steinitzova věta o výměně:
Nechť V je vektorový prostor, $X \subseteq V$ lineárně nezávislá a Y konečný systém generátorů. Potom $|X| \leq |Y|$ a dále $\exists Z \subseteq V$ platí, že:

- $\mathcal{L}(Z) = V$
- $|Z| = |Y|$
- $X \subseteq Z$
- $Z \backslash X \subseteq Y$

Důkaz:
Označím $\{u_1, u_2, \dots u_n\} = X \backslash Y$, potom $Z_0 = Y$. Dále indukcí pro $i = 1 \dots n$. Z_{i-1} generuje V. Vyberu něco, co se dá vyměnit s u_i dle předchozího lemma (musí existovat, jinak je X závislá) a nedalo se to tam v předchozím kroku. Tudíž to pak generuje V.

To nakonec odpovídá všemu.

Důsledek:
Pokud má prostor V konečnou bázi, pak všechny jeho báze mají stejnou velikost. Vezmu báze X a Y, pak jedna je nezávislá a druhá generuje a naopak, každá je menší nebo rovna té druhé.

Důsledek 2:
Pokud má vektor V konečný systém generátorů, pak lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit na bázi.

Nechť prostor V má konečnou bázi. Potom mohutnost libovolné jeho báze nazveme ***dimenzí prostoru*** V ***a značíme*** $\dim(V)$. Dále řekneme, že V je konečně generovaný.

Pozorování:
Je-li W podprostor V, pak $\dim(W) \leq \dim(V)$. Báze W je nezávislá v V.

Dimenze aritmetických vektorových prostorů $\dim(K^n) = n$ - kanonická báze má n prvků.

Pozorování:
Je-li matice A v odstupňovaném tvaru, pak nenulové řádky A jsou lineárně nezávislé, tudíž dimenze řádkového prostoru $\dim(\mathcal{R}(A)) = rank(A)$. Platí i v případě, že není v odstupňovaném tvaru.

Lze použít k výpočtu dimenze lineárního obalu něčeho. $X = \{u_1, u_2, \dots u_m\}$ a z těchto vektorů sestavíme matici. Převedeme na odstupňovaný tvar a spočítáme nenulové řádky.

Věta:
Nechť $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, potom $\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{S}(A))$.

- Násobení zleva regulární maticí nezmění dimenzi sloupcového prostoru. Vezmeme bázi $\mathcal{S}(A)$. Vynásobíme to maticí R a dokážeme, že je to báze $\mathcal{S}(A')$. Libovolný vektor z $\mathcal{S}(A')$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů toho prvního.

  Dále se dokáže, že je lineárně nezávislá. (řešení regulární matice je jen triviální, vektory té původní jsou báze, takže nezávislé).

- U odstupňované matice se dimenze sloupcového i řádkového prostoru je stejný. Když se na ně podíváme - hodnost je nejvýše počet pivotů. Navíc generují celý svůj prostor (nejsou tam nuly). Je to tedy báze.

Důsledek:
Hodnost matice a hodnost transponované matice je stejný.

Důsledek:
Při násobení regulární maticí se mi hodnost matice nezmění.

Důsledek:
Při násobení neregulární maticí se dimenze sloupcového prostoru může zmenšit.

Součet podprostorů U a V je $\mathcal{L}(U \cap V)$. Říká se mu ***Spojení***

Věta o dimenzích průniku a spojení:

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U + V)$$

Vezmeme si bázi průniku $\{w_1, \dots w_k\}$. Doplníme na bázi vektoru U $\{u_1, \dots u_k, u_1, \dots u_n\}$ a obdobně pro V. Chceme dokázat, že $\{w_1, \dots w_k, u_1, \dots u_n, v_1, \dots v_m\}$ je bazí. Jednak je systém generátorů, $z = a + b, a \in U, b \in V$ - určitě lze cokoliv vyjádřit.

Nyní že je nezávislé. Vezme se nulový vektor a zkusí se vyjádřit. Převede se třeba V napravo. Levo patří do U, pravo do V. Je stejný, tudíž je v průniku.

$$\sum d_i w_i + \sum c_i v_i = 0$$

Toto je lineárně nezávislé (je z báze V), všechny koeficienty musí být nula. Ale tudíž je to nulový vektora to vlevo na začátku je také nezávislé (z báze U).

