0.1 Řady, jejichž členy mění znaménko

0.1.1 Dirichetovo a abelovo kritérium

Máme $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{b_n\}$ je monotónní. Dále pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená a $\lim b_n = 0$.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * b_n$ konverguje.

$\forall j \in \{1, \ldots, n\}; a_1 + a_2 + \ldots + a_j \geq B \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots \geq B * b_1$. (Vyplývá z abelova lemma).

BÚNO $b_n \geq 0$ a nerostoucí. $\exists M > 0 \forall m \in \mathbb{N} \left|\sum_{n=1}^{m} a_n\right| \leq M$.

Z toho plyne: $n, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq 2M$ (Viz trojúhelníková nerovnost a odečtení těch dvou částí).

$-2M * b_{k+1} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \leq 2M * B_{k+1}$. (Viz abelovo lemma).

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leq 2M b_n + 1$.

Podle Bolzanovo-kosheovy podmínky: $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geq n_0 b_n < \frac{\epsilon}{2M}$.

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\right| \leq 2M b_{n+1} < 2M * \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$. Tedy řada konverguje.

Nebo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená.

BÚNO $\{b_n\}$ nerostoucí. Je omezená $\Rightarrow$ má limitu $b \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * (b_n - b)$ konverguje dle předchozího ($\lim\{b_n - b\} = 0$).

$\sum_{n=1}^{\infty} a) n * b$ konverguje.

Tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n (b_n - b) + a_n b)$ také konverguje. Tato je ale ta původní.

Inverzně: $\{a_n\}, \{b_n\}$, $\{b_n\}$ monotónní a $\lim b_n \neq 0$, pak $\sum_{n+1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje právě když $\sum_{n+1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\Leftarrow$ platí přímo z druhé verze předchozího.

Opačně: $b := \lim b_n$. BÚNO $b > 0 \Rightarrow \exists n_n \in \mathbb{N}; n \geq n_0 b_n > 0$. $\{\frac{1}{b_n}\}$ je monotónní a omezená. b_n se může zkrátit.

0.2 Přerovnávání řad

Když $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\{k_n\}$ je permutace přirozených čísel (každé číslo v tom je právě jednou). Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je přerovnání řady.

0.2.1 Přerovnání absolutně konvergentní řady

Pokud je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní, pak přerovnání této řady je také absolutně konvergentní.

Pro nezáporné:

$\forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq 0$. Řada je konvergentní. S_m je částečný součet původní řady a t_m té přerovnané. $\lim S_m = S \in \mathbb{R} \wedge \forall m \in \mathbb{N} S_m \leq S$.

$l := \max\{k_1, \ldots, k_m\} \Rightarrow t_m \leq S_l$. (Kvůli tomu, že je to nezáporné)

$\Rightarrow \{t_m\}$ je shora omezená číslem $\{S\}$ a je neklesající. Tedy existuje limita a je vlastní, která je $\leq S$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Protože původní řada je přerovnáním té přerovnané řady, platí to i opačně. Tedy se součty rovnají.

Pro libovolné:
$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_{k_n}| \in \mathbb{R}$ Tedy konverguje absolutně.

Pokud není konvergentní absolutně, pak $\forall A \in \mathbb{R}^* \exists \{k_n\}; \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = A$, navíc existuje přerovnání, které nemá součet.

1 Reálné funkce reálné proměnné

Obvykle se jí říká funkce. Myslí se jí $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$.

1.1 Spojitost a limity

Funkce f je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall B(a, b) : f(x) \in B(f(a), \epsilon)$. Je spojitá zleva, právě když $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall \, (a - \delta, a\rangle : f(x) \in B(f(a), \epsilon)$. Obdobně zprava.

Poznámka:
$B(x \in \mathbb{R}^*, \epsilon \in \mathbb{R}^+)$ je myšleno ϵ-ové okolí bodu x.

Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu v $A \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, \epsilon)$. Obdobně zleva a zprava, jen prstencová okolí jsou jen ,,poloviční“. Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak je limita vlastní, jinak je nevlastní.

Poznámka:
$P(x \in \mathbb{R}^*, \epsilon \in \mathbb{R}^+)$ je myšleno ϵ-ové prstencové okolí bodu x - bez vlastního bodu x.

Větička 1:
Nechť f je funkce.

