Pravděpodobnostní metoda

2. ledna 2013

Obsah

1 Úvod

Dokazovací technika. Tady je příklad, že $R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$ ($R(k,l)$ je minimální velikost v grafu, kde musí buď být K_k nebo K_l v jeho doplňku). Naházíme si náhodný graf na n vrcholech. Spočítá se horní odhad pravděpodobnosti, že to tam je. Pokud to je menší, než 1, pak to nemusí nastat a pro takto velký graf to ještě neplatí.

2 Pravděpodobnost

Pravděpodobnostní prostor je Ω, Σ, P, kde Ω je množina elementárních jevů, Σ je sigma-algebra zajímavých/měřitelných jevů a $P : \Sigma \to \langle 0, 1\rangle$ splňující:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\Omega) = 1$

Obecně $\Sigma \subseteq 2^{\Omega}$, kdyby to bylo rovno, tak je to fajn, ale občas to nejde.

V konečném případě, pokud máme $\Omega = \bigcup \omega_i$ a ty nenastávají zároveň, potom $P(\{\omega_1 \dots \omega_n\}) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} P_i$.

2.1 Subaditivita pravděpodobnosti

Lemma 1

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Důkaz:
Lze upočítat, že $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, každá pravděpodobnost je nezáporná.

☻

Lze to rozšířit i na libovolný počet množin, takže:

$$P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$$

Nebo, jinak:

$$Pr\left[\exists i \varphi_i\right] \leq \sum Pr\left[\varphi_i\right]$$

2.2 Nezávislost jevů

Jevy A a B jsou ***nezávislé*** znamená, že $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot Pr\left(B\right)$.

Pokud $P(B) \neq 0$, potom je to také:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(Toto používá podmíněnou pravděpodobnost).

3 Náhodné permutace

Váže se na míchání karet.

Máme značky, jako:

$$\left(\begin{array}{c} X \\ k \end{array} \right) = \{A \subseteq X; |X| = k\}$$

Lze použít i s $\leq k$ a $\left(\begin{array}{c} n \\ \leq k \end{array} \right)$, což je součet binomických koeficientů až do k.

Příklad 1:

Nechť $\mathcal{F} \subseteq \left(\begin{array}{c} X \\ k \end{array} \right)$, $|X| = n$ a nechť každé dvě množiny $\mathcal{F}$ mají neprázdný průnik. Jak velké může být $\mathcal{F}$?

☺

Věta 1 *Pro $k \leq \frac{n}{2}$, $\mathcal{F}$ splňující to v příkladu 3,* $|\mathcal{F}| \leq \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)$.

Lemma 2 *Nechť* $X = \{0, \ldots, n-1\}, A_s := \{s, s+1, \ldots, s+k-1\}$ mod n. *Potom* $|\{s; A_s \in \mathcal{F}\}| \leq k$.

Důkaz:
Musí se potkávat v alespoň jednom bodě, který mají společný.

☻

Důkaz:
Máme pevné $\mathcal{F}$, náhodně zvolím $A \in \mathcal{K}k$. Pak tvrdím (což je totéž, jako věta), že $Pr\left[A \in \mathcal{F}\right] \leq \frac{k}{n}$.

Zvolme σ náhodnou permutaci a $s \in 0 \ldots n-1$ uniformě náhodné. Potom máme $\sigma(A_s) = \{\sigma(s), \ldots, \sigma((s+k-1) \bmod n)\}$. Potom $Pr\left[\sigma(A_s) \in \mathcal{F}\right] \leq \frac{k}{n}$. To už větu dokazuje. Dokážeme, že to platí pro každou permutaci $\overline{\sigma}$, pak to bude platit v průměru i pro jednu danou náhodnou.

☻

Příklad 2:

Nechť $A_1, \ldots, A_n$ a $B_1, \ldots, B_n$ jsou množiny, $|A_i| = k, |B_i| = l$, $A_i \cap B_i = \emptyset$, $\forall i \neq j; A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Jak velké může být n?

☺

Věta 2 *Pokud platí to, jako v minulém příkladu, pak* $n \leq \binom{k+l}{k}$.

Důkaz:
Ze spernerovy věty, berou se prvky a doplňky.

☻

Věta 3 (Spernerova) *Nechť* $\mathcal{F} \subseteq 2^{0 \ldots n-1}$ *a* $\forall A, B \in \mathcal{F}; A \subseteq B \Rightarrow A = B$. *Potom* $\mathcal{F} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Entropie náhodné proměnné H je počet náhodných bitů, které potřebuje, aby se mohla vybrat.

$H(\alpha)$ je entropie pro proměnnou $Pr[X = 1] = \alpha$ a je to $-\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \cdot \log_2(1-\alpha)$.

Nechť X je náhodná proměnná. Potom ***střední hodnota*** je $E[X] = \int_\Omega X(w) dP(w)$. Střední hodnoty jde násobit skalárem, sčítat a násobit mezi sebou, pokud jsou nezávislé.

Indikátorová náhodná proměnná $I_A(w)$ je 1 pokud to patří do jevu, 0 když ne. Střední hodnota $E[I_A] = P[A]$.

Příklad 3:

Šatnářka. Máme náhodnou permutaci. Potom $X = |\{i | \sigma(i) = i\}|$. A nebo si to můžu napsat jako $A_i = Pr[\sigma(i) = i]$, takže pak sečteme.

☺

Příklad 4:

Máme graf G. Potom existuje $H \subseteq G$ bipartitní a má alespoň $\frac{m}{2}$ hran. Vezmeme tedy podmnožinu vrcholů náhodně. Počítáme pravděpodobnost, že je tam která hrana.

☺

Turnaj je orientovaný úplný graf. Zajímá nás, jestli hamiltonovských cest (od poraženého k vítězi) může existovat hodně.

Věta 4 *Existuje turnaj, ve kterém jich je* $\frac{n!}{2^{n-1}}$.

Důkaz:
Vezmeme si náhodný turnaj, a σ je permutace. Potom $A_\sigma = \{T; \sigma \text{ je cesta } \}$.

☻

Příklad 5:

Máme vektory, každý je dlouhý 1. Sečteme je s ± 1 koeficienty a získáme v. Jak velké bude v? Lze je navolit tak, aby to bylo $\geq \sqrt{n}$. Jde také tak, že uděláme něco, co je $\leq \sqrt{n}$, na to koeficienty zvolím náhodně. Vezmeme proměnnou $X = |v|^2$. Tam střední hodnota vyjde n.

☺