Barevnost

2. ledna 2013

Obsah

1 Seznamová barevnost

Máme graf G, každý vrchol má přiřazen seznam přípustných barev L_v. Cílem je nalézt obarvení tak, aby každý vrchol měl barvu ze svého seznamu a dva sousedi nebyli stejní.

Vybíravost grafu G je nejmenší k takové, že pro každé seznamy délky alespoň k existuje obarvení.

Zcela očividně platí, že $\chi(G) \leq \chi_l(G)$, protože můžu všem dát stejné seznamy. Lze najít graf, kde je to ostré (např. $K_{3,3}$).

Opačně je to zcela očividně $\Delta + 1$.

Graf G je d-***vybíravý***, jestliže pro každé seznamy L_v takové, že $|L_v| = d(v)$ existuje přípustné obarvení.

Pozorování 1 *Obě může nastat. Např. trojúhelník takto obarvit nejde.*

Tvrzení 1 *Nechť G je souvislý graf a L_v jsou seznamy barev, takové, že pro každý vrchol velikost seznamu je alespoň jeho stupeň a alespoň pro jeden vrchol je ta nerovnost ostrá. Potom existuje přípustné obarvení.*

Důkaz:
Vezmeme si libovolnou kostru, zakořením v tom vrcholu, co má jeden navíc. Postupuji nahoru, vždy mám ještě jednu barvu volnou (buď mám rodiče, ten je neobarven, nebo je to ten s jednou barvou navíc).

☻

1.1 Stupňově vybíravé grafy

Blok grafu je maximální úplný 2-souvislý podgraf.

Gallaiův strom je souvislý graf, jehož každý blok je buď úplný graf nebo lichá kružnice. Vznikne lepením zmíněných kusů za vrcholy.

Věta 1 *Nechť G je souvislý graf. G d-vybíraví $\Leftrightarrow$ G není gallaiův strom.*

Lemma 1 *Nechť G je 2-souvislý graf, který není kružnice (ani sudá) a není úplný graf. Potom $\exists v \in V(G); \exists v', v'' \in N_G(v)$ takové, že $(v', v'') \notin E(G)$ a $G \setminus v', v''$ je souvislý.*

Důkaz:
Předpokládejme na chvíli, že G je 3-souvislý. Existují v něm dva nesousední vrcholy a nejkratší cesta mezi nimi. Pak vezmu jeden z nich jako v', další na cestě v a třetí jako v''. Graf zůstane souvislý po jejich odebrání (protože je 3-souvislý).

Nechť tedy obsahuje 2-řez x, y takový, že nejmenší komponenta po jeho odebrání je co nejmenší. Na chvíli předpokládejme, že $(x, y) \in E(G)$. Mám alespoň 2 komponenty, x bude v a vezmu dva sousedy z různých komponent. Je třeba ověřit, že po odebrání to zůstane souvislé. Vezmu libovolné z v jedné komponentě a vedou z něj alespoň 2 vrcholově disjunktní cesty do řezu (kvůli 2-souvislosti), tedy je to souvislé.

Zbývá tedy, když hranou spojeny nejsou. Opět zvolím 2 sousedy x. Každý vrchol ale má cestu alespoň do x nebo do y. Rozdělím je do dvou množin, Z_x a Z_y, podle toho, kam mohou, když odeberu v' a v''. Ty jsou disjunktní (jinak to je souvislé a nemám co řešit). Ptáme se, jak vypadají průniky s nejmenší komponentou. Průnik Z_x s ní je prázdný, jinak bych mohl vzít v' a x jako řez a měl bych menší komponentu. Obdobně ale do y. Tedy, ta menší komponenta je jen jeden vrchol v'.

Zakontrahuji v' a pokračuji indukcí. Pokud mi vyjde úplný graf (kružnice nemůže), tak to nějak vykoukám (např v' ten kontrahovaný, jeden soused v a něco jiného v''). Když z indukce vypadnou v_H, v'_H, v''_H a nepoužívám hranu vzniklou kontrakcí mezi v_H a v'_H (BÚNO), pak je vezmu tak, jak jsou. Pokud ano, pak jediný případ je tak, že jeden je v_H a jeden v'_H, místo v'_H vezmu v' a zase v pohodě.

☻

Lemma 2 *Nechť G je d-neobarvitelný 2-souvislý graf. To nastává právě když je to buď úplňák nebo lichá kružnice a nelze obarvit pouze pro všechny seznamy stejné.*

Důkaz:
Nechť máme 2 sousední vrcholy a x má v seznamu barvu, která se nevyskytuje u y. Potom x utrhneme, uděláme kostru, zakořeníme v y, přidáme x jako list a obarvíme tou barvou, kterou nemá y v seznamu. Potom barvíme normálně odspodu, až dojdeme k y, tak jedna barva určitě není spotřebovaná, x nic nesebralo. Tedy, všechny seznamy musí být stejné, aby to nešlo obarvit.

Nechť to je takový graf, abychom mohli aplikovat lemma 1. Potom utrhneme ty dva vrcholy, uděláme kostru, přidáme je jako listy a obarvíme je stejně (můžeme, není mezi nimi hrana). Potom u kořene (to je ten původní v) máme alespoň jednu volnou barvu.

Zbývá nám zabít ještě sudé kružnice, ale když mají stejné seznamy, všechny dvouprvkové, tak se to dá nastřídačku.

☻

Důkaz:
Od té věty: Dokážeme něco trochu silnějšího – pokud to nejde obarvit, pak G je gallaiův strom a v každém bloku B lze přiřadit seznam L_B takový, že:

- Pokud dva bloky mají společný vrchol, jejich seznamy jsou disjunktní.
- Seznam vrcholů v je sjednocení přes všechny bloky, ve kterém se vyskytuje.

To dokážeme indukcí podle počtu bloků. Při jednom bloku je to buď lichá kružnice nebo úplňák a všechny vrcholy mají stejný seznam, podle Lemma 2.

Jinak se podívám na libovolný koncový blok. Dle indukce, pokud zbytek nelze obarvit, potom je to gallaiův strom a seznam je dle tvrzení.

Pokud pro každou podmnožinu L_v o d prvcích (d je stupeň v v tom zbytku) existuje obarvení, potom mám dostatek barev na doobarvení (zbyde mi alespoň jednu navíc, protože to nějak přečísluji).

Opačně, pokud nejde obarvit, nasekám na bloky a indukcí. Kdyby list šel obarvit, pak jde celé, proto je to gallaiův list. A nemohou sdílet stejnou barvu (ty seznamy), jinak by to zase šlo.

☻

Věta 2 (Brooksova pro vybíravost) *Nechť G je souvislý graf, který není lichá kružnice nebo úplný graf. Pak $\chi_L(G) < \Delta$.*

Důkaz:
Toto plyne z věty 1. Pokud to není gallaův strom, pak je to zřejmé (ořežu a

hotovo). Když G je 2-souvislý a je to gallaiův strom, potom je to buď lichá kružnice nebo úplný graf (je celý jeden blok).