- Funkce f je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow$ je spojitá zleva i zprava.
- $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = A$.
  Zleva doprava triviální—je to podmnožina—stačí, aby to platilo pro půlku.
  Opačně:
  $\exists \delta_1, \delta_2$ definující půlky okolí, pro která to platí. Pak vezmu to menší a prohlásím ho za δ, čímž získám celé prstencové okolí, pro které to také platí.
- f je spojitá v $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Stejně tak zprava a zleva pro poslední.

Věta 2 - Heine:
$a, A \in \mathbb{R}^*$ a f je definovaná na okolí $P(a, \delta)$, následující je ekvivalentní:

- $\lim_{x\to a} f(x) = A$
- $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \neq a, x_n \in D(f), \lim_{n\to\infty} x_n = a; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

- Nejdříve část, že když $\lim_{x\to a} f(x) = A$, tak ať si vymyslím jakoukoliv posloupnost, pro kterou platí, že $\forall x_n \neq a \wedge \lim x_n = a \wedge \forall x_n$. Rozepsáno:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in P(a,\delta); f(x) \in B(A,\epsilon$$
$$\forall \gamma \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \forall n > n_0, n \in \mathbb{N}; x_n \in B(a,\gamma) \wedge x_n \neq a \longrightarrow x_n \in P(a,\gamma)$$

  Nyní se toto spojí dohromady (když pro všechny, tak pro to δ existuje taky - to n_0):

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \exists n_0 \forall n > n_0, n \in \mathbb{N}; x_n \in P(a,\delta) \longrightarrow f(x_n) \in B(A,\epsilon)$$
$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \forall n > n_0, n \in \mathbb{N}; f(x_n) \in B(A,\epsilon) \longrightarrow \lim f(x_n) = A$$

- Obráceně, tedy když to platí pro všechny posloupnosti a tak dále. Použije se obměna, tedy že neplatí první tvrzení.

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \eta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in P(a,\eta); \overline{f(x) \in B(A,\epsilon)}$$

  Poznámka:
  $f(x)$ nemusí být definované. Ale v případě, že $\eta < \delta$, ve kterém je definovaná, pak ale lze psát, že $f(x) \notin B(A,\epsilon)$.

  Dokážeme, že neplatí druhé tvrzení tak, že najdeme posloupnost $\{x_n\}$, že $\lim x_n = a \wedge \lim f(x_n) \neq A$. Vezmeme tudíž ono "špatné"ϵ. Pak si vezmeme posloupnost η a z každého nějaké x. Tedy vezmeme $k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k} < \delta$. $\forall n \in N \exists x_n \in P(a, \frac{1}{k+n}); f(x_n) \notin B(A,\epsilon)$. Takové x_n určitě existuje (viz zápis negace na začátku) a ona posloupnost vše splňuje.

Druhá část Heineovy věty:
$a \in \mathbb{R}$ a f je definovaná na $B(a,\delta)$. Následující je ekvivalentní:

- Funkce f je spojitá.
- $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} x_n \in D(f), \lim x_n = a; \lim(x_n) = f(a)$.

Lze dokázat z minulého a ono $f(a)$ to nebude ničit.

Věta 3:
Každá funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^*, A = \lim f, B = \lim f, A < B$. Potom je mezi nimi kousek místa a pro poloměr okolí pod polovinu místa a hodnota se nemůže trefit do obou.

Poznámka:
Věty 2 a 3 lze použít k důkazu neexistence limity - ze 2 vypadnou dvě různá čísla.

Poznámka:
Lze použít k výpočtu limity posloupnosti za pomoci funkce.

Funkce f je ***(shora/zdola) omezená*** na množině M, jestliže $f(M)$ je (shora/zdola) omezená.

Věta 4:
Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu. $\longrightarrow \exists \delta\ f(x)$ je omezená na $P(a, \delta)$.

$\lim_{x \to a} f(x) = A \longrightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in P(a, \delta); f(x) \in B(A, 1) \longrightarrow$ je omezená na tomto okolí.

Důsledek:
U funkce spojité v a to platí i pro $B(a, \delta)$.

1.2 Počítání s limitami

Věta 5 - aritmetika limit:
Pokud mají dvě funkce v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limity A, B, pak je lze jednoduše sčítat násobit a dělit, je-li taková operace definovaná.

Viz papírek z přednášky.

