Analýza II

Michal Vaner

2. ledna 2013

1 Riemanův integrál

Mějme funkci f. Číslo $I\mathbb{R}$ je ***Riemanův integrál*** když

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+; |I - R(\delta, C, D)| < \epsilon$$

, kde $R(\delta, C, D)$ je dělení intervalu na obdélníky o „šířce" maximálně δ ($\sum$ jejich ploch). Lze chápat jako limitu když ϵ jde k 0. Pokud limita existuje, je ***Riemanovsky integrovatelná***. Množina takových funkcí se bude značit$\mathcal{R}[a, b]$, $\langle a, b\rangle$ je interval.

Lze chápat jako definici plochy pod křivkou.

Dolní riemanovská $\sum$ je součet největších čtverců co se vejdou "pod", ***Horní je podobně***. ***Dolní riemanovský integrál*** $\underline{\int} = sup(\forall$ dolních riemanovských $\sum$.

Tyhle veličiny jsou vždy definované, ale mohou být $\in \mathbb{R}^*$.

Riemanův integrál existuje, pokud dolní i horní riemanův integrál je stejný a vlastní a pak má jejich hodnotu také.

Neomezená fce $f \notin \mathcal{R}$:
Jako cvičení

Důkaz, že

$$\underline{\int} \leq \overline{\int}$$

Pozorování:

Dolní riemanovská $\sum$ $\leq$ dorní riemanovský $\int$, což je vidět. Když D a D' jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. D' je ***zjemnění*** $D \Leftrightarrow D \subset D'$.

Mějme f definovanou na $\langle a, b\rangle$. Při zjemnění dolní se nezmenší a horní se nezvětší. **DÚ**:

- Dolní a horní riemanovu sumu.

$$\langle 0, 1\rangle, f(0) = 1, f\left(x \in (0, 1\rangle\right) \frac{1}{x}$$

- Pokud se liší jen v konečně mnoha bodech $\longrightarrow$ s integrovatelností a hodnotou integrálu jsou na tom stejně.

Triviální nerovnosti:
$\forall D$ - dělení, dolní suma je $\leq \int \leq$ horní suma.

...

Věta o kritériu riemanovské integrovatelnosti:
Mějme f na $\langle a, b \rangle$. Je riemanovsky integrovatelná $\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists D(\langle a, b \rangle)$ horní suma - dolní suma $< \epsilon$. Obdobně, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall D(\langle a, b \rangle, \delta)$ platí.

To první je jasné z nerovností (stačí domyslet).

Pokud $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2; |x_1 - x_2| < \delta \longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, pak se nazývá ***Stejnoměrně spojitá***. Tato definice je stejná jako spojitost na uzavřeném intervalu.

f na $\langle a, b \rangle$ je riemanovsky integrovatelná právě když je omezená a její množina bodů nespojitosti má míru 0 - $\forall y \exists$ systém intervalů takový, že součet délek těch intervalů a jejich sjednocení dává dohromady celý interval. Když je integrál, pak je spojitý a jeho derivace je původní funkce.

Pro každý bod: Vezměme okolí bodu, dokáže se podle toho, že je to jen supremum/infimum * délka což je omezené.

2 Posloupnosti a řady funkcí

- Limita posloupnosti funkcí
- Nekonečná řada funkcí

Bodová konvergence

$$\forall x \lim_{x \to a} \{f_n(x)\} = \lim_{x \to a} \Rightarrow f_n \to f$$

n_0 může záviset na x.

Stejnoměrná konvergence je podobná, jen n_0 nezávisí na x.

$$f_n \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} f$$

Lokální konvergence pro každý bod lze najít okolí, kde kde konverguje stejnoměrně

$$f_n \overset{loc}{\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}}} f$$

2.1 Záměna pořadí operací

Bolzano-Cauchyova podmínka:

$$f_n : M \to \mathbb{R}; f_n \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} f \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n > n_0 \forall x \in M; |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

.

O situacích kde slabší konvergence implikují silnější:

- Mějme nějaký (možno neomezený) interval (a, b).

$$\forall \langle c, d\rangle \subset (a, b); f_n \overset{loc}{\underset{\rightarrow}{\rightarrow}} f \Leftrightarrow f_n \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} f_n$$

- Uzavřený interval, všechny funkce spojité, všechny monotónní. Pokud je zde všude bodově konvergentní, pak je zde stejnoměrná konvergence.

Moorova-Ostugova věta (o prohození limit):

$$f_n, f : M \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^*, P(x_0, \delta \in \mathbb{R}^+); f_n \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} f \Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} \lim_{x\rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x\rightarrow x_0} \lim_{n\rightarrow\infty} f_n(x)$$

Důkaz:
Rozepsat, proházet.