Nechť tedy není 2-souvislý, pak vezmu jeden koncový blok (takový, co má jen jednu artikulaci, je gallaiovým listem). Vezmu nějaký jeho jiný vrchol, ten má menší vrchol, než maximální.

☻

Graf G je ***k-kritický***, pokud $\chi(G) = k$, ale pro každý jeho vlastní podgraf je barevnost už nejvýše $k-1$.

Věta 3 (Gallai) *Nechť G je k-kritický graf. Potom podgraf G indukovaný vrcholy stupně $k-1$ je galaiův les.*

Důkaz:
Nechť G je k-kritický a podgraf indukovaný vrcholy stupně $k-1$ obsahuje komponentu C, která není gallaiův strom. Utrhnu komponentu, obarvím zbytek a každému přiřadím barvy, které nejsou na jeho sousedech. Každý vrchol má seznam velikosti alespoň svého stupně, to jde obarvit.

☻

Pozorování 2 *Počet 8-kritických grafů na libovolné ploše je konečný.*

Důkaz:
Má minimální stupeň 7. Proto se tam nevejde s nekonečně mnoha vrcholy, roste počet hran moc rychle.

☻

Věta 4 *Nechť $\mathcal{G}$ je třída grafů uzavřená na minory. Nechť H je pevný graf. Potom existuje lineární algoritmus, který rozhoduje, zda grafy $\mathcal{G}$ obsahují H jako podgraf.*

Důsledek 1 *Na libovolné ploše je rozhodování k-barevnosti pro $k \geq 8$ lineárně řešitelné.*

Tvrzení 2 *7-kritických grafů je na libovolné ploše konečně mnoho.*

Důkaz:
Definujme deficit pro grafy s max. stupněm 6, a to $d(G) := \sum 6 - \deg v$.

Lemma 3 *Pokud mám Gallaiův strom se stupněm max. 6, co není K_7, pak $d(H) \geq \frac{|V(H)|}{2}$.*

Důkaz:
Najdeme očíslování vrcholů tak, že vrchol stupně 5 a menší má alespoň 1, vrchol stupně 1 má alespoň $\frac{3}{2}$. Tvrdím, že součet tohoto je alespoň ta polovina, co potřebuji a je to nejvýše tolik hran, kolik jim chybí do 6.

U $K \leq 5$ a $C_?$ je to vidět, všechny přispívají alespoň 1.

U složitějších indukcí podle bloků. Vezmu si list. Pokud je to jen hrana, tak mám vrchol, ten má stupeň 1, když utrhnu, tak si může v klidu polovinu přispět a jedničku dát té artikulaci, od které trhám (v tom případě to zvednu alespoň o tolik, kolik je potřeba, když se mu sníží stupeň).

Když je to nějaké $C_?$, tak mají stupeň 2, jsou tam alespoň 2, každý si nechá půlku pro sebe a jedničku pro artikulaci už nastřádají. Když je to $K_?$, tak také, protože každý může ušetřit alespoň polovinu.

☻

Vrcholů stupně 7 a více může být jen omezeně, protože eulerova formule (podobně jako u 8-kritických). Ale protože alespoň tolik hran, kolik je deficit musí koukat z toho gallaiova stromu do těch 7 a víc, a ty mají jen omezeně mnoho hran, tak je i velikost toho gallaiova stromu omezená.

☻

Věta 5 *6-kritických grafů je také ještě konečně mnoho.*

Věta 6 (Alon) *Nechť G je graf s průměrným stupněm d a t je číslo splňující:*

$$d > 4 \binom{t^4}{t} \log_e 2 \binom{t^4}{t}$$

.

Potom G není t-vybíravý.

Důkaz:
Má podgraf s minimálním stupněm $\frac{d}{2}$. Prostě odeberu vrcholy s malými stupni, iterativně k tomu dojdu.

Z toho vyrobím bipartitní podgraf s minimálním stupněm $\frac{d}{4}$, jednoduše rozdělím na dvě části tak, aby tam bylo co nejvíce hran. Tedy minimální stupeň bude $\binom{t^4}{t} \log_e 2 \binom{t^4}{t}$. Budeme předpokládat, že partita A je větší, než B.

Nechť množina barev $K = \{1, \dots, t^4\}$. Každému vrcholu v B přiřadím náhodně t-prvkovou množinu z množiny K. Vrchol $v \in A$ se bude nazývat ***dobrý***, pokud se na jeho sousedech vyskytuje všech $\binom{t^4}{t}$ různých t-prvkových podmnožin K jako seznam.

Pravděpodobnost, že v není dobrý je nejvýše

$$\binom{t^4}{t}\left(1 - \frac{1}{\binom{t^4}{t}}\right)^{\frac{d}{4}}$$

(sčítáme přes všechny podmnožiny, že se tam zrovna tahle nevyskytuje).

Vezmeme vzorec, že

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^y \leq e^{-\frac{y}{x}}$$

Tedy, šance, že není dobrý je

$$< \binom{t^4}{t} \cdot e^{-\log_e 2\binom{t^4}{t}} = 0.5$$

Tedy, ve střední hodnotě máme alespoň polovinu dobrých vrcholů. Existuje tedy takové přiřazení, že alespoň polovina jich je dobrých, ty si zafixujme.

Nyní se pokusíme vybrat seznamy A tak, aby se pro libovolnou barvu v B vyskytl alespoň jeden, který to kazí.

Každému vrcholu v A náhodně vybereme t-prvkovou podmnožinu z z množiny K. Zafixujme nějaké obarvení γ vrcholů v B z jejich seznamů. Zkoumejme pravděpodobnost, že γ lze rozšířit na A pro náhodnou volbu seznamů. Vezmu nějaký dobrý vrchol. Na jeho sousedech se vyskytuje alespoň $t^4 - t + 1$ barev (jinak bych nemoh z každé té podmnožiny vybrat). Tedy pravděpodobnost, že mám ještě nějakou barvu je nejvýše:

$$\frac{(t-1)\binom{t^4}{t-1}}{\binom{t^4}{t}} \leq \frac{(t-1) \cdot t}{t^4} < \frac{1}{t^2}$$

Jestli jde rozšířit na jeden nebo druhý dobrý vrchol je nezávislý jev. Pravděpodobnost, že lze rozšířit s danou γ je $\frac{1}{t^2}^{\frac{|A|}{2}} \leq \frac{1}{t^{|A|}}$.

Pravděpodobnost, že existuje γ, které lze rozšířit je $< t^{|B|} \cdot \frac{1}{t^A} \leq 1$. Tedy, existuje šance, ze pro nějaké seznamy to nejde, takže vyberu tyto.