Dimenze jádra je rovna počtu volných proměnných. Řešení jsou zapsaná jako lineární kombinace k vektorů (k je počet volných proměnných). Navíc jsoe lineárně nezávislé (ve volných proměnných je schovaná v podstatě jedničková proměnná—po vynechání některých řádků).

Pro matici o $A^{m \times n}$ součet hodnosti jádra a hodnosti matice je dohromady n. Převedeme si ji do odstupňovaného tvaru. $U = RA$. $rank(U)$ je počet bázových proměnných, což je $n-k$. A k je dimenze jádra. Při převádění se nemění ani hodnost ani dimenze.

Zobrazení $f : U \to V, U, V$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Řekneme že zobrazení je ***lineární***, pokud:

- $\forall u, v \in U; f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $\forall u \in U, \forall c \in \mathbb{K}; f(cu) = cf(u)$

Složení 2 lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení:

$$g(f(u + v)) = g(f(u) + f(v)) = g(f(u)) + g(f(v))$$

Pro násobek obdobně.

Pro popis zobrazení stačí znát zobrazení báze:
Vezmeme libovolné u, zjistím souřadnice, aplikuji na obraz báze. Vůči sumě i násobkům se chová rozumě.

Důsledek:
Množina všech obrazů je podprostor a jeho dimenze je nejvýše dimenze původního prostoru.

1.3.2 Vyjádření bází

V, W vektorové prostory nad K. $X = (v_1, \ldots v_n), Y = (w_1, \ldots w_m)$ Potom lineární zobrazení $f : V \to W$ nazveme matici $[f]_{XY} \in K^{m \times N}$ sestavenou z vektorů obrazu báze X vůči bázi Y.

Matici přechodu pro identitu z jedné báze na druhou spočítám jako $B^{-1}A$. Lze spočítat elementárními úpravami $(B|A) \sim (I|B^{-1}A)$.

Převod lze provést pomocí přechodu přes kanonickau bázi.

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad stejným tělesem K. Potom lineární zobrazení $f : V \to W$ které je bijektivní nazýváme ***izomorfizmem*** prostorů V a W.

Pozorování:
Inverzní zobrazení je také izomorfizmem. Je určitě bijekcí. Sčítání funguje správně. $f^{-1}(w + w') = f^{-1}(f(u) + f(u')) = f^{-1}(f(u + u')) = u + u' = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$. Násobení obdobně.

Věta o určení izomorfizmu:
V a W jsou vektorové prostory nad stejným K s konečnými bázemi. Potom

platí, že $f : V \to W$ je izomorfizmus právě když je matice zobrazení toho zobrazení regulární. Navíc také platí, matice inverzního zobrazení je inverzí matice zobrazení.

Předpokládám, že matice zobrazení $[f]_{xy}$ je regulární. Vezmněme zobrazení $[g]_{yx} = ([f]_{xy})^{-1}$. Složení těchto zobrazení:
$[g \circ f]_{xx} = [g]_{yx}[f]_{xy} = I_n = [id]_{xx}$. Tudíž musí být f prosté, kdyby se něco slilo, nemůžu se vrátit. Musí být také na, totéž jde udělat opačně. Tudíž je to izomorfizmus.

Opačně: Vezmeme zobrazení f a f^{-1} (izomorfizmus). Tam a zpět musí být identita, tudíž $[f]_{xy}[f^{-1}]_{yx} = [id]_{xx} = I_n$. Opačně také. Protože součinem nevzroste hodnost, takže musí být čtvercová a obě musí být stejné. Obě matice jsou tedy regulární a vzájemně inverzní.

Důsledek:
Každý vektorový prostor dimenze n nad K je izemerfní s K^n. Zvolme si bázi X a zobrazení $f : u \to [u]_x$ je izomorfizmem — určení souřadnic, z nich se dá rekonstruovat.

Poznámka:
$\dim(\mathcal{L}(A)) = \dim(\mathcal{L}(RA))$ pro regulární R je izomorfizmem $f : u \to Ru$ mezi $\mathcal{L}(a)$ a $\mathcal{L}(RA)$.

Tvrzení:
Nechť V a W jsou vektorové prostory nad K a množina Z všech lineárních zobrazení z V do W. Pak Z je vektorovým prostorem, definujeme-li součet a násobek následovně: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ a $(af) = af(x)$.

Jednak to oboje je zobrazení (očividně). Je třeba ověřit, že toto zobrazení je lineární. Stačí jednoduše rozepsat.