Důsledek:
Stejnoměrná konvergence zachovává spojitost.

$$||f||_\infty := sup|f(x)|_{x\in M}$$

Věta 2.4 o záměně integrálu a limity:

$$f_n \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} f \text{ na } \langle a, b\rangle, f_n \in R\langle a, b\rangle \Rightarrow f \in R\langle a, b\rangle, \int_a^b f = \lim_{n\rightarrow\infty} \int_a^b f_n$$

Důkaz přez rozepsání Riemanova integrálu a limity.
Lze se dostat k

$$s(f_n, D) - \epsilon \in (0, b - a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f_n, D) + \epsilon \in (0, b - a)$$

Věta 2.5 o derivaci a limitě:

$$-\infty < a < b < \infty, f_n((a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$$

f_n má na (a, b) vlastní f'_n.

$$f'n \overset{loc}{\underset{\rightarrow}{\rightarrow}} g \text{ na } (a, b) \wedge \exists x \in (a, b); f_n(x_0) \text{ konverguje.} \Rightarrow \exists f_n \overset{loc}{\underset{\rightarrow}{\rightarrow}} f \text{ na } (a, b)$$

Poznámka:

$$f'n \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} g \Rightarrow f_n \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}} f$$

Důkaz:
Vezměme $\langle c, d\rangle, x_0 \in \langle c, d\rangle$ kde konverguje stejnoměrně. Pomocí souměrné bolzanovy-cauchyovy podmínky, Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Nyní je třeba dokázat, že je to derivace.

Věta 2.6 Weierstrassova:
Každá spojitá funkce může být aproximovaná polynomy na uzavřeném intervalu.

$$f(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R} \text{ spojitá } \Rightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists P(x) \forall x \in \langle a, b\rangle ; |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

Věta 2.7 Weierstrassův test:

- $$f_n(M) \to \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} sup_{x\in M}|f_n x| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \underset{\to}{\to}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f \text{ spojitá } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\to}{\to} f$$

2.2 Fourierova řada

Trigonometrická řada je řada vyjádřená jako:

$$\frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Aby se funkce f dala vyjádřit jako Fourierova řada, musí být periodická s periodou 2π.

$$f : \langle -\pi, \pi) \to \mathbb{R}$$

Trigonometrické řady umožňují vyjadřovat i složitější a ošklivější funkce než mocninné řady.

Definujme symbol:

$$f, g \in \mathcal{R} \langle -\pi, \pi\rangle \; \langle f, g\rangle ::= \int_{-\pi}^{\pi} fg$$

Je to symetrické a bilineární a pozitivně semidefinitní.

$$\forall f \in \mathcal{R} \langle -\pi, \pi\rangle ; \langle f, f\rangle \geq 0$$

Tvoří ortogonální systém.

$f \in \mathcal{R} \langle -\pi, \pi\rangle$ fourierovy koeficienty jsou $A_n = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos nx\rangle = \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx$.

Ne vždy ta trigonometrická řada konverguje k té funkci.

Věta 2.16:

$$
\begin{aligned}
& f \in \mathcal{R}\left\langle -\pi, \pi \right\rangle, \\
& A_n = \frac{1}{\pi}\left\langle f, \cos nx \right\rangle, \\
& B_n = \frac{1}{\pi}\left\langle f, \sin nx \right\rangle \\
& \Rightarrow \frac{{A_1}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\left\langle f, f \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \\
& \to \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 0
\end{aligned}
$$

3 Metrické prostory

$$(M, d), d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$$

Musí splňovat axiomy:

- $$d(x, y) = d(y, x)$$
- $$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
- $$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Příklady:

- Euklidovský prostor, zobecnění pro libovolnou mocninu
- $M = \{f, g : X \to \mathbb{R}, \text{omezené}\}$
  $$d(f, g) = sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$
- Vzdálenost mezi vrcholy souvislého grafu.

Dva metrické prostory jsou isomorfní, právě když existuju bijekce mezi M_1 a M_2, která zachovává vzdálenosti.

3.1 Otevřené a uzavřené množiny

Mějme metrický prostor (M, d). Otevřená koule $B(a, r) = \{x \in M | d(a, x) < r\}$

$$A \subset M \text{ otevřená } \Leftrightarrow \forall a \in A \exists r \geq 0; B\left(a, r\right) \subset A$$

.

$$A \subset M \text{ uzavřená } \Leftrightarrow M \backslash A \text{ otevřená}$$

.

3.1.1 Vlastnosti

- $\emptyset, M$ otevřená.
- $S \subset 2^M$ systém otevřených (konečně mnoha) $\Rightarrow \cup S = \cup_{A \in S}$ je také otevřené.
- Průnik otevřených množin je otevřená.
- $\emptyset, M$ uzavřená.
- Průnik uzavřených je uzavřený.
- Sjednocení uzavřených množin je uzavřená.

Mějme metrický prostor (M, d), potom $A_n \to b \in M, \lim_{n->\infty} A_n = b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(A_n, b) = 0$.

Množina A je uzavřená, pokud $\forall \left\{A_n, A_n \in A\right\}, \lim_{n\to\infty} A_n = b \Rightarrow b \in A$.