☻

2 Cirkulární barevnost

Graf má ***cirkulární* ρ *obarvení***, pokud existuje kružnice (v rovině), jejíchž obvod je ρ že existuje funkce mapující vrcholy na kružnici tak, že každá hrana má délku alespoň 1 (a hrana leze tou kratší stranou) (tedy, vrcholy spojené hranou nejsou moc blízko).

Cirkulární barevnost je infimum z ρ takových, že existuje cirkulární obarvení.

Pozorování 3

$$\chi_c(G) \leq \chi(G)$$

Důkaz:
Nasekám těch $\chi(G)$ barev dokola ve vzdálenostech 1 a můžu je tam prostě naskládat.

☻

Pozorování 4 *Stačilo by i minimum.*

Důkaz:
Vezmu plášť kužele tak, aby u podstavy existovalo obarvení, to je kompaktní prostor, na něm to bude limitit, takže musí zlimitit k nějaké kružnici, na ní to ještě bude platit.

☻

Pozorování 5

$$\chi(G) - 1 < \chi_c(G)$$

Důkaz:
Vezmeme nějaké cirkulární obarvení. Nechť je to zatím celé číslo, pak mi to dělí na intervaly po jedničkách, co je v intervalu, tam není hrana – obarvím intervaly.

Když není celé číslo, tak smím použít o až o skoro jednu barvu víc, takže jen jeden interval bude kratší.

☻

Věta 7 (Gallai-Royova) $\forall G \chi(G) = \min$ *přes všechny acyklické orientace maximální délky orientované cesty (měřeno počtem vrcholů).*

Důkaz:
Napřed $\geq$. Máme obarvení pomocí celých čísel, orientuji z většího do menšího čísla vrcholu.

Potom $\leq$. Vezmu orientaci, vrcholu přiřadím délku nejdelší orientované cesty.

☻

Máme orientaci. ***Balancovanost*** je maximum přes všechny kružnice z:

$$\max_c \frac{|C|}{\min |C^+|, |C^-|}$$

Věta 8 $\forall G \chi_c(G) = \min$ *orientace z balancovanosti.*

Důkaz:
Napřed $\geq$. Tedy, existuje kružnice obvodu ρ. Rozpůlíme ji v bodě, kam se nic nezobrazuje. Zorientuji je tak, jak jsou na cestě vzniklé rozseknutou kružnicí. U toho se udokazuje, že se to odečítá málo často a přičítá dostatečně často, nebo naopak (zorientujeme kružnici naopak).

Nyní si zafixuji tu orientaci s minimem. Hledáme funkci $\varphi : V(G) \to \mathbb{R}$. Ta bude splňovat, že kdykoliv mám hranu, potom $1 \leq \varphi(v) - \varphi(u) \leq \beta - 1$. Tuto osu lze potom namotat na kružnici.

Nechť $\varphi : V(G) \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že platí $0 \leq \varphi(v) - \varphi(u) \leq \beta - 1$ minimalizuje $\sum \max\{0, 1 - (\varphi(v) - \varphi(u))\}$. Nějaké takové φ existuje (konstantní). Toto je kompaktní množina, minimum nabývám. Pokud to je 0, tak je to hotovo.

Tedy existuje hrana s malým rozdílem. Snažím se ji zvětšit o ϵ. Tím můžu kazit jinou hranu. Tak se budu snažit konec taky zvedat o ϵ. Nebo můžu někde přelézt $\beta - 1$, takže další konec taky zkusím posunout o ϵ a to se iteruje.

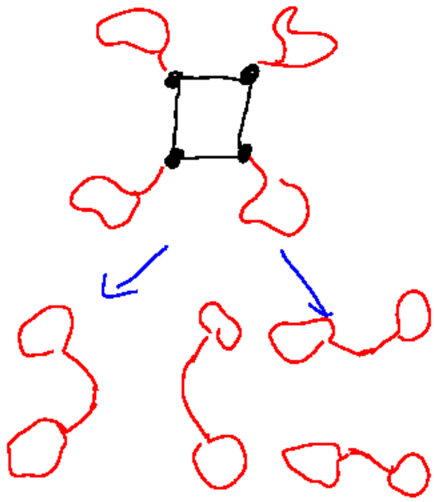
Formálně, lze sestrojit pomocný graf H, má stejné vrcholy, hrana existuje tehdy, když musím zvedat jeden vrchol v závislosti na druhém. Ten musí mít cyklus. Potom ale na ní bude moc malá vybalancovanost.

☻

Podle vizingovy věty, cirkulární hranová barevnost je $\Delta \leq \chi'_C(G) \leq \Delta + 1$.

Máme kubický graf bez mostů.

Lemma 4 *Nechť G je kubický graf bez mostů a obsahuje čtvereček. Potom můžu čtvereček rozstřihnout a zkontrahovat (buď svisle nebo vodorovně) tak, aby byl také bez mostů (alespoň jeden z nich nemá most).*



Důkaz:
Rozebereme, co je most. Nechť tedy je to vzniklá hrana. To ale vyjde, že most byl i původně.

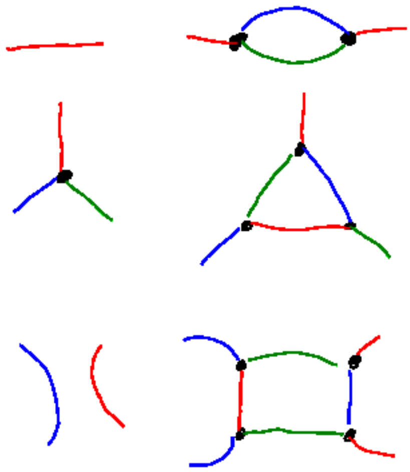
Když by byl jinde, ale kdyby teď patřily do stejné části, tak byl most i původně.

Máme tedy každé v jedné části. Obdobně i nahoře a dole. Máme tedy 4 druhy vrcholů (průniky podle částí pro oba případy). Jeden kvartál mi zbyde, bude most.

☻

Věta 9 (Afshami, Hatami, Hatami, Tussevkani, Zhu) *Nechť G je kubický graf bez mostů. Pak jeho cirkulární hranová barevnost je nejvýše $\frac{11}{3}$.*

Důkaz:
Vezmeme kružnici o obvodu $\frac{11}{3}$. Stačí barvit jen body násobky třetin. BÚNO nemá trojúhelníky, čtyřcykly, paralelní hrany. Paralelní hrany lze zaměnit za jednu hranu (protože to, co venku z těch vrcholů vedou stejné barvy). Obdobně lze zkontrahovat trojúhelník. Čtyřcyklus lze nahradit buď za dvě hrany nahoře a dole, nebo dva vlevo a vpravo. Při obarvení jsou buď blízko u sebe, nebo daleko.



