# Toky a cykly v grafech

2. ledna 2013

## Obsah

Mějme $G$ orientovaný multigraf, $\Gamma$ abelovská (koumutativní) grupa.

Funkce $f : E(G) \to \Gamma$ se nazývá ***tok***, pokud splňuje kyrhofův zákon v každém vrcholu (tedy, co teče dovnitř, to teče i ven).

Konstantně nulová funkce je platný tok. Součet dvou toků je taky tok. Násobek taky. Množina toků je také grupa. Je to také vektorový prostor, pokud $\Gamma$ je těleso. Báse jsou základní cykly.

Máme graf $G$, grupu $\Gamma$, $f : E(G) \to \Gamma$ ***nikde nulový tok***, pokud $f$ je tok a $\forall e \in E(G); f(e) \neq 0$.

Mějme podmnožiny vrcholů $A, B$, potom $f(A, B)$ bude značit tok, který teče na hranách vedoucích z $A$ do $B$.

$f^+(v) = f(\{v\}, V)$, $f^-(v) = f(V, \{v\})$.

**Lemma 1** *$G, \Gamma, f$ jako výše. Potom nechť $U \subseteq V(G), \overline{U} = V(G) \setminus U$, potom $f(U, \overline{U}) = f(\overline{U}, U)$.*

Důkaz:
Z kyrhofova zákona platí, že $f^+(v) = f^-(v)$. Jednoduše stačí sečíst všechny $f^+$ a všechny $f^-$. Každá z těch hran se někam započítá, musí to sedět.

☻

**Důsledek 1** *Nechť $e$ je most v grafu $G$. Potom $f(e) = 0$.*

**Důsledek 2** *Pokud $G$ má mosty, nemá nenulové toky.*

**Důsledek 3** *Nechť $e, e'$ je 2-řez. Potom $f(e) + f(e') = 0$.*

**Pozorování 1** *Když otočím všechny hrany, tak zachovám to, že je to tok.*

**Pozorování 2** *Kdykoliv otočím jednu hranu, tak můžu jen otočit to, co teče, na záporné a mám hotovo.*

**Důsledek 4** *Toky lze zkoumat na neorientovaných multigrafech.*

**Věta 1 (Tutte)** *$\forall$ graf $G$ existuje polynom $P_G(x)$ takový, že $\forall$ grupy $\Gamma$ počet nenulových $\Gamma$-toků v $G$ je $P_G(|\Gamma| - 1)$.*

Tomuto $P_G$ se říká tokový polynom.

Důkaz:
Vezmeme podle počtu hran. Pokud nejsou žádné, potom existuje právě jeden (nenulový) tok.

Nechť tedy má nějaké hrany. Zafixujme si nějakou hranu $e$. Pokud je $e$ smyčka, máme $|\Gamma| - 1$ krát víc možností, než ve zbytku a nic se tím nemění. Pokud je most, pak počet nenulových toků je 0. Jinak zkusíme hranu zkontrahovat. Co bylo tok předtím, je i po kontrakci. Opačně to platí ale také, jen nesmí tahle být nulová. Odečteme ty, které tam tu hranu nemají (a nejsou zkontrahované).

☻

**Důsledek 5** *Počet/existence nenulových $\Gamma$-toků záleží na velikosti $\Gamma$.*

**Poznámka 1** *Tohle je vedlejší produkt tutteho polynomu, který tohle produkuje při správném dosazení jedné proměnné.*

**Věta 2** *Nechť $G$ je kubický multigraf. Potom $f$ je nenulový $\mathbb{Z}_2^2$-tok na $G \Leftrightarrow$ $f$ je dobré 3-obarvení hran $G$.*

Důkaz:
Určitě nemůžou mít stejnou (pak by na tu třetí nic nezbylo). Naopak, takle vždycky sedí kirhofův zákon.

☻

**Pozorování 3** *Mějme graf $G$ a $f$ je $\mathbb{Z}_2$-tok. $F$ je $\sup f := \{e \in E(G); f(e) \neq 0\}$. Potom $\deg_F v$ je sudý $\forall v \in V(G)$.*

**Důsledek 6** *Pokud má vrcholy lichého stupně, potom nemá nenulový $\mathbb{Z}_2$-tok.*

***Kružnice*** je souvislý 2-regulární graf (většinou neprázdné). ***Cyklus*** je graf (množina hran), kde jsou všechny stupně sudé.

