Jarní škola

2. ledna 2013

Obsah

1 Sparse graphs

O grafech s konstantní hustotou c, předpokládáme, že ji známe. Chceme reprezentaci (umí zjistit, jestli jsou sousední, přidávat/odebrávat hrany).

Bude žrát $O(m+n)$ paměti, $O(c)$ na operaci na zjištění, insert za $O(1)$, delete $O(c+\log n)$. Vše amortizované.

Dá se dokázat, že dá rozsekat na c částí hran, každá je vždy les.

Vezmeme kořeny tohoto, hrany ke kořeni – výstupní stupeň je vždy max. c. Ukládáme jen ten, který vybíhá ven (tedy, jen u jednoho).

Definujeme Δ-orientaci (více, než c), že to zorientujeme takto. Když má Δ-orientaci, tak $c \leq 2\Delta$.

Jak zjištění, tak delete je jednoduchý.

U insertu zkusíme vrazit do jednoho. Když se vejde, OK, když ne, otočíme všechny hrany ven, propagujeme. To opakujeme.

Tohle není o mnoho horší, než optimální. Představíme si optimální s $\delta \leq 2\Delta$ (tedy, má povoleno méně ven). Počítáme, kolik hran se liší od tohoto optimálního. Dokážeme, že reorientace sníží počet špatných.

Pokud máme vrchol s moc hranami, někde blízko je nějaký, který je menší (když budeme počítat, kam až se dostaneme po vrcholech, které mají alespoň maximum, tak za chvíli sežereme celý graf).

Existuje posloupnost, při které nejsou žádné reorientace při vkládání a max. $\log_{\frac{\delta}{c}|V|}$.

2 Rank width of random graphs

Ranky přes ranky matic sousednosti mezi dvěma částmi grafu. Bere se minimum přes všechny podstromy, z každého maximum přes odebranou hranu, čímž se to rozdělí na ty dvě části.

3 Treewidth reduction for separating problem

Chceme vytvářet nový graf s omezenou šířkou se zachováním nějakých vlastností.

Máme li $A, B, S \subseteq V(G)$. Potom S ***odděluje*** A od B právě když na každé cestě mezi A a B leží vrchol S.

Lemma 1 *Máme stromový rozklad grafu. Potom průnik dvou uzlů odděluje jejich zbytky od sebe. Oddělují i celé zbytky stromů.*

Vyvážený oddělovač nějaké podmnožiny vrcholů je S, který to dělí na komponenty a je uvnitř každé maximálně polovina.

Lemma 2 *Když je stromová šířka G nejvýše k, potom $\forall w \subseteq V(G)$ existuje vyvážený oddělovač o max $k+1$ vrcholech.*

Lemma 3 *Pokud je stromová šířka $> 3k$, potom existuje $w, |w| = 2k+1$, která nemá vyvážený oddělovač.*

Parametrizovaný problém je rozhodovací problém.

Fixed parameter tractable problém pokud existuje algoritmus, který umí rozhodnout kladně v čase $f(k) \cdot |X|^c$, kde k je parametr, X je vstup.

Věta 1 *Máme-li označkovaný graf a chceme ověřit nějakou monadickou vlastnost (je na to formule), potom je to linear time fixed tractable.*

Tohle lze rozšířit na grafy s omezenou stromovou šířkou.

3.1 Minimální stabilní s, t-řez

Dostaneme k, ptáme se, jestli je zde nezávislá množina této velikosti, co je odděluje. Tohle je fixed parameter tractable.

Torzo – když máme podmnožinu vrcholů C a spojíme je v novém grafu hranou, pokud v originálu byly spojeny cestou, která měla vrcholy jen venku z C (tedy, i přímo spojené hranou). Tohle zachovává separátory.

V fixed-parameter-tractable čase lze sestrojit graf, který zachovává všechny separátory velikosti nejvýše k a bude mít stromovou šířku max. k.

4 Hilbertův 3. problém

Jde nasekat polygon na kousíčky tak, aby šel přerovnat na jiný?