Má perfektní párování, tak ho zafixujeme. Podíváme se na jeho komplement, ten bude tvořen lichými a sudými kružnicemi. Hledáme orientaci hran line grafu (nazveme ho L) tak, aby nebalancovanost byla max. $\frac{11}{3}$.

Najdeme orientaci splňující:

- Po 3 hranách ve stejném směru na cestě musí být už v protisměru.
- Když jsou 3, 1, 3, 1, tak teď už může být max 2 zasebou a jedna proti.

Vezmu kružnici, ta je rozdělená na úseky, kdy jdou po směru, dělené hranami v protisměru. Úseky délky $0, 1, 2$ nazvu krátké, zbylé (délky 3 jsou dlouhé). Máme max. 2 dlouhé úseky za sebou.

Počet dlouhých úseků je nejvýše $2*$ počet krátkých. Počet všech je max. počet protisměrných hran. Z toho už se to vypočítá.

Opačný směr je vidět.

V line grafu zorientuji hrany tak, že od původní hrany perfektního párování vede do cyklu. U sudé uvnitř zorientuji nastřídačku. Tam jsou jen úseky délky 2.

U lichého máme problém, jedna hrana zbyde, takže mám cestičku délky 3, za ní už násteduje jedna v protisměru (resp. obě). To ale neřeší druhou podmínku.

Rozdělím hrany párování jako vstupní a výstupní (vstupní je tak, kde začíná dlouhý úsek). Hrana je aktivní, pokud je vstupní pro jednu lichou kružnici a pro jinou výstupní. Problém je, pokud bych měl na jedné liché kružnici dvě aktivní hrany. Budeme minimalizovat počet aktivních hran přes celý graf.

Pro spor předpokládejme, že mám kružnici, co má jednu vstupní a jednu výstupní hranu aktivní. Kdybych nemohl pootočit tuto kružnici, tak máme všechny hrany potenciálně aktivní, některé jsou na druhé straně vstupní a některé výstupní. Protože je lichá, musí být alespoň dvě stejným směrem a někde za tím jedna opačně. Tam to přetočím a hotovo, snížím tím počet aktivních hran.

☻

Lemma 5 *Nechť $p(x_1, \ldots, x_n)$ je polynom takový, že stupeň $x_i \leq d_i - 1$. Potom $y_1, \ldots, y_n$ jsou podmnožiny velikosti $y_i = d_i$. Pokud $p(x_1, \ldots, x_n) = 0 \forall (x_1, \ldots, x_n) \in y_1 \times \ldots \times y_n$, potom je identicky nulový.*

Důkaz:
Indukcí. Pro jednu proměnnou je vidět.

Platí mi pro $n-1$, přidávám n-tou proměnnou. Takže si polynom roznásobím na

$$\sum x_n^i \cdot q_i$$

Ty q_i jsou polynomy v $n-1$ proměnných, pro ně to platí. Pokud tedy po dosazení do nich jsou vždy nulové (všechny), tak jednoduše platí, protože ony jsou identicky nulové a ono se to unulí.

Pokud je tam alespoň jeden někdy nenulový, tak si zafixuji jeho vstup. V tom případě je to konstanta a mám polynom v jedné proměnné (x_n), pro tu to platí, tedy je identicky nulový a hotovo.

☻

Graf je d vybíravý, pokud pro každé seznamy takové, že délka seznamu vrcholu v je $d(v)$, potom si umí vybrat.

Věta 10 (Alon-Tarsi) *Nechť $d(v) \geq \deg_{in}(v)+1$. Potom, když počet sudých eulerovských podgrafů je různý od počtu lichých eulerovských podgrafů, tak je d-vybíravý (liché a sudé podle počtu hran).*

Důkaz:
Uděláme polynom $P_G(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{v_j, v_i \in \vec{E}} (x_i - x_j)$. Pokud někdy není nulový, tak máme obarvení. Předpokládejme, že je nulový pro každou n-tici barev. To by bylo pěkné pro lemma, ale má velké stupně.

Pro každý vrchol si udělám výraz: $\prod_{z \in L(v_i)} x_i - z$. Taková věc je nula pro všechny vstupy, které se do něj kdy dávají (mohou dát). Můžu to přepsat jako $x_i^{d(v_i)} - q_i(x_i) = 0$ (prostě ten samotný člen maximálního stupně a ten zbytek).

V P_G roznásobíme na monomy. Pokud existuje monom s vysokým stupněm, tak $x_i^{\alpha_i}$ nahradím za $x_i^{\alpha_i - d(v_i)} \cdot q_i(x_i)$ (dle předchozího výrazu se $x_i^{d(v_i} = q_i(x_i)$ ve všech zajímavých bodech. Toto opakuji, dokud nějaké monomy s vysokým stupněm mám, jednou musím skončit.

Ten už má malé stupně, aplikuji lemma. Ten je identicky nulový.

Nyní ukážeme, že koeficient v členu $\Pi x_i^{d(v_i)-1}$ je stejný v původním i upraveném a nenulový. Na ten nikdy při nahrazování nesáhnu, proto zůstane stejný v původním i v upraveném. Také se do něj nikdy nic nepřidá (***TODO: Proč?***). Ukážeme, že má nenulový koeficient.

Všimneme si, že součet exponentů v každém monomu je m (m je počet hran).

Počet různých možných monomů je 2^m. Stejně tak je i různých orientací grafu. Takže každému monomu přiřadíme jednu orientaci. To takovou, kdy exponent odpovídá vstupnímu stupni vrcholu (určitě pro každou orientaci existuje takový monom, je jich stejně).

Nyní budu brát jednotlivé orientace. Některé přidají 1, některé -1. Když to vyxoruju s tou, co mám, tak mi vyjde buď sudý nebo lichý eulerovský podgraf. Tedy, když se jejich počet liší, tak má nenulový koeficient.

Protože má nenulový koeficient, nemůže být identicky nulový.

☻

Důsledek 2 *Každý rovinný bipartitní graf je* 3*-vybíravý.*

Důkaz:
Nalezneme orientaci se vstupními stupni nejvýše 2.

Dále, každý eulerovský graf musí mít sudý počet hran. Prázdný graf existuje a je sudý.

Uděláme si pomocný graf. Každý vrchol tam bude dvakrát, vrcholy budou i za hrany, každou hranu spojím s jejími koncovými body. Hranu zorientuje do spárovaného vrcholu. Najdu párování pokrývající hrany. Tady už stačí jen ověřit hallovu podmínku.

☻

Cirkulární barevnost lze definovat jako nejmenší $\frac{p}{q}$ takové, že ;$q \leq c(u) - c(v) \leq p - q$.

2.1 Cirkulární vybíravost

Cirkulární vybíravost je $\inf \alpha$ takové, že pro $\forall p, q \forall L : V(G) \to L \in \{0, \ldots, p-1\}$, kde $|L| = \alpha \cdot q$ najdeme obarvení takové, že $q \leq |c(u) - c(v)| \leq p - q$.