**Důsledek 7** *V kubickém grafu s mosty neexistuje dobré hranové 3-obarvení.*

Definujeme $\varphi(G)$ jako minimální velikost grupy potřebnou pro to, aby existoval nenulový tok.

Budeme mít $k$-tok, pokud všechny velikosti hran jsou menší než $k$.

**Věta 3** *G má nenulový $\mathbb{Z}_k$ tok právě když má nenulový k-tok.*

Důkaz:
Z $k$ na $\mathbb{Z}_k$ je to jednoduché.

☻

**Důsledek 8** *Pokud máme nenulový tok v $\mathbb{Z}_k$, potom i v $\mathbb{Z}_{l,l>k}$.*

**Věta 4** *G má 4-tok právě tehdy, když existují množiny hran $E_1, E_2$ takové, že $E = E_1 \cap E_2$ a $E_i$ jsou cykly.*

**Věta 5** *Každý graf bez mostů má nenulový tok.*

Každá hrana je na kružnici, dá se to tedy někudy obejít.

**Věta 6 (Jaeger)** *Pro každý graf bez mostů existuje 8-tok.*

Důkaz:
Nechť $G$ je 3-souvislý. Zdvojíme hrany. To je 6-souvislé.

☻

Toky:

- 1-tok neexistuje.
- 2-tok právě na cyklech.
- 3-tok bipartitnost u kubických.
- 4-tok hranová 3-obarvitelnost u kubických, a existuje $\lambda \geq 4$, neobsahuje petersonův graf.
- 5-tok je otevřený.
- 6-tok existuje.
- 7-tok také.
- 8-tok existuje.

**Věta 7** *Máme orientovaný multigraf G a máme $0 < a \leq b$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *Existuje $\mathbb{Z}$-tok takový, že $a \leq f(e) \leq b$.*
- *Totéž, ale pro $\mathbb{R}$-tok.*
- $\forall U \subseteq V(G); \frac{a}{b} \leq \frac{\delta^+(U)}{\delta(U)} \leq \frac{b}{a}$.

Důkaz:
Z jedničky dvojka triviální, z dvojky trojka, dokáže se přes to, že každým řezem teče 0.

Z trojky jednička – budu konstruovat něco obecného.

☻

Cyklus je kolmý na všechny řezy.

Pokud dáme vrcholům potenciály, potom $\delta p$ je tenze. ***Tenze*** je zobrazení z hran do čísel takové, že součet po různých cestách je stejný.

U tenzí lze otáčet hrany podobně jako u toků.

**Věta 8** *$t$ je tenze $\Leftrightarrow$ $\exists p$ potenciál takové, že $t = \delta p$.*

Důkaz:
Na jednu stranu vidět, na druhou, jednomu dám 0, upravuju. Kdyby to nevycházelo, tak spor.

☻

**Věta 9** *Mějme prostor tenzí. To je ortogonální doplněk k prostoru toků.*

Prostor tenzí je generovaný je definovaný vrcholovými řezy – $+1$ na hranách z $u$, $-1$ na do do, 0 jinde. Prostor toků – můžeme je sčítat, násobit – máme lineární prostor. To je jádro matice incidence.

Prostor tenzí je obraz matice incidence, když ji transponujeme.

Toky v grafu $G$ odpovídají tenzím v duálu.

**Věta 10** *Nechť $G$ je graf vnořený v rovině. Právě když má nenulový $k$-tok, potom má stěnové obarvení $k$ barvami.*

Důkaz:
Na každé hraně něco teče, je tam nenulová tenze, je tam tedy jiný potenciál na těch stěnách. $k$ potenciálů musí stačit. A fungovat to musí i opačně.

☻

Tato věta na ostatních plochách nefunguje. Na projektivní rovině je to třeba peterson (duál je $K_6$). Na toru je to třeba mřížka $2 \times 3$. Neplatí občas orientovatelnost, neplatí občas to, že duál řezu je kružnice. Pro obecné plochy neplatí ani jeden směr.

Orientovatelné plochy: Pokud $G$ má stěnové $k$-obarvení, potom má $G$ nenulový $k$-tok (duál tenze je vždy tok), nevadí nám neorientovatelnost.

## 0.1 Cycle double cover conjecture

Každá hrana je obsažená právě ve dvou kružnicích.