Věta 2 (Bolyai-Gerwien) *Tohle jde v $\mathbb{R}^2$ vždy, když mají stejný obsah.*

Lemma 4 *Vezmeme grupu G, pokud P, Q fundamentální regiony, potom P jde převést na Q.*

Prý to plyne z dláždění plochy jedním.

To použijeme tak, že natriangulujeme jeden, převedeme na rovnoběžník, ten na obdélník, obdélníky naskládáme na sebe a máme jeden velký obdélník. Ten druhý lze také.

Ne vždy to platí v $\mathbb{R}^3$, například pravidelný čtyřstěn není převoditelný na krychli.

P je šťastný, pokud $\exists c_i \in \mathbb{Q}^+ ; \sum_i c_i \gamma_i = \pi$.

Věta 3 (Brickardova podmínka) *Pokud je to nešťastné, není to kongruentní s krychlí.*

Důkaz:
Nejdou spojit vedle sebe, protože nejdou nařezat na to, aby daly π. Hodně technických rozborů případů.

☻

4.1 Algebraický přístup

Polytop je ***podobný sobě sama***, pokud lze převést na několik (menších) kopií sebe sama.

Věta 4 (Sydlerovo kritérium) *Polytop je zkrychlovatelný, pokud je podobně sobě sama.*

Dva zkrychlovatelné, tak jejich slepení je taky zkrychlovatelné.

Pokud $A \oplus B \cong C \oplus D \wedge B \cong D \Rightarrow A \cong C$.

Věta 5 *Tato kongruence má kontinuum tříd (i pokud se smí zvětšovat a zmenšovat).*

Přes ořezávání krychle.

Dláždění prostoru nazveme ***periodické***, pokud existují 3 nezávislé vektory, že to dláždění je invariant vůči těmto vektorům.

Pokud polytop dokáže vydláždit prostor periodicky, potom je zkrychlovatelný.

5 Speciální teorie relativity

Dají se dělat transformace časoprostoru. U světla má vycházet, že

$$(ct')^2 - X'^2 \quad = \quad 0 \Leftrightarrow (ct)^2 - X^2 = 0$$

Zatímco třeba zvukové vlny se deformují při pohybu zdroje, světelné ne.

5.1 Aditivní funkce

Chceme funkce, které $\forall x, y \in \mathbb{R}; g(x+y) = g(x) + g(y)$. Když přidáme ještě podmínku (např. $g(\pi) = 0$) a bude nenulová, potom to mít hustý graf – v každém čtverci v rovině se vyskytuje bod grafu.

Dá se indukcí dokázat, že $\forall q \in \mathbb{Q}; g(q \cdot x) = q \cdot g(x)$. Tedy, na racionálních násobcích π je nula, někde jinde je nenula, tam tvoří „děravou" přímku. Můžu pomocí racionálního násobku π posunout.

Na reálná čísla jde koukat jako na vektorový prostor nad racionálnímy čísly. Má nekonečnou dimenzi. Chceme najít takovou bázi, že každé reálné číslo má konečně mnoho nenulových koeficientů.

Když se vrátíme k fyzice, tak máme tu transformační funkci, která je aditivní. Z toho se odvodí, že $f(q \cdot x) = q \cdot f(x)$. Chceme, aby to byla spojitá funkce. To dohromady dává, že je to lineární funkce, tedy má matice $L^{4\times4}$, tedy $x' = L \cdot x$.

Z toho vyvodíme, že transformace je kvadratická forma.

6 Extremální $0 - 1$ matice

Máme matice s 0 a 1. Ptáme se, jestli má podmatici takovou, že má jedničky alespoň na nějakých předepsaných místech (může mít i jiné).

Chceme zjistit, kolik jedniček tam ještě jde přidat, aby nebyla.

Například tímto jdou reprezentovat bipartitní matice. Tohle je zakázaný podgraf.

Dá se tím počítat například počet hran v grafu, když tam není žádný ekvivalentní C_4, nebo počet jednotkových vzdáleností na konvexní množině bodů.