Věta 11 $\chi_{c,l}(C_{2k}) = 2$.

Důkaz:
Hran máme stejně jako vrcholů.

Podobně jako v předchozím si uděláme polynom. Každou hranu vezmu v $2q-1$ kopiích a polynom bude vypadat $\prod(x_j + x_{j+1}) \cdot e^{\frac{2\pi \cdot k \cdot i}{p}}$. V podstatě si vezmu body na jednotkovém kruhu v komplexních číslech pro každou hranu.

Obdobně jako u Alon-Tarsiho si vezmu člen $\prod x_j^{2q-1}$.

Zorientuji třeba po směru hodinových ručiček. Sudá kružnice zcela očividně má různý počet lichých a sudých eulerovských podgrafů.

☻

3 Discharging

Důkazová metoda založená na tomto:

- Uvážíme minimální protipříklad.
- Minimální protipříklad nemůže obsahovat některé konfigurace.
- Každý rovinný (nebo jiný) graf obsahuje alespoň jednu zakázanou konfiguraci. To se ukáže metodou přerozdělování náboje. Každý vrchol a každá stěna dostane nějaký náboj. Součet je záporný. To si mezi sebou nějak popřesunují. Konečný náboj bude nezáporný.

Cyklické obarvení grafu na nějaké ploše je obarvení takové, že každé dva vrcholy ležící na společné stěně mají různou barvu. To je určitě velikost maximální stěny, tedy Δ^*.

Příklad 1:

Nechť G je rovinný graf takový, že žádné dvě stěny velikosti alespoň 4 nemají společný vrchol. Pokud $\Delta^* \geq 6$, potom cyklická barevnost je nejvýše $\Delta^* + 1$.

☺

Důkaz:
Dokážeme, že nechť G je rovinný graf a $D \geq 6$. Pokud $\Delta^* \leq D$, potom barevnost je nejvýše $D + 1$.

Budeme mít protipříklad minimální v počtu vrcholů, z nich minimální počet hran.

Lemma 6 *Minimální protipříklad je 2-souvislý.*

Důkaz:
Pokud ne, tak můžu v klidu roztrhnout, obarvit a spojit, jen s přebarvením. Pro tu stěnu, na které se to potkává (vnější stěny budou sdílet) je dostatek barev.

☻

To znamená, že počet vrcholů a hran na stěně je stejný.

Lemma 7 *Minimální protipříklad nemá paralelní hrany.*

Důkaz:
Vytáhnu vnitřek, ten obarvím zvlášť, vytáhnu vnějšek, ten zvlášť, oboje je menší, obarvím, slepím (a přebarvím, aby ty dva vrcholy kolem paralelních hran odpovídaly).

☻

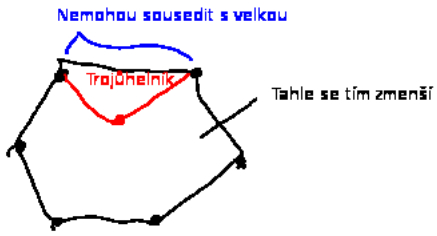
Lemma 8 *Minimální protipříklad nemá separující trojúhelník.*

Důkaz:
Roztrhnu, obarvím, slepím a zase hotovo (podobně jako paralelní hrany).

☻

Lemma 9 *V minimálním protipříkladu, $\delta \geq 3$.*

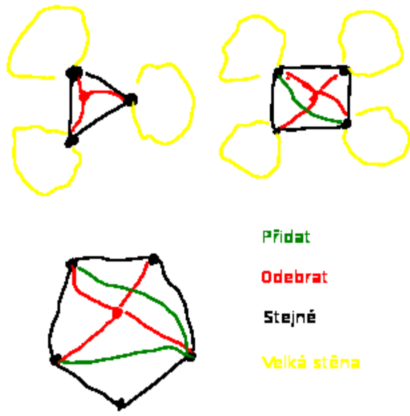
Důkaz:
Jedna stěna, se kterou sousedí je trojúhelník (plyne přímo z předpokladu). Můžu vrchol odebrat, tím neudělám dvě velké stěny vedle sebe. Můžou vzniknout dvě paralelní hrany, to můžu splácnout, mám jinak obarvím, mám alespoň dvě zbylé barvy pro vrácení.



☻

Lemma 10 *Každý vrchol stupně* 3, 4 *nebo* 5 *leží na stěně velikosti alespoň* 5.

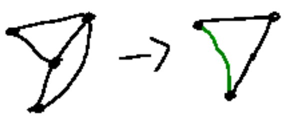
Důkaz:
Kdyby ne, tak to můžu vyndat, ztriangulovat, obarvit a vrátit.



☻

Lemma 11 *Minimální stupeň je* 4.

Důkaz:
Kdyby měl stupeň 3, tak má jednu velkou stěnu, vyměním za hranu, pak vrátím.



☻

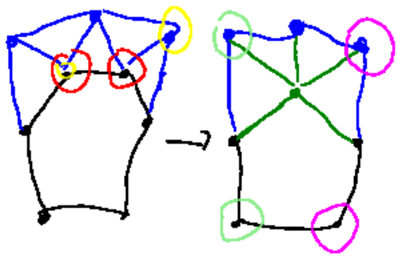
Lemma 12 *Každý vrchol stupně* 4 *leží na stěně velikosti alespoň* 6*.*

Důkaz:
Vyndám, ztrianguluji (jako u minulého lemmatu). Až to budu vracet, tak mám max. 6 zakázaných barev, mám k dispozici alespoň 7.

☻

Lemma 13 *Žádná velká stěna neobsahuje po sobě následující vrcholy stupně* 4*.*

Důkaz:
Ta stěna má alespoň velikost 6. Vyndám je a uvolněné místo vytrianguluji. Lze obarvit a pak je vrátit.

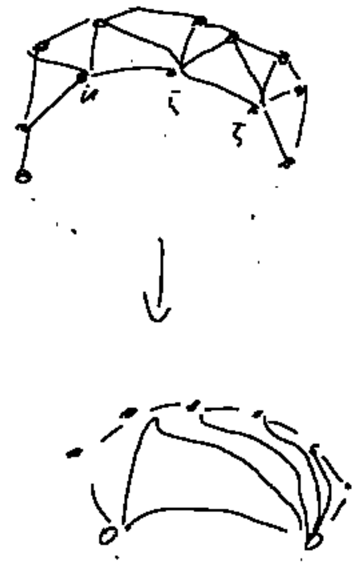


Po vrácení jednu barvu měl přidaný vrchol. Buď lze druhému dát barvu z protějšího vrcholu (žlutá kolečka), nebo to vypadá tak, že oba „protější" jsou i uvnitř velké stěny, potom ale zbývá dostatek barev, protože okolo je jen 5 (jedna volná, jedna uvolněná sebráním našeho vrcholu).

