Lineární algebra a optimalizace

Michal Vaner

2. ledna 2013

1 Skalární součin

Viz zimní…

V jednom vektorovém prostoru může být více skalárních součinů.

1.1 Norma

Viz zimní…

Ortogonální báze je složená z kolmých vektorů.

Nechť V je konečně dimenzionální vektorový prostor nad K a $(v_1, \dots, v_n)$ tak, že v_i je kolmý na $v_j \forall i, j$ a $||v_i|| = 1 \forall i$. Pak se nazývá ***Ortonormální***.

Pozorování: Každý systém navzájem kolmých nenulových vektorů je lineárně nezávislý.

Tvrzení: Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze nad V. Potom $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|v_i \rangle v_i \longrightarrow$ pak se nazývá fourierovy koeficienty (ty věci co se sumí).

Nechť V je podprostor W a $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze. Potom zobrazení $P_v : W \to V, P_v(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i$. Pak se zobrazení P_v nazývá ***Ortogonální projekce***.

Trzení:
$\forall u \in W \forall i \in 1 \dots n; (u - P_v(u)) \perp v_i$.
Důkaz:

je přes dosazení do sumy a rozepsání.

Tvrzení:
$\forall u, z \in W; (a = ||P_v(u) - u||) \leq ||z - u||$.
Důkaz:

$b = ||P_v(u) - z||$ Stačí že $||a + b||^2 > ||a||^2$. Pak stačí rozepsat a nahlédnout, že $a \perp b$ jsou na sebe kolmé.

Věta:
V každém konečně dimenzionálním vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.
Důkaz:

Gram-Smidtova ortonormalizace, z libovolní báze udělá ortonormální. Vezme se vektor, další se nahradí vektorem kolmým na všechny předchozích, za pomocí Ortogonální projekce.

Pozorování:
Je-li W podprostor V dimenze n, pak každou ortonormální bázi V lze rozšířit na ortonormální bázi W.

Určitě lze doplnit na bázi, ty původní prohlásit za již začátek algoritmu a dozpracovat ty nové.

Vše co je kolmé na vše v V se nazývá ***Ortogonální doplněk*** - ($V^{\perp}$).

Pozn:
Řešení soustavy je ortogonální doplněk řádkového prostoru matice k celému prostoru.

Věta:
V je podprostor W konečné dimenze.

- Ortogonální doplněk V je podprostor W.
- Součet dimenzí V a $V^{\perp}$ je dimenze W.
- $(V^{\perp})^{\perp} = V$.
- $V \cap V^{\perp} = \{0\}$.

Důkaz:

$$\begin{aligned}
&u + v \in W^{\perp} \\
&u, v \perp x, \forall x \in W. \\
&\langle u + v | x \rangle = \langle u | x \rangle + \langle v | x \rangle = 0
\end{aligned}$$

Podobně pro násobek.

Označme X nějakou ortonormální bázi V. Rozšiřme X na ortonormální bázi W. Chceme nahlédnout, že V je lineární obal toho, o co se rozšířila ta báze.

$$\begin{aligned}
&v \in V^{\perp} \subset V \\
&v = \sum \dots
\end{aligned}$$

Čtvercová matice A se nazývá ***ortogonální***, pokud $A \cdot A^T = I$ - tedy, každé dva řádky jsou na sebe kolmé a navíc má každý velikost 1.

Matice je ortogonální $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

2 Determinanty

2.1 Permutace

Permutace množiny X je vzájemně jednoznačné zobrazení P množiny X na sebe sama. S_n budeme označovat množinu všech permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$. ***Inverze*** permutace je dvojice $(i, j), i > j, P(i) < P(j)$. $I(P)$ je množina všech inverzí permutace P. ***Znaménko permutace*** je $(-1)^{|I(P)|}$.

Tvrzení:
$sig(P \circ Q) = sig(P) \cdot sig(Q)$

Nechť A je čtvercová matice nad tělesem T. Pak

$$Det(A) = \sum_{P \in S_n} sig(P) \cdot \Pi_{i=1}^{n} a_{i,P(i)}$$

nazveme ***determinant*** matice A.

Věta:
$Det(A) = Det(A^T)$. Mějme $\sum_{P \in S_n} sig(P) \cdot \Pi_{i=1}^{n} a_{P(i),i}$ determinant A^T. Vezměme obdobně, ale s inverzními permutacemi. Pak ale je to ten samý součet jako u A.

Věta:
Přerovnáním řádků matice se nezmění, je-li znaménko permutace řádků rovno 1 a změní, když je rovno -1.

$$det(A') = sig(P(A \to A')) \cdot det(A)$$

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} sig(p) \Pi_{j=1}^{n} a_{i,P(i)}$$

Co se může stát je, že se přehází pořadí čísel - a to se proháže v každém řádku. Poté se buď otočí nebo neotočí znaménko té permutace. Lze povytýkat znaménko ze sumy a ty permutace zůstanou stejné.

Pro řádky:
to platí také. Lze dokázat za použití předchozích dvou.

Lemma o rozvoji determinantů:

Matice A_i, j budeme nazývat ***podmatici*** matice A, vznikne-li vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak platí, že:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum j = 1^n (-1)^{i+j} \cdot det(A_{i,j})$$

Vezmněme matici co je o 1. řádek a 1. sloupek větší, má tam samé nuly, jen v levém horním rohu jedničku. Lze si všimnout, že determinant zůstane stejný. Poté prohazováním řádků, sloupců lze každý řádek nastěhovat tam.

Důsledek 1:
Násobením řádku i číslem t nám násobí determinant číslem t.

Důsledek 2:
Přičtení t násobku řádku j k řádku i nám nezmění determinant.

Tvrzení o lineárním zobrazení:
Při zobrazení z R^n do R^n odpovídající matici A. Pak zobrazení jednodkové n-dimenzionální krychle bude mít objem stejný jako je determinant matice A.