**Věta 11** *Pokud je $G$ graf bez mostů, potom existuje množina kružnic taková, že každá hrana je právě ve dvou z nich.*

***Cirkulární vnoření*** grafu $G$ na plochu $S$ je takové, aby stěny vnoření byly homeomorfní s otevřeným kruhem a hranice stěn musejí být kružnice.

Jako ***cyklus*** bereme libovolný eulerovský podgraf.

**Poznámka 2** *Je hypotéza, že každý graf mez mostů má cirkulární vnoření na nějaké ploše.*

**Věta 12** *Graf má nenulový* $4$*-tok* $\Leftrightarrow$ $G$ *má dvojité pokrytí* $3$ *cykly* $\Leftrightarrow$ *má dvojité pokrytí* $4$ *cykly.*

Důkaz:
Když máme cykly $C_1, \dots, C_4$, tak vyrobíme $C_1 \oplus C_2$, $C_1 \oplus C_3$ a $C_1 \oplus C_4$. Nyní se rozebere, kde hrana byla a kde vyjde a dostaneme, že jsou zase 2.

☻

**Poznámka 3** *Je hypotéza, že každý graf bez mostů má porkytí* $5$ *cykly.*

**Poznámka 4** *Hypotéza o orientovaném pokrytí cykly: každý $G$ bez mostů má pokrytí hran orientovanými kružnicemi, tak, že každá hrana je pokryta v každém směru právě jednou.*

Pokud máme $k$-dvojité orientované pokrytí, potom je i $k$-nenulový tok. Opačně to platí pro $k = 2, 3, 4$.

**Tvrzení 1** *Pokud hypotéza o dvojitém pokrytí kružnicemi platí pro kubické grafy bez mostů, potom platí pro všechny grafy bez mostů.*

Grafy se dají nafukovat – každý vrchol se stupněm větším než 3 můžu nahradit kružnicí, nevytváří to mosty.

**Lemma 2** *O štěpení vrcholů Nechť $G$ je graf, $v \in V(G)$ a $F$ je množina hran incidentní s $v$. Potom graf $G_{[v,F]}$ je vzniklý odštěpení hran $F$ od vrcholu $v$ (vrchol se „rozpůlí“, ty půlky se nespojují, na jedné je to z $F$, na druhé ten zbytek).*

*$G$ bez mostů, souvislý. $deg(v) \geq 4$, $e_1, e_2, e_3$ incidentní s $v$. Potom nastává jedna z možností:*

- *$G_{[v,\{e_1,e_2\}]}$ je souvislý a bez mostů.*
- *$G_{[v,\{e_1,e3\}]}$ je souvislý a bez mostů.*
- *$e_1, e_2, e_3$ je hranový řez.*

Redukce na kubický graf potom probíhá tak, že eliminuji stupně velikosti alespoň 4. Pokud něco tvoří hranový 3-řez, tak z něj zvolím jen jednu, můžu štěpit. Poté zkontrahuji vrcholy stupně 2. Mám kubický graf bez mostů.

**Poznámka 5 (Berge-Fulkersonova hypotéza)** *Nechť $G$ je kubický graf bez mostů. Potom existuje* 6 *perfektních párování pokrývajících každou hranu právě dvakrát.*

**Poznámka 6 (Hypotéza)** *$\exists k$ hrany každého kubického grafu bez mostů se dají pokrýt $k$ perfektními párováními.*

**Tvrzení 2** *5 je ekvivalentní s tím, že každý graf bez mostů má* 4*-pokrytí* 6*-cykly.*

# 1 Polytop párování

***Párování*** je 1-regulární podgraf.

Máme vektory, jednička pro hranu, která tam je, nula, když není.

Polytop párování je konvexní obal všech takových vektorů, která jsou párováními. Určitě to obsahuje počátek (prázdná množina hran je párování).

Tento polytop lze popsat nerovnostmi, tedy $\sum_{e\in\delta(v)} \leq 1$, ale je potřeba mít to celočíselné. Nebo to lze zapsat tak, aby tam byl součet hran nejvýše polovina počtu vrcholů (zaokrouhleno dolů).

Perfektní párování má $\sum_{e\in\delta(v)} = 1$. Pokud rozepíšu:

$$\sum_{e\in\delta(X)} f(e) + 2\cdot \sum_{e\in E(X)} f(e) = \sum_{v\in X}\sum_{e\in\delta(v)} f(e) = |X|$$

Z toho plyne, že z liché podmnožiny vychází alespoň jedna hrana.