☻

Lemma 14 *Žádná velká stěna neobsahuje vrcholy stupňů* $4, 5, 5$ *ani* $4, 5, 4$*.*

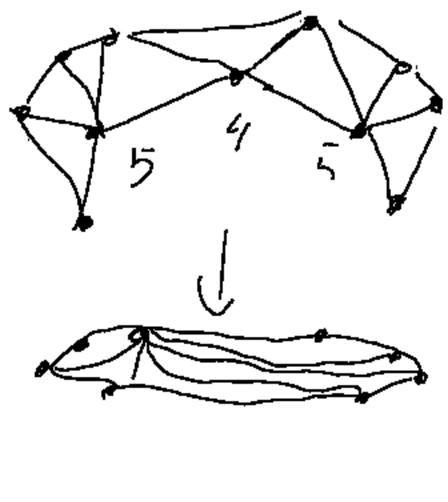
Důkaz:
Viz obrázek. Opět to půjde dobarvit.



☻

Lemma 15 *Žádná velká stěna neobsahuje vrcholy stupňů* 5, 4, 5.

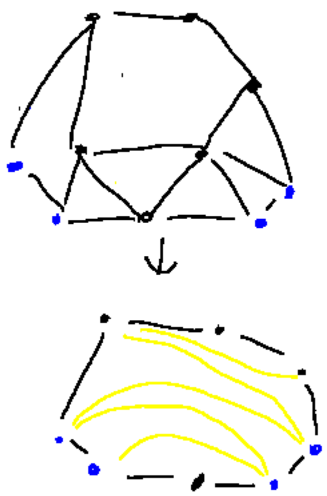
Důkaz:
Opět obrázek.



☻

Lemma 16 *Žádná stěna velikosti* 5 *neobsahuje dva vrcholy stupně* 5 *za sebou.*

Důkaz:
Zase obrázek.



☻

Každému vrcholu přiřadíme $d - 6$ jednotek náboje, kde d je jeho stupeň. Každé stěně přiřadíme $2d - 6$ jednotek náboje, kde d je její stupeň. Součet bude $6 \cdot |E(G)| - 6|V(G)| - 6|F(G)|$. Z eulerovy formule tedy vyjde, že je to -12.

Zavedeme pravidla:

- Stěna velikosti alespoň 5 posílá 2 jednotky každému vrcholu stupně 4, který je na ní.
- Stěna velikosti alespoň 5 posílá jednu jednotku vrcholu stupně 5.

Každý vrchol má nyní nezáporný náboj. Vrcholy stupně 6 a vyšší jsou nezáporné od začátku, menší jsou na stěně velikosti alespoň 5, tak dostali dostatek.

Každá stěna má nyní nezáporný náboj. Trojúhelníky mají 0 od začátku, 4 nikomu nic nedají také.

5-stěna neobsahuje stupeň 4. Ta obsahuje jen vrcholy 5. Obsahuje nejvýše dva takové.

Pokud je stěna veliká (dostatečně), pokud všechny vrcholy stupně 4 nebo 5. Potom všechny jsou 5, potom pošle celkem d jednotek. Tak dále vezmu úseky stupňů $4, 5$. V takovém úseku je max jedna čtyřka a v takovém případě je dlouhý max. 2. Posílá tedy nejvýše tolik, kolik je délka úseku + 1. Velikost stěny je součet úseků + počet úseků (mezi nimi je jeden nakrmený vrchol).

To je ale nezáporné, spor s -12, proto není minimální protipříklad.

☻

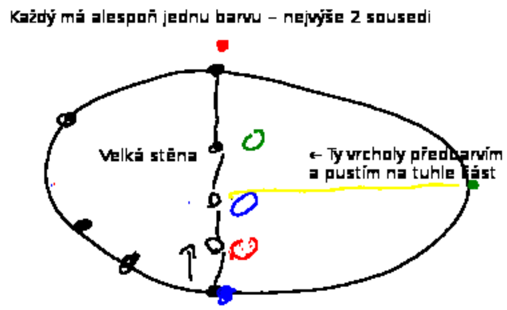
Věta 12 (Thomasen) *Nechť G je 2-souvislý rovinný graf obvodu alespoň 5 (nemá trojúhelníky a čtyřcykly) a nechť C je stěnový cyklus vnější stěny. Pokud C má délku nejvýše 9, potom lze každé předbarvení cyklu C rozšířit do 3-obarvení G s výjimkou případu, kdy $|C| = 9$ a existuje vrchol 3 různých vrcholů na vnější stěně se 3 různými barvami.*

Důkaz:
Uvážíme minimální protipříklad. Každý vnitřní vrchol má nejvýše 1 souseda na C – jinak rozdělím na 2 a předbarvím. To je menší, obarvím, rozšířím.

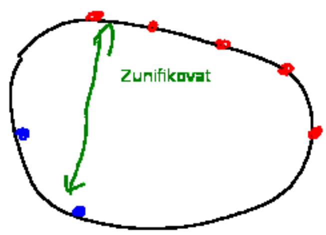
Každý vrchol má stupeň alespoň 3, jinak odeberu, obarvím a vrátím.

Dále, C nemá chordu. Úplně skoro stejně.

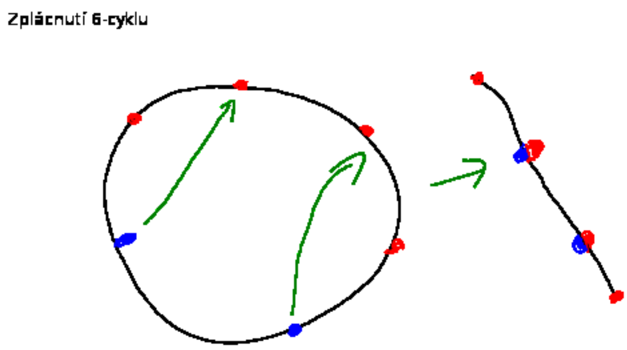
Neexistuje cesta délky $l = 3$ nebo $l = 4$ (měřeno počtem hran) spojující 2 vrcholy na C taková, že ani jedna z čátí oddělených touto cestou není stěna velikosti $\leq 2l - 1$ (tedy, každá taková cesta vytváří společně s C stěnu velikosti nejvýše $2l - 1$). Nechť tedy existuje. První možnost je, že máme stěnu, ale velkou (tedy, na části C jsou alespoň 2/3 vrcholy). Vrcholy na cestě obarvím, druhou část vyřeším a hotovo. Pokud jdu zkraje hladově, tak to funguje (viz obrázek, má vždy alespoň jednu volnou barvu). Dále, ani jedna strana není stěna sama o sobě. Smažu vnitřek menší části (druhý obrázek), můžu rozšířit. Pokud to nejde kvůli chordě, tak celou jednu část zahodím (to vyjde na počet vrcholů, že můžu) a řeším obdobně jako se stěnou.



