

Vybrané grafy...

2. ledna 2013

1 Policajti (pracovní poznámky)

1.1 Problém

Máme interval-filament graf. To je takový, že máme intervaly a každý vrchol je funkce z toho intervalu, co končí oběma konci v 0 a vede nad osou. Takže něco takového:



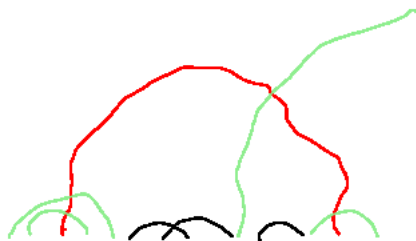
Mějme dále hru policajti-vs. lupič. Napřed někam rozmístíme sadu policistů, poté se někam umístí lupič (vše ve vrcholech). Poté střídavě táhnou – lupič se pohne na sousední vrchol nebo zůstane na místě. Poté policista (jeden ze sady) taktéž. Policisté vyhrajou, když se ocitne lupič na stejném políčku jako policista. Ptáme se, jestli existuje strategie, jak lupiče chytit na interval-filament grafu s konečným počtem policistů (tedy, že $\exists k \forall G \dots$).

1.2 Strategie pro 4 policajty

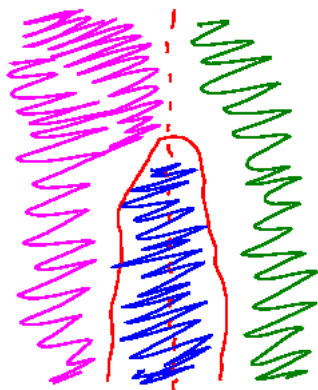
Veškeré zkoumání pozice lupiče děláme po tahu lupiče. Hru si rozdělíme na kroky, v každém obsadíme nějaký předem vybraný vrchol a tím omezíme lupiči životní prostor. Mezi kroky se některý policista „pěšky“ přesouvá z nějaké pozice na tu vybranou cílovou, zatímco ostatní policajti prostě jen sedí na jednom místě a brání tomu, aby lupič prošel.

Dále si všimneme, že pokud se kdykoliv lupič nachází na konci svého tahu na vrcholu sousedícím s policistou, tak prohrál, neboť policista jej ve svém tahu chytí. Budeme tedy předpokládat, že lupič takové tahy nedělá.

Máme-li tedy policistu, který sedí na červeném vrcholu, pak je rovina rozdělena na 2 oblasti – vnějšek a vnitřek. Mezi nimi se dá přecházet pouze buď přímo přes červený vrchol, nebo přes některý sousední, protože všechny zelené vrcholy se s ním protínají. Lupič nacházející se uvnitř tedy nemůže ven a naopak.



Obdobně, pokud si vybereme některou x -ovou souřadnici a nad ní zvolíme nejvýše položený vrchol, který může lupič používat a ten obsadíme, tak lupič uvízne buď pod tímto vrcholem (obdobně jako minulý obrázek), nebo vlevo, nebo vpravo od něj a v této oblasti již zůstane.



Budeme tedy mít 3 hranice – levou, pravou a horní. Někdy budou reprezentované policistou obsazeným vrcholem, někdy implicitně. Na začátku jsou všechny 3 implicitní a lupič může být v celém grafu.

Nyní v každém kroku vybereme nějaký bod x na ose, který je zároveň v životním prostoru lupiče a zároveň je nad ním alespoň jeden lupičem obyvatelný vrchol (takový musí existovat, minimálně všechny ty body nad kterými se nachází vrchol kde je lupič právě teď). Nad tímto bodem si vybereme nejvýše položený vrchol, kde může žít lupič. Na tento vrchol postupně nastěhujeme volného policistu (max. 3 nám drží hranice, takže jeden je volný).

Nastane jedna ze třech možností:

- Lupič se nachází pod nově obsazeným vrcholem. Nově obsazený vrchol prohlásíme za horní hranici, neboť lupič nemůže nad ni. Levou i pravou hranici nastavíme na implicitní (nemůže doleva a doprava mimo tento nový vrchol). Tím si uvolníme všechny 3 další policisty, pokud na některé z hranic hlídali. Všechny vrcholy, které sousedí s tímto novým vrcholem prohlásíme za neobyvatelné lupičem. V tomto případě se zjevně zmenšilo prostředí na výšku od minule, i do stran (protože kdyby se s levou/pravou hranicí křížil, celá hranice je neobyvatelná a pokud ne, tak hranice byly venku, jinak by v tom místě nebyla ta levá/pravá hranice nejvyšší, když jsme si ji vybrali).
- Lupič se nachází na levé straně od nově obsazeného vrcholu. Proto nově obsazený vrchol prohlásíme za pravou hranici, čímž jednak omezíme životní prostředí lupiče do stran, jednak si uvolníme starou pravou hranici, pokud existovala.