Kombinatorický seminář

Michal Vaner

2. ledna 2013

1 Počítání permutací se zakázanými vzory

Martin Klazar

Permutace π - nějaká čísla $1, \dots, n$ ***obsahuje*** permutaci $\sigma = 1, 3, 2$, když se dá vzít graf té velké permutace a po promazání dostaneme stejný tvar, jako má graf té menší permutace. V posloupnosti najdeme podposloupnost, která je přeházená stejným způsobem.

$S_n(\sigma)$ je počet permutací délky n, které neobsahují permutaci σ.

$$C_n := S_n(1, 3, 2)$$

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1} C_{n-1-i}$$
$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Takto to vyjde stejně pro libovolnou jednu permutaci délky 3 (jsou to Catalanova čísla).

$$S_n(1, 3, 2, 4) = ??$$

Omezení počtu:

$$\forall \sigma \exists c; S_n(\sigma) < c^n$$

Dokonce lze nalézt to c přesně (tedy, $\lim_{n\to\infty} S_n(\sigma)^{\frac{1}{n}} = c < \infty$) pro libovolnou jednu zakázanou permutaci.

2 Aplikace lineární algebry v kombinatorice

Matoušek

2.1 Dláždění geometrických útvarů

Např, jestli jde nějaký obrazec rozřezat na konečně mnoho částí a udělat jiný.

Mějme obdélník $1 \times x, x \notin Q$, nelze ho vydláždit konečně mnoha čtverci (rovnoběžně položené).

Předpokládejme, že existuje dláždění, které používá čtevrce $q_1, q_2, \ldots, q_n$, se stranami $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Vezmeme vektorový prostor nad tělesem Q, který je lineární obal čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$ jakožto podprostor $\mathbb{R}$. Zvolme $f : V \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení tak, aby $f(1) = 1, f(x) = -1$.

Máme obdélník o stranách $a, b \in V$, a obdélník $v(R) := f(a) \times f(b)$.

Spor s tím, že ten obdélník je záporný, ale součet těch čtverců je záporný.

3 Randomizovaný algoritmus na hledání minimální kostry

D. Carger, F. Klein, R. Tarjan Předpokládejme, že neexistují osamocené vrcholy. Dále, váhy hran jsou všechny různé.

Cyklové pravidlo:
Nejdražší hrana cyklu v minimální kostře určité není.

Řezové pravidlo:
Nejlevnější hrana řezu v minimální kostře určitě je.

Vzorkovací lemma:
Označme $F(x, y)$ cestu z x do y. $w_F(x, y)$ – váha nejtěžší hrany v $F(x, y)$, nebo ∞, pokud taková cesta neexistuje. Hrana $\{x, y\}$ je ***F-těžká***, pokud je její váha větší než nejtěžší hrana dosud nalezené cesty z x do y. Naopak, hrana je ***F-lehká***, pokud není F-těžká.

Mějme graf $H \subset G$, který získáme vkládáním každé hrany $e \in E(G)$ nezávisle na ostatních s pravděpodobností p. Nechť F je minimální les H, potom pravděpodobný předpokládaný počet F-lehkých hran je $\frac{n}{p}$, kde n je počet vrcholů G.

Začneme s H i F prázdnými. Vezmeme nejlehčí hranu. Zkontrolujeme, jestli leží ve stejné komponentě F (F je zatím prázdné, proto neleží). S pravděpodobností

p ji tam dáme, jinak ji zahodíme. Pokud už spojuje stejné komponenty, tak ji nevkládáme, protože je F-těžká (to přijde jen do H).

Můžeme shora odhadnout počet hran v F velikostí kostry G. Počet hodů, jestli se hrana vloží do F lze odhadnout na $\frac{n}{p}$ a počet vložených hran je určitě nejvýše tolik.

Definujme ***Borůvkův krok*** jako jedno spuštění Borůvkova algoritmu na nějaký graf. Ten zkontrahuje počet vrcholů na nejvýše polovinu původních vrcholů grafu a zvládne to v lineárním čase.

3.1 Popis algoritmu

Je-li graf prázdný, vrať prázdný strom. Pokud je graf jediný vrchol, vrať jej jako jeho minimální kostru, jinak spusť $2\times$ Borůvkův krok na vstupní graf. Ve vzniklém grafu vyber podgraf H tak, že z něj odstraň s pravděpodobností 0.5 každou hranu a spusť se na H, čímž dostanu F, najdu F-těžké hrany a odstraním. Poté se spustím rekurzivně na zbytek a jeho minimální strom složím s kontrahovanými hranami z Borůvkova kroku, což vrátím.

Tedy vždy vezmu graf, zhruba polovinu ho zahodím, na zbytku najdu minimální kostru a zcela zruším hrany, které jsou F-těžké oproti této nalezené kostře.

4 Sčítání řad

Máme řadu $1^p + 2^p + \ldots + n^p$, což když sečneme, tak vyjde $a_{n+1} \cdot n^p + a_n \cdot n^{p-1} + \ldots + a_1 \cdot n + a_0$. Chceme zjistit tyto koeficienty. Uděláme si tabulku $p \times p$, sloupečky indexované od 0, řádky od 1. Zapisujeme odshora, vlevo nahoře je 1, v druhém řádku jsou na prvních 2 místech $\frac{1}{2}$. Kromě prvního sloupečku se počítají poté takto: podíváme se doleva nahoru, vynásobíme číslem řádku, vydělíme číslem sloupce. V prvním řádku doplním tak, aby součet řádku byl 1. Poté vezmu jako koeficienty první sloupec. $a_0 = 0$.