7 Zasažení všech maximálních klik pomocí stabilních nahnutých nezávislých transversál

Lemma 5 *Máme r-partitní graf, skládající se z $V_1, V_2, \ldots, V_r$.* ***Nezávislá transversála*** *je množina, která je nezávislá a z každé části V_i vezme jeden.*

Pokud má graf max. stupeň Δ a $|V_i| \geq 2\Delta$, potom nezávislá transversála existuje.

Lemma 6 *Nechť G je r-partitní graf s částmi $V_1, \ldots, V_r$ a $k \in \mathbb{N}$. Pokud každý vrchol z V_i má nejvýše $\min\{k, |V_i| - k\}$ sousedů mimo množiny V_i, pak existuje minimální transversála.*

Když tam vrzneme Δ jako k, tak z toho plyne to minulé.

Důkaz:

Lemma 7 *Nechť G je r-partitní graf s nezávislou transversálou v $G[V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1}]$. Dále $w \in V_r$ takové, že neexistuje transversála v G obsahující w, existuje totálně dominující množina v podgrafu G indukovaném partitami s neprázdným průnikem s Y taková, že $X \cup Y$, X, Y jsou nezávislé množiny, Y je částečná transversála (průnik s každou nejvýše 1) v $G[V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1}]$ a $w \in X$ a hrany z X do Y je sjednocení disjunktních hvězdiček.*

Totálně dominující množina *je taková, kde má každý vrchol souseda uvnitř (včetně jejích prvků).*

Důkaz:
Grafu $G[V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1}]$ budeme říkat G_0.

Na začátku $X_1 := \{w\}$, $R_1 :=$ nezávislá transversála v G_0 takové, že má minimální průnik s okolím w. $Y_1 :=$ průnik okolí w s R_1.

Pokud něco není dominované, nazveme ten vrchol w_2, pomocí něj definujeme $X_2 := \{w, w_2\}$, za R_2 nezávislou transversálu takovou, že to bude rozšíření okolí w a ze sousedů w_2 co nejméně. Potom definujeme $Y_2 := Y_1 \cup (R_2 \cup N(w_2))$ a dokážeme, že to naroste. Kdyby ne, tak dostaneme spor s volbou R_1.

Dále iterujeme.

Časem to musí narůst tak, že už nejde pokračovat, proto to musí být správné X a Y.

☻

Podle indukce předpokládejme, že prvních $r-1$ má transversálu. Aplikujeme pomocné lemma, dostaneme nějaké X, Y. Z nich dostaneme spor (moc velký stupeň). Tedy, takové w nemůže existovat a tedy musí existovat správná transversála.

☻

Věta 6 *Nechť G je graf. Velikost jeho největší kliky $\omega(G) > \frac{2}{3}(\Delta(G)+1)$. Potom existuje nezávislou množinu protínající každou kliku velikosti $\omega(G)$.*

Tohle je nejlepší možný odkaz, pěticyklus, každý vrchol vyměním za úplňák na k vrcholech, to prodrátuju. V tomto už nejde najít nezávislou množinu.

Důkaz:

Tvrzení 1 *Nechť $C_1, \ldots, C_m$ jsou kliky velikosti $\omega(G)$ v G. Na nich si udělám pomocný graf, spojím je hranou, pokud mají neprázdný průnik. Toto mi umožní rozdělit je na komponenty souvislosti na $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$.*

Věta 7 (Kostočka) *Pokud G je graf, o kterém platí $\omega(G) > \frac{2}{3}(\Delta(G)+1)$.*

$$\left|\bigcap_{C \in \mathcal{C}_i} C\right| \geq 2\omega(G) - (\Delta(G)+1)$$

Věta 8 (Hajnal)

$$\left|\bigcup_{C \in \mathcal{C}_i} C\right| + \left|\bigcap_{C \in \mathcal{C}_i} C\right| \geq 2\omega(G)$$

Pomocí průniků uděláme partity F_i, najdeme si nezávislou transversálu. Tím jsem zasáhl všechny velké kliky.

Za $k := \frac{1}{3}(\omega(G)+1)$.

Vezmeme vrchol v. Sousedů má maximálně k, to se poodčítá.

☻