Máme-li funkce f, g. ***Složenou funkcí*** nazveme $f(g(x))$ a značí se $f \circ g$.

Věta 9:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to c} g(x) = A \wedge \lim_{y \to A} f(y) = B \wedge \\
&(f \text{ je spojitá } \vee \exists \eta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in P(c, \eta); g(x) \neq A) \\
&\Rightarrow \lim_{x \to c} f\left(g\left(x\right)\right) = B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\epsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ libovolné } \exists \eta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in P(A, \eta); f(y) \in B(B, \epsilon) \longrightarrow \\
&\exists \theta; x \in P(c, \theta); g(x) \in N(A, \eta)
\end{aligned}
$$

Pro sloučení by bylo potřeba prstencové okolí. Pokud je f spojitá, pak jí vyhovuje i obvykle okolí.

Pokud g nevrací A, pak tam lze dát prstencové okolí.

Věta 10 - o limitě monotónní funkce:
Budiž f monotónní na $(a, b), a, b \in \mathbb{R}^*$. Potom existují $\lim_{x \to a+} f(x)$ a $\lim x \to b- f(x)$.

BÚNO f je neklesající. Tedy,

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1, y_1 \in (a, b); x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \\
&d = b - a \longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; f\left(b - \frac{d}{n}\right) \leq f\left(b - \frac{d}{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Funkce je buď omezená shora, pak má suprememum $S \in \mathbb{R}$. Toto supremum bude limita zleva v bodě b. Pokud toto supremum je maximum, pak od bodu, kde je funkce rovna tomuto supremu nemůže klesnout a tudíž je stále rovná tomuto supremu. Pokud není, pak $\forall x \in (a,b) \exists x_+ \in (a,b); f(x_+) \in (f(x), S)$ - jinak by to supremum bylo menší. A od tohoto x_+ všechny funkční hodnoty budou větší nebo rovny. Tudíž, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \forall x \in (b - \delta, b); f(x) \geq S - \epsilon \wedge f(x) < S$.

Pokud funkce není omezená, pak je její limita ∞, protože $\forall x \exists x_+, f(x) < f(x_+)$ a protože je rostoucí, tak $x_+ > x$.

Věta 11 Bolzano-Caucheova podmínka:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\
&\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x_1, x_2 \in P(a, \delta); |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \\
&\longrightarrow y = \frac{f(x_1), f(x_2)}{2} \\
&\longrightarrow f(x_1) \in B(y, \frac{\epsilon}{2})
\end{aligned}$$

1.3 Funkce spojité na intervalu

Nechť J je nedegenerovaný interval. Funkce $f : J \to R$ je spojitá, je-li spojitá zprava v každém bodě, který není koncovým bodem intervalu J a spojitá zleva v každém bodě kromě počátečního bodu intervalu J.

Věta 12 Heineho věta pro pro spojitost na intervalu:
Obdobné jako u funkcí.

Věta 14 Darbouxova o nabývání mezihodnot:
f je spojitá na $\langle a, b \rangle \wedge f(a) < f(b) \Rightarrow \forall c \in (f(a), (b)) \exists x \in (a, b); f(x) = c$.

$x = \inf \{y \in \langle a, b \rangle, f(y) > c\}, f(x) = c$

$\langle a, b \rangle$ obsahuje své infimum (je to a), tudíž neprázdná podmnožina musí mít infimum také v tomto intervalu.

Pokud to neplatí, pak buď $f(x) < c$ a funkce není spojitá zprava v bodě x, nebo $f(x) > c$ - je v té množině, pak ale existuje $\epsilon = \frac{f(x)-c}{2} > 0$ a funkce není spojitá zleva v bodě x.

Věta 16:
f spojitá na $\langle a, b \rangle \Rightarrow f(x)$ omezená na $\langle a, b \rangle$.

Věta 17:
f spojitá nabývá na $\langle a, b \rangle$ svého maxima i minima. Viz minimum je omezená shora $\longrightarrow$ má supremum. $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, f(x_n) > S(f(x_n)) - \frac{1}{n} \longrightarrow$
$S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S$. Z věty o policajtech $f(x_n)$ konverguje k S. Z bolsanostraserovy věty existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$, žé je v intervalu. Když x_n jde k nějakému $x \in \langle a, b \rangle$, pak $\lim f(x_{n_k}) = f(x), \lim f(x_n) = S \Rightarrow f(x) = S$. S je tudíž maximum.