5 Rekonstrukční hypotéza

Místo grafu si pamatuju jen nějaký systém podgrafů. Je nějaký další graf, který má stejný systém podgrafů? Rekonstrukční hypotéza tvrdí, že ne, že je to jednoznační.

G_v je indukovaný podgraf grafu G na vrcholech $V(G) - v$. Balíček bude multimnožina všech takových G_v. Jednotlivé grafy jsou karty. H je rekonstrukce balíčku $B \Leftrightarrow$ Balíček grafu H je isomorfní balíčku danému. Rekonstrukční hypotéza tvrdí, že jediný graf, na kterém toto nefunguje je samostatná hrana.

Dá se dokázat pro nějakou třídu grafů, že je rekonstruovatelná. První věc je, jestli je graf rozpoznatelný (když dostanu balíček, zjistím, jestli je to z této třídy).

6 Hledání transversály lichých kružnic v grafu

Transversála je nějaká množina vrcholů taková, že to ostatní je bipartitní graf. Obecně je to těžké, tohle je „fixed parameter tractable“ – když budu hledat jen takové, které obsahují maximálně k vrcholů, tak to poběží v polynomiálním čase ve velikosti grafu, ale konstanta závisí na k.

Předpokládejme, že máme algoritmus, co z transversály o $k+1$ vrcholech vybere nějakou o k vrcholech. Vezmu graf o prvních $k+1$ vrcholech a prohlásím vše za transversálu, jeden vyhodím, přidám nový vrchol původního grafu, etc.

Složitější algoritmus

kopií transversály, uvnitř transversály si vyberu, která hrana to bude, aby nevedly vnitřkem.

Potom vezmu nějakou podmnožinu původní transversály (Y), to se zobrazí na Y' – to je dvakrát velké. To rozdělím na dvě části Y_a, Y_b tak, že každý vrchol má jednu kopii v Y_a a druhou v Y_b.

Lemma 1 *X je minimální transversála $\Leftrightarrow \forall Y \subseteq X; \forall Y_a, Y_b \exists |Y|$ vrcholově disjunktních cest z Y_a do Y_b v $G' \setminus (X \setminus Y)$.*

Důkaz:
Doleva sporem. Vezmu transversálu X a transversálu Z, $|Z| < |X|$. Zvolím $Y = X \setminus Z$. $G \setminus Z$ má dvě partity (S'_1, S'_2). Zvolím $Y_a = \{y_1 \in S'_1 \cap Y\} \cup \{y_2 \in S'_2 \cap Y'\}$.

$|Z \setminus X| < |Y|$. Chci dokázat, že $Z \setminus X$ odděluje.

Nakonec dokážu, že budu mít jednu cestu, která je zároveň lichá i sudá.

Doprava: X je minimální. $\exists Y1 = (Y_a, Y_b)$ tž W odděluje Y_a, Y_b, $|W| < |Y|$. Potom $G \setminus (X \setminus Y + W)$ je bipartitní. Dokážu stejně obarvit obě kopie a tedy můžu splácnout obě kopie do jednoho a mít je mimo transversálu.

☻

Vyzkouším tedy všechny možnosti, jak vybrat Y a rozdělit na Y_a, Y_b (jen 4^k možností). Potom pomocí toku najdu počet disjunktních cest, takže celý algoritmus zvládnu $O(4^k \cdot k \cdot |E| \cdot |V|)$.

Jednodušší algoritmus

Mám transversálu a nějakou konkurenční transversálu. Ta rozdělí původní na 3 části – společná, ta u jedné partity a ta u druhé partity. Původní vezmu a v půodních partitách si najdu sousedy nových transversálních „uší“.

Lemma 2 *Mám S, zvolím rozkouskování na „společnou“ část a ty dvě, co patří do jednotlivých partit. Umím dopočítat novou transversálu a partity. Jde to i opačně.*

Vyzkouším všechny rozklady na 3 množiny, zkusím, jestli se najde něco menšího.

Takže tohle běží v $O(3^k \cdot k \cdot |E| \cdot |V|)$.

7 Viditenostní grafy bodů v rovině

Viditelnostní graf je graf, jestli se navzájem body vidí. Nevidí se ty, které mají na úsečce mezi sebou jiný bod. Značíme $\mu(s)$.

Věta 1 $\forall G, V(G) = \{1, \ldots, n\}\,; \exists X \subseteq \mathbb{R}^2; \mu(X \cup \mathbb{Z}^2)$ *je isomorfní s G.*

Lemma 3 $\exists M \in \mathbb{N}$ *tak, že* $\exists$ *množina prvočísel* $P = \{p_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n\}$ *o které platí:*

- $2^M < p_{i,j} < 2^{M+1}$
- $$Q_k := 2^{n_k} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} p_{i,k} \prod j = k + 1^n p_{k,j}$$

  , kde $\lfloor \log Q_k \rfloor = 2^{nM+2k}$
- $p_{k,l}$ *je jediné z P, které dělí $Q_l - Q_k$.*