Každá vnitřní stěna má délku 5 nebo 6. Nechť mám vnitřní stěnu délky 7. Určitě tam jsou 2 vrcholy za sebou, co neleží na vnější stěně. Ale každý vrchol má na C nejvýše jednoho souseda, takže když mám jednoho se sousedem, tak vedle musí být nějaký, který na C není. Tak zidentifikuji vrchol uvnitř a objedno na C (obrázek). To už můžu opět převést (3 sousedy na hranici se uargumentují, že by už předtím musel mít 2, to nemáme, předbarvení – chorda nevznikne, jinak bych narazil na předchozí případ). Problém by mohl být s tím, že vznikne trojúhelník nebo čtyřcyklus. Kdyby to ale vznikalo, tak před identifikací uvnitř muselo něco žít, to jde smazat.

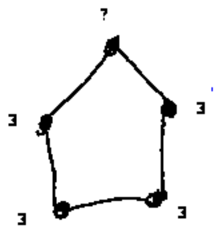


Každá vnitřní stěna má délku 5. Pro spor máme 6-stěnu. Obdobně, máme nějaké dva zasebou nepředbarvené. Ten 6-cyklus splácnu (obrázek).



Pokud je na vnější kružnici C vrchol stupně 2, potom je $|C| = 9$. Určitě nejsou dva vedle sebe (kvůli 5-cyklům). Tedy je to jako na obrázku. Kdybych ho utrhl a měl minule něco menšího, tak spor s minimálním protipříkladu.

Existuje vnitřní stěna existující následovně:



A ta je disjunktní s vnější stěnou. Sporem a dischargingem.

Nyní, stupňe dostanou $2\deg(v) - 6$ a stěnám $\deg - 6$. Vnější stěna dostane 10 navíc. To je -2 celkem.

Každý vrchol stupně alespoň 4 posílá každé sousední stěně .5 jednotky náboje. Vnější stěna posílá do každé s ní sousedící stěně pošle jednotku. Vnější stěna dá vrcholu stupně 2 dvě jednotky náboje.

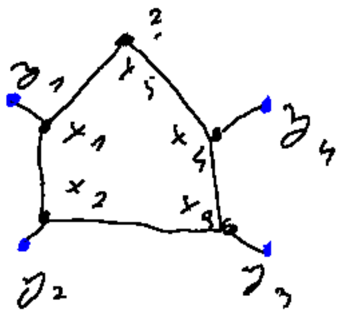
Všechno bude nezáporné. Vrchol pošle max tolik, kolik může (když je 2, tak dostane, posílá když je aspoň 4, a to vyjde nezáporně).

Všechny vnitřní stěny začnou na -1. Pokud sdílí s vnější, tak je v pohodě. Jinak kdyby neexistovala ta stěna, pak dostane alespoň 1 od vrcholů.

Vnější stěna posílá jednotku za každou sousední stěnu. Vrcholů stupně 2 je tam max. 4. Pokud má i stupeň 2, jedna dostane stěna (za obě hrany) a 2 do vrcholu. Celkem tedy $|C|+$ počet vrcholů délky 2, což je nejvýše $\deg + 4$.

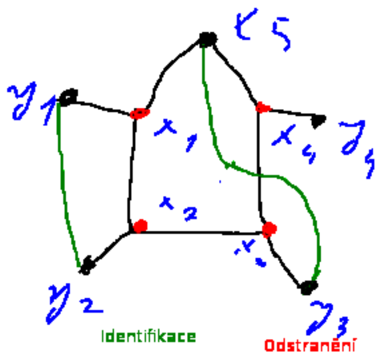
Tedy, minimální protipříklad má tu divnou stěnu.

Kdyby některý z těch vrcholů stupně 3 ležel na vnější stěně, tak by bývala musela být i hranově sousední s vnější stěnou (ta okolo toho vrcholu viděla 2 stěny). Tedy ve vnější stěně může být jen ten neznámý vrchol.



Kdyby všechny $y_1, \ldots, y_4$ ležely na vnější stěně, potom užeru ty stěny okolo, čímž jen zmenšuji vrcholy (mezi y_i a y_j musí vždy ležet alespoň jeden vrchol, jinak mám čtyřcykly). To pustím do menšího případu/indukce a hotovo.

Druhý případ je, že alespoň jeden z y_1, y_2 není na hranici (jinak překlopím dle svislé osy). Provedu identifikace a odstranění dle obrázku.



Nezidentifikuji nic na hranici. y_1, y_2 nejsou oba na hranici. x_5, y_3 nejsou na hranici, potom by něco nalevo nebo napravo od nich musela být stěna, ale to není.

Vrchol s třemi sousedy nevznikne, pak předtím musel mít dva sousedy, což už je zakázané. Kdyby nebyl původně sousedem, tak tak musel mít dva sousedy na hranici předtím.

Monochromatickou chordu nevytvořím proto, že jsme měli vnitřní stěny velikosti 5. To byly sousedi, proto nemohli mít ruznou barvu.

Nyní, když je obvod alespoň 5, tak zavolám menší případ, po rozidentifikaci mají barvy, nejsou sousední, a dobarvím (rozbor případů).

Když nám ale vznikne malý obvod, tak používá některý z těch zidentifikovaných vrcholů. Pak tam najdu něco jako $6-7$-cyklus, tak vyndám vnitřek, obarvím, vnořím se. Kdyby jeden používal oba, tak nesmí být „hned vedle“, potom ale najdu separující 5-cyklus, přes něj to opět jde rozebrat.

☻

Věta 13 (Grötzschova věta) *Každý rovinný graf bez trojúhelníků je 3-barevný.*

Důkaz:
Stačí dokázat, že tříbarevný je graf s obvodem alespoň 5. Díky Thomasenově větě bude minimální protipříklad 2-souvislý, se min. stupněm alespoň 3. Z toho vyjde, že má stěnu ≤ 5 (třeba přes discharging, pár drobných lemmat jako že nemám malé vrcholy, náboj bude $2d-6$ pro vrchol, $d-6$ pro stěnu, žádná pravidla – musím mít malou stěnu, aby vyšlo záporně), tu prohlásíme za vnější.

Když dostanu čtyřúhelník (stěnový), tak vezmu dva protější vrcholy a sjednotím je. To můžu udělat buď jedním, nebo druhým způsobem, když alespoň jedním způsobem nemám trojúhelník, tak pohoda, přes indukci. Pokud nemůžu ani jedním, tak mám mezi každou úhlopříčkou cestu délky dva, ty musejí mít společný vrchol, měl jsem trojúhelník už původně.