Věta 18, spojitost inverzní funkce:
J je interval a f je spojitá a rostoucí na J. Pak f^{-1} je spojitá a rostoucí na na intervalu $f(J)$.

Obdobně s klesající.

Je rostoucí $\longrightarrow$ je prostá, tudíž f^{-1} je definovaná.

Je spojitá $\longrightarrow$ $f(J)$ je také interval (viz věta 15).

Když je spojitá a prostá, pak musí být buď rostoucí nebo klesající.

Inverzní je také prostá.

Spojitá - vezmu x není koncový bod $f(J)$. Pak dokážu, že je spojitá zprava.

2 Elementární funkce

2.1 Logaritmus

- $D(f) = \mathbb{R}^+$
- Je rostoucí
- $\ln a * b = \ln a + \ln b$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Věta 19:
Existuje jediná funkce, která splňuje tyto vlastnosti a nazývá se přirozeným logaritmem. Bude dokázáno na konci semestru.

Poznámka:
To, že je rostoucí plyne z ostatních vlastností, je ale třeba mít derivace.
Vlastnost 9: ln **je spojitá na** $\mathbb{R}^+$:

Je spojitá v bodě 1 - z vlastnosti 4. (Limita v 1 se rovná logaritmu v 1).

x_0 libovolné. $\lim_{x\to x_0} \ln x$ - převedu na předchozí příklad tím, že rozšířím x_0.

Vlastnost 10: Obor hodnot je celé $\mathbb{R}$:
Z 9 plyne, že je spojitá $\longrightarrow$ obor hodnot je interval. Obor hodnot je neomezený shora i zdola. Proto je interval celé $\mathbb{R}$.

Vlastnost 11: Existuje vždy právě 1 **číslo** x **pro které se zobrazí samo na sebe**:
Obor hodnot je celé $\mathbb{R}$ a je to prosté (je rostoucí). A toto číslo se nazývá e.

2.2 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce exp je funkce inverzní k ln.

Definiční hodnot je $\mathbb{R}$ a obor hodnot je interval $(0, \infty)$.

Když $a > 0 \wedge b \in \mathbb{R}$, pak $\ln b * a^b =$. Když $a, b > 0, a \neq 1 \log_b a = \frac{\ln b}{\ln a}$.

Causiova věta o střední hodnotě:
Předpoklady:

- $a < b$
- f, φ jsoe spojité na $\langle a, b\rangle$
- f má derivaci v každém bodě (a, b)
- φ má vlastní nenulovou derivaci v (a, b)

Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$; $\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

Z rollovy věty plyne, že $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ - byla by spojitá, měla by někde derivaci nulu (zlomek má smysl). Definujumu se pomocnou funkci $g(k) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a))$. $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)} - \varphi(b)\varphi(x)$. $g(a) = f(a), g(b) = f(a)$. g splňujo předpoklady rollovy věty, $\longrightarrow \exists\xi f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi(x) = 0$.

Vztah znaménka derivace a monotonie na intervalu:
J je interval, f spojitá na J, f' vlastní či nevlastní pro každý vnitřní bod intervalu.

- $f'(x) > 0 \forall k \in J \Rightarrow$ rostoucí
- $f'(x) \geq 0 \forall k \in J \Leftrightarrow$ neklesající
- $f'(x) \leq 0 \forall k \in J \Leftrightarrow$ nenerostoucí
- $f'(x) < 0 \forall k \in J \Rightarrow$ klesající

Nechť $f'(x) > 0 \forall x \in J$. Vezměme $a, b \in J, a < b$. f splňuje předpoklady L'Grangeovy věty pro $(a, b) \longrightarrow \exists\xi \in (a, b); f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \longrightarrow f'(\xi) > 0, b - a > 0 \longrightarrow f(b) - f(a) > 0 \longrightarrow f(b) > f(a)$. Tedy je rostoucí.

Opačně: neklesající na intervalu (a, b), $f'(x)$ existuje všude $\longrightarrow$ derivace je nezáporná. f neklesající, $f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ - podle toho, jestli je $x > y$ oboje nekladné, nebo oboje nezáporné, $x \neq y$ - prstencové okolí.

Poznámka:
Rostoucí funkce může mít občas derivaci rovnou nule (např x^3 v 0).