$r$-regulární graf $G$ se nazývá $r$-graf, pokud $\forall X \subseteq V(G), |X| = 2k+1; |\delta(X)| \geq r$.

***Uniformní pokrytí párováními*** znamená, že každá hrana je ve stejném počtu párování.

**Věta 13 (Edmonds)** *Když $G$ je $r$-graf $\Rightarrow \exists$ uniformní pokrytí $E(G)$ perfektními párováními.*

Důkaz:
Podíváme se na vektor $\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right)$. Tohle je uvnitř polytopu perfektních párování. Okolí každého vrcholu je rovna 1.

Z nějaké symetrie se dokáže, že se to potom nasčítá v každé položce na stejně.

☻

**Důsledek 9** *Kubický graf bez mostů má uniformní pokrytí perfektními párováními.*

**Důsledek 10** *Kubický graf bez mostů má perfektní párování, dokonce pro každou hranu existuje perfektní párování, které ji obsahuje.*

**Poznámka 7** *Je otevřený problém, jestli existuje* 6 *perfektních párování takových, jestli pokrývají každou hranu právě dvakrát.*

**Důsledek 11** *$G$ je kubický graf bez mostů, potom existuje perfektní párování, které neobsahuje* 3*-řez. Dokonce je uniformní pokrytí, které neobsahuje žádný* 3*-řez.*

Když máme kubický graf bez mostů, tak velikost jednoho perfektního párování je $\frac{m}{3}$. Chceme, aby $|p_1 \cap p_2| \geq c\cdot m$ (více, než $\frac{2}{3}$ nejde).

Máme uniformní pokrytí $Q_1, \ldots, Q_N$, každá je v jedné třetině z těchto párování, tedy lze udělat dvě párování taková, že dohromady mají $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$.

Můžeme to zkusit ale tak, že vezmeme jako základ vektor $(\alpha, \alpha, \alpha, \ldots, \beta, \beta, \beta, \beta, \beta, \beta, \ldots)$. Vždycky u vrcholu jedna $\alpha$ a dvě $\beta$.

Vezmeme párování z uniformního pokrytí. Z toho se už bude dát vytlouct pokrytí $\frac{3}{5}m$.

**Lemma 3 (Fleichner)** *Máme graf $G$ souvislý bez mostů, máme $v \in V(G); deg(v) \geq 4$, $e_0, e_1, e_2 \in \delta(v)$. Pokug $G[v : e_0e_1e_2]$ je souvislý, pak $G[v : e_0e_1]$ nebo $G[v : e_1e_2]$ je souvislý bez mostů.*

To $G[v : \{e\}]$ je graf, kde $v$ štípnu na dva, na jedné nechám hrany $\{e\}$ a na druhé ten zbytek.

**Poznámka 8 (Tutteova hypotéza)** *Každý graf bez mostů má 5-tok.*

Kdyby neplatila, tak si vezmeme minimální protipříklad (co do počtu vrcholů a hran) $G$.

$G$ nemá artikulaci. Dalo by se to rozstřihnout, každý menší má, pak by měl ale i celek.

Je 3-regulární. Stupeň není jedna (most) ani dva (nebyl by minimální, šel by zmenšit). Kdyby měl víc, tak jde použít Lemma 3. Potom můžu jednu kopii vrcholu (ta co má jen 2 hrany) zkontrahovat a je to zase menší.

Obdobně se dají převádět na 3-regulární grafy i jiné hypotézy.

$G$ je hranově 3-souvislý. Kdyby ne, tak má 2-řez, jednu hranu zkontrahuju, je menší, má tedy 5-tok, ale i původní by musel mít 5-tok.

Je hranově skoro-hranově-4-souvislý (okolo každého vrcholu je řez, ale jinak když nesousedí všechny 3 s jedním vrcholem, tak už je to OK).

Nemá kružnici kratší než 7.

# 2 Snarky

Graf $G$ je ***snark***, pokud je 3-regulární, není 3-barevný a je hranově 2-souvislý/3-souvislý/hranově 4-souvislý (obvykle se bere 2-souvislost).

Pokud je hranově 3-obarvitelný, potom má 4-tok a tedy i 5-tok.