The disjoint paths problem in quadratic time

Ken-ichi Kawarabayashi, Yusuke Kobayashi, Bruce Reed

For a given graph G and distinct vertices $s_1, s_2, \ldots, s_k, t_1, t_2, \ldots, t_k$, we want to find k disjoint paths connecting corresponding pairs of vertices s_i, t_i or conclude such paths don't exist in G.

Theorem 1 *For each fixed k, there exists an algorithm solving the disjoint paths problem in time $O(n^2)$, where n is the number of vertices of G.*

Definitions

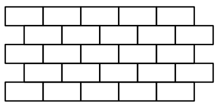
Irrelevant vertex A vertex whose removal doesn't influence the existence of the solution.

t-certificate Subgraph G_t of G is called t-certificate when the connectivity $\kappa(G_t, u, v) \geq \min(\kappa(G, u, v), t)$, but it has only $O(n)$ edges.

Separation Pair of edge-disjoint graphs (A, B). Order of separation is $|A \cap B|$.

Realizable partition Let $Z \subseteq V$. We say that partition of Z $\mathcal{P} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_p\}$ is realizable if there are disjoint trees $T_1, T_2, \ldots, T_p \subseteq G$ such that $Z_i \subseteq T_i$. `Když bych náhodou měl realizovatelné rozložení, kde každá dvojice má svůj soukromý strom, tak mám vyhráno`

Wall An elementary wall is graph composed of 6-cycles in the manner shown in picture. A wall is created by subdividing some edges of the elementary wall.



Algorithm

1. Compute $2k$ certificate G_{2k} in $O(m)$. `H. Nagamochi, T. Ibaraki, prostě oholí ty hodně spojené kusy. Po zbytek času si budeme udržovat tuhle věc up-to-date s` G

2. While G has $\geq 2^{3k-3} \cdot n$ edges, repeatedly find K_{3k} in $O(n)$ time. `Podle Reeda a Wooda, pokud máme alespoň` $2^{t-3} \cdot n$ `hran, umím najít` K_t `lineárně. Šahá jen na tolik hran, takže hustší grafy nevadí.` Then either find the paths or at least one irrelevant vertex.

3. Try finding a tree decomposition of width at most $h(k)$. If found, solve in $O(n)$ by dynamic programming on the decomposition. `Podle R. a S., kdykoliv mám něco omezené stromové šířky` w `a` Z `velikosti max.` $2k$`, pak mi stačí` $O(f(k, w) \cdot n)$`.` If the width is larger than $h(k)$, continue.

4. Find either a K_{3k} or a large enough wall. If it's K_{3k} act as above and try again.
5. Find a decomposition of the wall to flat subwalls and use that to find an irrelevant vertex.

Dealing with large clique minors

Possibility one: there's a separation of order at most $2k-1$ and all the terminals in A and at least one vertex of the clique minor in $B-A$. Consider smallest such separation. We remove the $B-A$ vertices and add all the edges between $A \cap B$. We get a smaller instance and repeat.

`Tvrdí, že to najdou jednoduchým tokem v` $O(n)$`, není zřejmé, jak.`

Possibility two: there's no such separation. Then it's easy to connect the terminals to the K_{3k} and route the paths inside.

Walls

Perimeter is the boundary of the exterior face of a wall. `Je to jednoznačné, protože taková zed' má jednoznačné nakreslení do roviny` We denote it as $per(W)$.

Compass Let U be the component of $G-per(W)$ containing $W-per(W)$ wall (wall without perimeter). Then a compass is subgraph of G induced by $U+per(W)$. `Takže ten vnitřek té zdi a všechno na to napojené, ale ne když to leze přes okraj.`

Proper subwall A wall which is subgraph of a wall and it consists of the bricks of the original wall. `Prostě že tam neudělám jiné cihličky tím, že něco vynechám.`

Dividing wall A proper subwall W' of W is dividing if it's compass is disjoint from $W-W'$.

Flat wall A wall is flat if its compass doesn't contain two disjoint paths connecting the diagonally opposite corners. `Takže je taková něco jako částečně rovinná. Když je to rovinné, tak to určitě je flat, opačně neplatí. Je to totéž, jako když si najdu nějaké množinky takové, že množinka-sousedství jiné množinky jsou prázdné, dvě množinky mají společné v sousedství max 3 a po odstranění a nahrazení okolíček úplňákama zbyde rovinná věc -- viz papír. Plyne z R.S., asi by se dalo na místě utlouct. Každá řádná podzed' ploché zdi musí být také plochá a dělící`

For each h, there's a constant $f_w(h)$ such that in every graph with tree-width at least $f_w(h)$ there's a wall of $h \times h$ bricks. Such wall can be found in linear time. `Jednak, touhle dobou už máme jen` $O(n)$ `hran, takže lineární je s počtem vrcholů. Jednak, tohle celé plyne z R. a S. a pár dalších článků, nedokazují, jen odkazují na výsledky. Ale náznak je, že vezmou podgraf, který je` sice tlustý alespoň $f_w(h)$, ale nejvýše $2f_w(h)$ tlustý, postaví se stromový rozklad a na něm se to najde

Given a graph G and a wall of size $v(t,h)$, there's an $O(f(t,h) \cdot m)$ algorithm to find either K_t-minor or $X \subseteq V, |X| \leq \binom{t}{2}$ and t^2 disjoint proper subwalls of height h dividing and flat in $G - X$ (and their flat embeddings). R. a S. mají algoritmus, který to počítá, ale v $O(n \cdot m)$. Pomalé na tom je testování placatosti. R.Kapadia, Z.Li, B.Reed mají lineární algoritmus na placatost, když se v tom vymění, tak to běží v $O(m)$.

Takže, teď zvolím dostatečně velké konstanty a pustím na to to předchozí. Napřed najdu obrovskou zeď. Potom zkusím najít ty podzdi. Dostanu buď kliku, potom hurá, nebo zdi. Pokud máme zeď, kde v ní jsou všechny dostatečně hubené, tak OK. Pokud ne, vezmeme dvě takové zdi a jejich odpovídající tlusté A. Protože jsou disjunktní, jeden z nich má nejvýše $V/2$ vrcholů, ale je dostacečně tlustý, tak se zarekurzím do něho + jeho okolí + X. To je dostatečně malé, nespomalí to. Protože nalezených podzdí je hromada, tak si vyberu takovou, která se nedotýká hranice A (protože ta hranice je malá). Potom tedy časem najdu tu malou podzeď.

Když dostanu placatou zeď a její Ačka, k tomu všechny realizovatelné rozklady něčeho okolo Aček (viz papír, str. 8), tak umím najít nezajímavý vrchol v lineárním čase. Plyne z R. a S., ale oni tvrdili, že kvadratický čas. Prý stačí znovu a lépe uanalyzovat jejich algoritmus, počet iterací závisí jen na k.

To, že ty rozklady jdou spočítat v lineárním čase plyne z toho, že jsou ty věci omezené šířkou a že R. a S.