Poznámka:
Na otevřeném intervalu není třeba spojitost, ale je těžší ji dokázat.

Důsledek:
$f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ konstantní na (a, b). Je spojitá - v každém bodě má derivaci (vlastní). Je neklesající a nerostoucí zároveň.

Věta 12:
f je spojitá zprava v bodě a a existuje $\lim x \to af'$ zprava. Potom existuje $f'(a)$ a rovná se té limitě.

Označme L tu limitu. Existuje nějaké pravé okolí δ bodu a a kde je limita vlastní. Pak f je spojitá na $(a, a+\delta)$. Tedy je spojitá na $\langle a, a+\delta)$. Vezměme $x \in \langle a, a+\delta)$. Pak f splňuje předpoklady L'Grangeovy věty na intervalu $\langle a, x\rangle \longrightarrow \exists \xi_x \in \langle a, x\rangle\,; f'(\xi_x) = \frac{f(a-x)}{x-a}$. Použije se věta o limitě složené funkce. $\forall x \in (a, a+\delta); \xi_x \in (a, a+\delta)$. ξ_x je funkce, $\lim_{x\to a} \xi_x = a$ - věta o policajtech. $\forall x \in (a, a+\delta), \xi_x > a$. $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Tedy složením bude také L.

Obdobně zleva, složením se získá oboustraná.

Důsledek:
arcsin má zleva v 1 a zprava v -1 limitu ∞. $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, proto funguje na celém intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Poznámka:
Neplatí např. pro signum - není spojitá.

L'Hospitalovo pravidlo:
Nechť f, g mají na prstencovém okolí a vlastní derivace a $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \vee \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$. Pak limita je rovna podílu derivací.

Nechť platí obě nuly a a je reálné, limita zprava $L = \lim \frac{f(x)}{g(x)}$. BÚNO $f(a) = g(a) = 0$ Dále máme derivace a nejsou nuly. Když $x \in \langle a, a+\delta)$, pak f, g splňují předpoklady cauchiovy věty. $\exists \xi_x \in \langle a, a+\delta)\,; \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)-f(\xi_x)}{g(x)-g(\xi_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Podobně pro limitu zleva, tedy i pro oboustrannou limitu. Tím je dokázán případ 1 pro $a \in \mathbb{R}$.

Pro $a = \infty$. $\lim_{x\to\infty} = \lim_{x\to\infty} = 0$. Převedeme na 0, použije se $\tilde{f}(x) = f(\frac{1}{x}$, obdobně pro g. Protože jseou definované kolem okolí, jsou definované pro okolí 0 zprava. Za použití složené funkce, vyhýbá se limitě, převede se na minulý případ. Po zderivování se všechna $\frac{1}{x^2}$ zkrátí.

$\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty, \lim x \to a+ \frac{f'(x)}{g'(x)} = k, a \in \mathbb{R}$. Nelze použít větu o střední hodnotě (neboť není spojitá). $\exists \Delta \in \mathbb{R}^+, x \in (a, a+\Delta) \exists$ vlastní $f'(x), g'(x), g'(x) \neq 0, g(x) \neq 0$. Budu se pohybovat v takovém intervalu, vezmu si v něm dva body $x, x1$ a na intervalu $\langle x, x_1\rangle$ už se dá použít cachionva věta. Upraví se a dostane $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}$. Když $\epsilon > 0$, pak existuje $\eta > 0$, že pro $t \in (a, a+\eta)$ je $\frac{f'(t)}{g'(t)} \in B(k, \eta)$ a zvolím $x_1 \in (a, a+\eta)$. Pak $\forall x \in (a, x1); \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in B(k, \eta)$ Pak když $g(x)$ jde k nekonečnu, x_1 je fixované a pak ty podíly jsou skoro 0, takže se dají zanedbat.

2.2.1 Konvexní a konkávní funkce

I je interval a f definovaná na I. f je na I ***konkávní***, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I \forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle\,; f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. Je ***ryze konkávní*** pokud s $(0, 1)$ a $<$ a různé x_1, X_2.

Konvexní a ***ryze konvexní*** obdobně, jen naopak.

V podstatě to říká, jestli je funkce “propadlá” a nebo “vypouklá”. Říká, jestli množina nad grafem je konvexní nebo konkávní.