Také je třeba ověřit všechny axiomy vektorového prostoru.

1.3.3 Řešení rovnic s lineárním zobrazením

$f : Ax = b$ lze chápat jako lineární zobrazení. **Tvrzení**:

Nechť $f : V \to W$ lineární zobrazení. Potom platí $Ker(f) = \{x \in V; f(x) = 0\}$ (***jádro zobrazení***) je podprostorem V. Pokud rovnice $f(x) = b$ má alespoň jedno řešení x_0, potom každé řešení lze vyjádřit jako $x = x_0 + x', x' \in Ker(f)$.

1.4 Skalární součin

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení $\langle u|v\rangle\, u, v \in V \to c \in C$ se nazve ***skalární součin***, jestliže splňuje:

- $\forall u \in V; \langle u|u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- $\forall u, v, w \in V; \langle u + v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$
- $\forall u, v \in V, a \in \mathbb{C}; \langle au|v\rangle = a\,\langle u|v\rangle$

- $\forall u, v \in V; \langle v|u\rangle = \overline{\langle u|v\rangle}$
- $\forall u \in V; \langle u|u\rangle \geq 0$

Součin pro prostory nad $\mathbb{R}$ se definuje stejně, jen se všechna $\mathbb{C}$ zamění za $\mathbb{R}$.

Nechť V je prostor se skalárním součinem, potom ***norma*** definovaná skalárním součinem je dána předpisem $||u|| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$.

Geometrická interpretace:
Norma říká, jak je vektor dlouhý. Lze určit vzdálenost vektorů ($||u - v||$). $\langle u|v\rangle$ odpovídá úhlu.

Pro standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ a z něj odvozenou normu platí, $\langle u, v\rangle = ||u|| * ||v|| * \cos\varphi$, kde φ je úhel mezi nimi sevřený.

Důkaz z obrázku a kosinovy věty.

Cauchy-Swartzova nerovnost:
V je prostor se skalárním součinem a z něj odvozenou normou. Potom platí, $\forall u, v \in V; |\langle u|v\rangle| \leq ||u|| * ||v||$

$$u = 0 \leq v = 0 \Rightarrow 0 \leq 0$$

$$0 \leq ||u + av||^2 \leq \langle u + av|u + av\rangle = \langle u|u\rangle + a\langle v|u\rangle + \overline{a}\langle u|v\rangle + a\overline{a}\langle v|v\rangle$$

Dosadím $a = -\frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$, tedy:

$$\langle u|v\rangle \langle v|u\rangle \leq \langle u|u\rangle \langle v|v\rangle$$

To vlevo je násobení $c \in \mathbb{C}$ s $\overline{c}$. Tedy po odmocnění to vyjde.
Důsledek:
Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Plyne z $\vec{v} = (1, 1, \ldots, 1)$ samých jedniček.
Důsledek:
Norma odvozená ze skalárního součinu splňuje trojúhelníkovou nerovnost.

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

$$||u + v|| = \sqrt{\langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle}$$

$\langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle \leq 2|\langle u|v\rangle|$ Dosadím a použiju větu:

$$\leq \sqrt{||u||^2 + 2||u|| * ||v|| + ||v||^2} = ||u|| + ||v||$$

Poznámka:
Normu lze definovat obecněji, axiomaticky. Prostory s normou jsou to samé co metrické prostory (lze používat k měření vzdáleností).

Vektory $u, v \in V$ se skalárním součinem nazveme ***Kolmé/Ortogonální***, $\Leftrightarrow \langle u|v \rangle = 0$.
Pozorování:
Systém kolmých vektorů je lineárně nezávislá. Důkaz sporem.

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $Z = (v_1, \ldots, v_n)$ je jeho báze, $\forall v \in Z; ||v|| = 1, \forall v_i, v_j \in Z; v_i \neq v_j \Rightarrow \langle v_i|v_j \rangle$, pak ji nazvu ***Ortonormální***.

Věta:
Nechť $(v_1, \ldots, v_n)$ je ortonormální báze. Pak platí $\forall u \in V; u = \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i \rangle v_i$.
Důkaz:

$$\langle u|v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \middle| v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j|v_i \rangle = a_i$$

Koeficienty $\langle u|v_i \rangle$ se nazývají ***Fourierovy koeficienty*** vektoru u vůči ortonormální bázi $(v_1, \ldots, v_n)$.