Pravděpodobnost a matematická statistika

2. ledna 2013

1 Cíl

Zabývá se výsledky náhodných pokusů (házení různě-stranou kostkou, tahání barevných objektů z klobouku). Při velkých počtech opakování se výsledky stabilizují (např. při házení 2-strannou kostkou/mincí se to ustálí někde kolem 0.5:0.5). Některé pokusy se nestabilizují. Mluvíme o ***statistické stabilitě***.

Budeme zkoumat především diskrétní svět (množství možností je nejvýše spočetné), avšak v některé teorii se bude počítat spojitě (integrály a pod.).

Pravděpodobnostní prostor je dvojice (Ω, P), kde Ω je libovolná konečná nebo spočetná množina. Prvky $\omega_i \in \Omega$ jsou ***elementární jevy***. $P : \Omega \to \langle 0, 1\rangle$, $\sum_i P(\omega_i) = P(\Omega) = 1$ je ***jistý jev***.

Můžeme použít jinou strukturu, $(\Omega, a, P), \Omega \in \mathbb{R}_1$. $a \in \mathcal{P}(\Omega)$ a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou disjunktní podmnožiny Ω. Potom $P(a_i) \in \langle 0, 1\rangle, P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$. Dále platí, že $P(a_i \cup a_q) = P(a_i) + P(a_j) - P(a_i \cap a_j)$. Při sjednocení více jevů lze použít princip inkluze a exkluze.

2 Podmiňování a nezávislost jevů

Podmíněná pravděpodobnost je nějaké $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$. Smysl je takový, že nepracuje s pravděpodobností na celé množině Ω, ale omezí se na B (tedy se tváří, jako kdyby se nová Ω nastavila na B a cokoliv mimo se ignoruje).

Věta:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Důkaz:
Stačí vynásobit.

Základní věta jak si zjednodušit život:
`TODO: Prý rozmyslet, jak přepsat` $P(A \cap B \cap \ldots \cap N)$.

$A, B \subset \Omega$. Potom A ***nezávisí*** na B, pokud $P(A|B) = P(A)$. A a B jsou ***nezávislé***, pokud $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Myšlenka je taková, že A

je stejně „husté/časté/pravděpodobné“ v B jako v celém Ω – je rozložené homogenně uvnitř i venku.

3 Více jevů

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou jevy v Ω. Potom řekneme, že jsou ***vzájemně nezávislé***, jestliže:

$$\forall k \in 2..n; P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Jevy jsou ***nezávislé po*** $k \in 2..n$, jestliže:

$$\forall k\text{-tice } P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Bayesova věta:
Mějme prostor, $\Omega = \bigcup_i H_i, i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$.

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$$

4 Náhodné procházky

Opakované, nezávislé pokusy. Každý končí buď -1 nebo $+1$. Když jsem provedl pevný počet pokusů n, jaká je pravděpodobnost, že jsem alespoň jednou měl $+k$. Když jsem provedl neomezeně pokusů, jaká je pravděpodobnost, že dosáhnu alespoň $+k$ v n-té hře. Jak dlouho mi to průměrně bude trvat.

5 Náhodná veličina

Náhodná veličina je náhodné zobrazení z $X : (\Omega, A, P) \to (R_1, B_1)$. Poté se zajímám o jevy „X nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots$ (max. spočetná množina). Jev „nabývá x_i znamená, že jsem se trefil do $\{\omega, X(\omega) = x_i\}$. Tedy z toho vyplývá pravděpodobnost $p_i = P\{\ldots\}$.

Určitě platí, že $\sum_i p_i = 1$.

Rozdělení pravděpodobnosti v X rozumíme $\left\{ \begin{smallmatrix} x_i \\ p_i \end{smallmatrix} \right\}$ kde x_i jsou hodnoty, jenž mohou nabýt a p_i jsou odpovídající pravděpodobnosti.

Mějme rozdělení pravděpodobnosti X. ***Distribuční funkcí*** budeme rozumět reálnou funkci $F(x) = P(X \leq x)$.

- Tato funkce je neklesající.

- $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
- $$\lim_{x \to \infty} = 0$$
- $F(x)$ je zprava spojitá.

Střední hodnotou v X rozumíme

$$EX = \sum_{\omega} X(\omega) \cdot P(\omega) = \sum_{i} x_i \cdot p_i$$

Říká, k čemu se bude blížit průměrný výsledek pokusu při mnoha pokusech.

Náhodnou veličinu popisující čekání na první zdar nazveme ***geometrickou***.