Poznámka:
f je konvexní právě když $-f$ je konkávní, s ryze též. **Větička 14**:

Následující tvrzení jsou ekvivalentní, pokud je definovaná na I.

- f je na I konvexní.
- $$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x2 - x1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$
- $$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x2 - x1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Nejdříve, že druhé je ekvivalentní s třetí. Ty dvě nerovnosti jseu přímo ekvivalentní.

Z jedničky plyne trojka:
f je konvexní, vezmeme ta 3 x. $x_2 = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}x_1 + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}x_3$. $\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ označíme λ. Podle definice: $f(x_2) \leq \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3) + \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)$ To se po úpravách z toho dostane.

Nechť platí 2. Vezmu $x_1, X_2 \in I, \lambda \in \langle 0, 1\rangle$. BÚNO $x_1 \leq x_2$. Pokud $x_1 = x_2 \vee \lambda \in \{0, 1\}$ pak platí rovnost. Nechť je to tedy něco rozumného mezi. $x_1 < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < x_2$. Použiji tyhle čísla do nerovnosti v dvojce. Stačí několik úprav a vyjde to.

U konkávních, ryze konkávní/konvexní to platí analogicky.

Důsledek:
Nechť f je konvexní na (a, b) a $x \in (a, b)$. Pak $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ je na (x, b) neklesající, plyne z bodu 2.

Navíc $\forall y \in (x, b); \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ - viz bod 3. Protože je neklesající a omezená ;dola. Tudíž má limitu zprava. Tudíž ta původní má derivaci zprava v bodě x.

Analogicky zleva.

Tudíž pro každé $x \in (a, b) \exists f'_-(x), f'(x)_+$, tudíž je spojitá.

Důsledek:
Jednostrané derivace jsou neklesající na (a, b). $\forall x \in (a, b); f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

Věta 15:
I je otevřený interval a f má v každém bodě $x \in I$ vlastní derivaci. Pak f je konvexní na I právě když $f'(I)$ je neklesající. Je ryze konvexní, právě když $f'(I)$ je rostoucí.

Důkaz zprava doleva:
$f'(I)$ neklesající. Vezmu $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$. f splňuje předpoklady lagrangeovy věty na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle$. $\exists \xi_1 \in \langle x_1, x_2\rangle\ f(\xi_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \wedge \exists \xi_2 \in \langle x_2, x_3\rangle\ f(\xi_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Tedy dekázáno, viz věta 14.

Důkaz zleva:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2)$. Viz důsledek věty 14.

Protože derivace přiřadí kadému bodu nějaké číslo, lze na ni nahlížet také jako na funkci. Proto ji lze opět zderivovat. Takto vzniká ***druhá derivace***, případně ***n-tá derivace***.

Věta 16:
I je otevřený interval a druhá druhá derivace vlastní existuje v každém bodě intervalu. Pak f je konvexní na $I \Leftrightarrow f''(I) \ge 0$. Plyne ze zkombinování předchozích vět.

Pokud je $f''(I) > 0 \Rightarrow f$ je ryze konvexní.

Inflexní bod je bod, kde v tom bodě existuje vlastní derivace a $\exists \delta \in \mathbb{R}^+; \forall x \in (a-\delta, a)$ je funkce pod tečnou a $\forall x \in (a, a+\delta)$ je nad tečnou, nebo naopak.

Věta 17:
$\exists f''(x) \ne 0 \Rightarrow x$ není inflexní bod.

Věta 18:
f' je spojitá na $(a,b), z \in (a,b), f''(x \in (a,z)) > 0, f''(x \in (z,b)) < 0$ pak z je inflexní bod.

$h(x) = f(x) - f(z) - f'(z) * (x-z)$ (Funkce - tečna). $h(z) = 0$. Na nějakém okolí je $h'(z) = f'(x) - f'(z)$.

Ve větě 17: existuje druhá derivace, takže musí existovat spojitá první derivace. Ve větě 18 je to přímo předpoklad.

Nechť druhá derivace v z je BÚNO kladná. $\exists \eta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in (z-\eta, z); f'(x) < f'(z) \wedge \forall x(z, z+\eta); f'(x) > f'(z)$. Tedy nalevo je $h'(x) > 0$, napravo$h'(x) < 0$. h je tedy klesající na levo a rostoucí napravo. Tedy $h(x) > 0, x \in (z-\eta, z+\eta)\backslash x$. Tedy na obou stranách je nad tečnou, tedy z definice není inflexní bod.