Jinak máme separující 4-cyklus. Nakreslíme do roviny, vezmeme takový 4-cyklus, který uvnitř nemá žádný jiný. Z grafu vyřízneme tento 4-cyklus, je to menší, není to protipříklad, obarvím a hotovo. Tím obarvím cyklus, podrozdělím jednu hranu a získám 5-cyklus.

☻

4 Silné barevné číslo

Graf je ***k-silně obarvitelný***, pokud $n = k \cdot r$, tak $\forall V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_r$ takové, že $|V_i| = |V_j|$ jde graf obarvit tak, že v každé množince je každá barva alespoň jednou.

Alternativně, $\forall H$ disjunktní sjednocení klik velikosti k $\chi(G \cup H) = k$.

Když k nedělí n, tak se tam přidají nějaké izolované vrcholy.

Tvrzení 3 *Pokud je to k-silně obarvitelné, pak je to také $(k+1)$-silně obarvitelné.*

Důkaz:
No, odeberu z každého poslední, tam mi zbude pro k, pak zbudou nějaké,

co nadělají zbylé množinky po k. Nemůžu ještě použít obarvení a přebarvit poslední na stejnou, mohou být hrany. Ale to, co má stejnou barvu v těch po k je nezávislé, můžu zopakovat s tím.

☻

Silné barevné číslo je takové nejmenší číslo, že je to silně obarvitelné.

Pozorování 6 *Silné chromatické číslo je více než Δ.*

Silné chromatické číslo stupně bude maximum přes všechny grafy s daným maximálním stupněm.

Je to alespoň dvojnásobek.

Udělám $2n$ vrcholů, kde $\Delta = n$, dosypu vrcholy, vrznu kliky na polovičky.

Pokud mám graf který je disjunktní sjednocení l párování, tak ho můžu obarvit pomocí 2^l barev.

To se dokáže indukcí. Pokud je to 0 párování, pak jsou to jen izolované vrcholy a jedna barva vesele stačí. Nyní, vezmeme v indukci poslední přidané párování. Odebereme ho, rozpůlíme všechny množinky libovolně na poloviny a obarvíme. Nyní si vezmeme pomocný graf. Hrana bude tam, kde je původní párování a také tam, kde jsou dvě stejné barvy ve stejné (velké) skupince. Toto, pokud má cykly, tak jedině sudé (tedy je to bipartitní graf), takže to jde obarvit dvěma barvama. Barvy z indukce a tyto barvy se pronásobí mezi sebou a je hotovo.

Věta 14 (Alon) *$\exists c; s\chi(d) \leq c \cdot d$.*

Důkaz:
Dokážeme pro $c = 2^{20001}$.

Budeme dělit na poloviny indukcí, ale tak, aby stupeň klesal na polovinu. Vybereme náhodné rozdělení.

Lemma 17 *Máme graf G, $\Delta(G) \leq D, V = V_1 \cup \ldots V_k$ takové, že $|V_i| = |V_j| = 2k$. Potom indukované podgrafy rozpůlení každé množiny mají maximální stupeň $\frac{\Delta}{2} + 2\sqrt{D \log D}$.*

Důkaz:
Použiju Lovásovo lokální lemma (mám špatné jevy, pravděpodobnost každého jevu je nejvýše nějaké P a každý jev závisí nejvýše na d jiných jevech, potom pravděpodobnost, že nenastane žádný z těch špatných jevů je nenulový). Za špatný jev dáme, že máme moc velký stupeň. Rozdělíme vrcholy do dvojic, rozhodíme z každé dvojice náhodně jeden do jedné skupiny, druhý do druhé.

☻

Budeme používat tento odhad tak dlouho, dokud nedojdeme k nějakým malým grafům, poté použijeme původní exponenciální odhad (tam už je chyba moc veliká).

☻

5 Zlomková barevnost

Máme parametry p, q. p je počet barev, q je, kolika barvami obarvíme každý vrchol (takže graf je obarvitelný, pokud si každý vrchol může vybrat q z p barev tak, že žádní dva sousedi nesdílejí žádnou ze svých barev). Ona barevnost je poté p/q.

Zcela očividně $\chi \leq \chi_f$, q může být 1.

Obdobně, $\chi_c \leq \chi_f$. Ta p a q v cirkulární barevnost určují podobný zlomek, ta čísla jdou přímo použít, jen to není dokola.

Lze vyjádřit jako lineární program:

Máme proměnné x_j, kde j jsou nezávislé množiny grafu a X_j udává počet barevnostních tříd v této množině dělený q. Tato X_j musí být nezáporná. A pro každý vrchol součet všech X_j, kde se nachází, musí být alespoň 1. Chceme minimalizovat součet X_j.

Věta 15 (Hatami, Zhu)

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists g \in \mathbb{N} \forall G \text{ kubické bez mostů o obvodu } \geq g; \chi_f(G) \leq \frac{8}{3} + \epsilon$$

Důkaz:
Půjdeme na to pravděpodobnostně. Napřed z grafu odebereme perfektní párování, zbudou nám kružnice. Pro každou kružnici náhodně vyberu první vrchol, poté každý $\frac{g}{2}$-tý vrchol vyhodím. Zbyly cestičky. Na každé cestičce obarvím každý vrchol červeně (náhodně zvolím, kde začnu).

Nyní vrátíme párování. Mohlo se nám stát, že spojuji dva červené vrcholy, v tom případě jeden z nich odbarvím. Červené vrcholy představují nezávislou množinu, spočítáme, jak velká je:

$$\left(1 - \frac{2}{g}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot (1 + \epsilon)$$

Lemma 18 *Graf má zlomkovou barevnost $k \Leftrightarrow$ má pravděpodobnostní distribuci takovou, že náhodná nezávislá množina bude mít střední velikost $\geq \frac{1}{k}$.*

Důkaz:
Na jednu stranu, mám barevnost, zvolím množinu j s pravděpodobností $\frac{x_j}{k}$.

Naopak, máme pravděpodobnosti množin a pravděpodobnosti, že vrchol leží v té množině a máme x_j. Z toho už to upočítáme.

☻

☻

Věta 16 *Kubické grafy bez mostů jsou hranově* 3*-vybíravé.*

Důkaz:
Použijeme Alon-Tarsiho. První co, najdeme orientaci takovou, aby vstupní stupeň byl 2. Stačí každý trojúhelníček, který vznikl kolem původního vrcholu zorientovat dokola, každý nový vrchol leží na dvou trojúhelníčku.

Nyní budu xorovat orientace s tou mojí. Pokud otočím právě jeden trojúhelníček, získám tím kamaráda, tedy takových je stejně. Obdobně, liché kružnice.

U sudých se to převádí sudý eulerovský na sudý eulerovský a naopak. Tam nám nějaké zbudou.

TODO: Tohle vypadá nedořešeně. Bylo tam něco o trojúhelníčku s nejnižším číslem vrcholu a podobně.

☻