Ve větě 18 se použije stejná funkce. $f''((a,z)) > 0, f''((z,b)) < 0$. První derivace je spojitá na (a,b). První derivace je rostoucí na (a,z) a klesající na (z,b).

$f'(z)$ je ostré maximum. h je klesající nalevo i napravo. $h((a,z)) < 0, h((z,b)) > 0, h(z) = 0$. Tedy z je inflexní bod.

2.3 Taylarův polynom

Mám funkci f. Když f má v a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom $T_n^a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se nazývá ***Taylerův polynom n-tého řádu f v bodě a***.

T_n^a je polynom stupně nejvýše n.

$$\begin{aligned} T_n^a(a) &= f(a) \\ (T_n^a)'(a) &= f'(a) \\ (T_n^a)''(a) &= f''(a) \\ &\vdots \end{aligned}$$

T_1^a je tečnou funkce f v bodě $(a, f(a))$.

Taylarův polynom je zobecnění tečny, nahrazení jednodušším výrazem s malou chybou.

Věta 20:
Nechť f má v bodě a vlastní n-tou derivaci a P je polynom nejvýše n-tého stupně. Pak P je Taylerův polynom $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Důkaz:
f má na nějakém okolí bodu a vlastní derivace až řádu n. Derivace až do $f^{(n-1)}$ je spojitá v a. L'hospitalovo pravidlo (tolikrát, aby to zabralo, je to $\frac{0}{0}$). Tedy to je

$$\lim_{x \to n} \frac{f^{(n-1)(x) - (T_n^a)^{(n-1)}}}{n!(x-a)}$$

Dále již nemůžu, v bodě x nemusí existovat n-tá derivace.

$$\lim_{x \to n} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left(f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)\right)}{n!(x-a)}$$

Po přerovnání jsou tam dvě n-té derivace co se odečtou, tudíž je to nula.

Nechť P je polynom nejvýše stupně n a ona lim je 0.

Derivace až do $n-1$-té jsou spojité. Tedy

$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$

Podle věty aritmetiky limit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^a(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{P(x) - T_n^a(x)}{x-a)^n} = 0$$

Čitatel musí jít k nule, postupným krácením se to vyjádří.

Důsledek:
Když $\exists$ vlastní n-thá derivace v $a \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, funkce ω devarfinovaná na $B(a, \delta)$ splňující:

- ω je spojitá v bodě $w(a) = 0$

- $f(x) = T_n^a(x) + \omega(x)(x-a)^n$ na $B(a,\delta)$

  Nazývá se ***Peanův tvar zbytku***.

Věta 21:
$a < x$ a f má vlastní $(n+1)$-tou derivaci v každém bodě intervalu $\langle a, k\rangle$ a φ je spojitá funkce na $\langle a, x\rangle$ a má vlastní derivaci na (a, x). $\Rightarrow \exists\xi \in (a, x)$

$$f(x) - T_n^a(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} * \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)$$

Důkaz:
První až n-tá derivace jsou spojité. Položme

$$\begin{aligned}
&F(t) = T_n^t(x) = f(t) + f'(t)(x-t)\dots \\
&F(a) = T_n^a(t) \\
&F(x) = f(x) \\
&F'(t) = f'(t) + f''(t)(x-t) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \\
&\Big(f'(t) + f''(t)(x-t)\dots + f^{(n)}(t)x - t(x-t)^{n-1}\Big) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n
\end{aligned}$$

Tedy je splněna Caychyova věta$\Rightarrow$ $\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(x)}$ $\Rightarrow$ ten vzoreček.
Důsledek:
Pro speciální volby φ Cauchyův tvar zbytku $f(x) - T_n^a(x) = \frac{(x-\xi)^n(x-a)}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ — podobné dalšímu členu toho polynomu.

Pokud má f v bodě a derivace všech řádů, pak ***Taylerova řada*** je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n$$

.

Větička 22:
Nechť $x > a$ a f má v každém bodě intervalu (a, x) derivace všech řádů. Navíc existuje $c \in \mathbb{R}$ že pro každé $t \in (a, x)$ a každé $n \in N$ je $\left|f^{(n)}(t)\right| \le c$. Potom f je v bodě x rovna součtu Taylorovy řady o středu a. **Věta 23**:

Taylerův polynom k-tého řádu v bodě 0 je roven:

- e^x

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$$

- $\sin x$ ($2k$-tého řádu).

$$1 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

- $\cos x$ ($(2k+1)$-tého řádu).

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

- $\log(1+x)$.

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

- $(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\\0\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\alpha\\1\end{array}\right) x + \ldots + \left(\begin{array}{c}\alpha\\k\end{array}\right) x^k$$

Místo důkazu stačí spočítat.
Obdobně pro řady - rovnají se té řadě na celém $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in (-1,1\rangle\,; \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\forall x \in (-1,1); (1+x)^{=}\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\k\end{array}\right) x^k$$

Důkaz 1. 3 podle věty 22.
Lze použít pro výpočty limit.

3 Primitivní funkce

Neboli neurčitý integrál.

Funkce f je definovaná na otevřeném intervalu I. Řekneme, že F je ***primitivní funkcí k*** f ***na*** I, jestliže $\forall x \in I; \exists F'(x) \wedge F'(x) = f(x)$.

Věta 1:
Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f. $\exists c \in \mathbb{R} F(x) = G(x) + c$.

$$\begin{aligned} H(x) &= G(x) - F(x) \\ H'(x) &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tedy H je konstantní.
Množina všech primitivních funkcí se značí

$$\int f(x)dx = F(X) + C, x \in I, C = \{y = c, c \in \mathbb{R}\}$$

a říká se tomu ***neurčitý integrál***.

Věta 3:
F je primitivní k f a G je primitivní k g na I, pak $\alpha F + \beta G$ je primitivní k $\alpha f + \beta g$. Důkaz přes aritmetiku derivací.

Věta 4:
f je spojitá na otevřeném $I \Rightarrow$ má na I primitivní funkci. Důkaz bude v budoucnu.

Věta o zavedení logaritmu:
$\frac{1}{x}$ je spojitá na $(0, \infty)$. Podle věty 4 k ní existuje primitivní funkce F na $(0, \infty)$. Označme $L(X) = F(X) - F(1), x \in (0, \infty)$.

- Definovaná na $(0, \infty)$ - očividné
- Rostoucí - derivace je všude kladná
- $$\lim_{x \to 1} \frac{L(x)}{x - 1} = F'(1) = 1$$
- $$\forall x, y \in (0, \infty); L(x * y) = L(x) + L(y)$$

  Vezmu y pevné a $\varphi(x) = L(x*y) - L(x) - L(y), x \in (0, \infty)$. Pak platí, že $\varphi(1) = L(y) - L(1) - L(y) = 0$.

  $$\varphi'(x) = L'(xy) * y - L'(x) = \frac{1}{xy} y - \frac{1}{x} = 0$$

  Tedy je konstantní a v 1 je rovna 0, tedy $\varphi = 0$.

Věty o substituci:

- F je primitivní kf na (a, b) a $\varphi((\alpha, \beta)) \to (a, b)$ a má na (α, β) má všude vlastní derivaci. Pak $\int (f(\varphi(t))\varphi'(d)dt = F(\varphi(t)) + C, t \in (\alpha, \beta)$. Důkaz z věty o derivaci složené funkce.
- $\varphi'(t) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, t \in (\alpha, \beta), \varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a f je definovaná na (a, b) a platí $\int f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C$ na $(\alpha, \beta) \Rightarrow \int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$ na (a, b). Opět ověřit zderivováním. (Lze si všimnout že φ je prostá i na, z Rollovy věty)

Poznámka:
Nechť f má primitivní funkci na (a, b) a $\varphi'(t) \in \mathbb{R}, t \in (\alpha, \beta)$, φ je prostá na (α, β) a zobrazuje ho na (a, b). Pak platí to samé jako v druhém bodě výše.

Integrace per partes:
f, g jsou spojité na I, F je primitivní k f a G primitivní k g. Pak

$$\int g(x)F(x)dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)dx, x \in I$$

Plyne z věty o derivaci součinu.

$$(G * F)'(x) = g(x)F(x) + G(x)F(x)$$

H je primitiví k $G(x)f(x)$, pak $G(x)F(X) - H(X)$ je primitivní k $g(x)F(x)$.
Poznámka:
Platí i bez spojitosti, počítá-li se jako rovnost množin.