Polyedrální kombinatorika a matematické programování

2. ledna 2013

Obsah

1 Matroidy

Řekneme, že graf H je ***minor***, jestliže lze získat z G vynecháváním a kontrakcí hran.

Graf H je ***chordální***, jestliže nemá indukovanou kružnici délky > 3.

Věta 1 *Každý chordální graf má vrchol, jehož okolí je úplný graf. Tento vrchol se nazývá* ***simpliciální****.*

Důkaz:
Nechť $C \subset V$ je minimální vrcholový řez. Potom C indukuje úplný podgraf – kdyby ne, mám indukovanou kružnici délky alespoň 4.

☻

Důsledek 1 *Chordální grafy mají stromovou strukturu. Má simpliciální vrchol, dá se považovat za něco jako list stromu. Zbytek je opět chordální, tedy musí mít opět simpliciální vrchol.*

Nechť G je graf. Potom ***stromová šířka*** grafu G $w(G)$ je rovna minimálnímu k, že existuje supergraf $G \subseteq K$, K je chordální a maximální úplný podgraf K má $k+1$ vrcholů.

Věta 2 *Řada optimalizačních problémů (např. hamiltonovská kružnice) je polynomiální v grafech s omezenou stromovou šířkou.*

Vezmu chordální zúplnění, posloupnost simpliciálních vrcholů a postupuji dynamickým programováním, zkouší se to napojovat.

Pozorování 1 *Když H je minorem G, potom $w(H) \leq w(G)$.*

Důkaz:
H vzniklo kontrakcemi vrcholů a vynecháním hran. Ani jedno z toho nezvětšuje stromovou šířkou.

Stačí dokázat, že kontrakce nezvětší úplný podgraf. Jediný graf, ve kterém kontrakcí hrany můžu zvětšit maximální úplný podgraf není chordální. Kontrakce můžu dělat až po „zchordálnění“, tudíž mi nevadí.

☻

Tedy, množina grafů s omezenou stromovou šířkou je omezená na minory.

Věta 3 *Nechť $\mathcal{F}$ je třída grafů uzavřená na minory. Potom lze testovat v polynomiálním čase, zda daný graf patří do $\mathcal{F}$.*

Věta 4 *Nechť H je daný graf. Potom následující úloha je polynomiálně řešitelná: Vstupem je graf G. Je H minorem G?*

Věta 5 (Řešení wagnerovy hypotézy) *Nechť $H_1, H_2, \ldots$ je libovolná nekonečná posloupnost grafů. Potom existuje $i \neq j$, že H_i je minorem H_j.*

Důkaz:
Od věty 3 – postup pomocí minimálních zakázaných obrázků.

Nechť $\mathcal{F}$ je uzavřená na minory a $H \notin \mathcal{F}$. Jestliže H je minorem G, potom $G \notin \mathcal{F}$.

Pro $\mathcal{F}$ existuje konečná množina $\mathcal{M}$ grafů splňující $X \notin \mathcal{F} \Rightarrow \exists m \in \mathcal{M}; m$ je minor X. $\mathcal{M}$ bude minimální množina zakázaných minorů. To dokážu z věty 5, vezmu doplněk k $\mathcal{F}$, najdu konečnou množinu minorů (ta se musí dát najít, protože u nekonečné vždy jde nějaký „vyhodit“).

Z toho už odvodím polynomiální algoritmus.

☻

`TODO: Tady chybí jedna hodina`

Matroidy jsou právě ty dědičné systémy, kde řád je dobře definován. $r(A) = |\max_{\subseteq}$ nezávislá množina $|$.

Věta 6 *Celočíselná funkce $r : 2^X \to \mathbb{N}$ je řádová funkce matroidu na X právě když:*

- $r(\emptyset) = 0$
- $r(y) \leq r(y \cup \{y\}) \leq r(y) + 1$
- $r(Y \cup \{y\}) = r(Y \cup \{z\}) = r(Y) \Rightarrow r(Y) = r(Y \cup \{y, z\})$

Důkaz:
První dva jasné, třetí rozepsáním.

Definujme matroid na X přepisem $A \in S \Leftrightarrow |A| = r(A)$. Ukážeme, že (X, S) je matroid. $\emptyset \in S$. Dále, S je dedičný: $B \subseteq A : r(A) \leq r(B) + |A - B|$. Pro spor předpokládejme, že $r(B) < |B|$, tedy $< |B| + |A - B| = |A|$.

☻

Věta 7 *$r : 2^X \to \mathbb{N}$ je řádová funkce matroidu právě když:*

- $\forall Y \subseteq X; 0 \leq r(Y) \leq |Y|$
- $Z \subseteq Y \Rightarrow r(Z) \leq r(Y)$
- $r(Y \cup Z) + r(Y \cap Z) \leq r(Y) + r(Z)$

Tedy, matroidy jsou strukturální.

Důkaz:
Doprava platí z věty 7 první dva, třetí obrázkem a rozkreslením.

☻

1.1 Struktura jednoduchých matroidů řádu 3

Jednoduchý je jestliže $|A| = r(A), |A| \leq 2$. $r(X,S) := r(X)$.

Definujeme $L(X,S) := \{A \subseteq X; |A| > 2; r(A) = 2; A \text{ uzavřená}\}$. Uzavřená je, pokud $A = \overline{A}$ (uzávěr A). $\overline{A} := \{y; r(A) = r(A \cup \{y\})\} = \bigcup B; A \subseteq B; r(A) = r(B)$.

Pozorování 2 *Množina $L(X,S)$ popisuje matroid (X,S), pokud (X,S) je jednoduchý, řádu 3.*

Důkaz:

$$\begin{aligned} A \subseteq X; |(|A) \in 2 &\Rightarrow r(A) = |A| \\ |A| > 2 &\Rightarrow r(A) = 2 \Leftrightarrow A \subseteq C \in L(X,S) \end{aligned}$$

☻

Pozorování 3

$$K, L \in L(X,S) \Rightarrow |K \cap L| \leq 1$$

Důkaz:
Sporem, nechť mají společného víc. Vezmu si to, co mají různé a dokážu, že uzávěry obsahují oba.

☻

$R2 \subset 2^X$ je ***struktura***, jestliže:

- $A \subseteq R \Rightarrow |A| \geq 3$
- $A, B \in R, |A \cap B| \leq 1$

Věta 8 *Každá struktura je množina $L(X,S)$ jednoduchého matroidu řádu 3.*

Důkaz:
Nechť L je struktura. Definujme r přepisem: $|A| \leq 2 \Rightarrow r(A) = |A|, |A| > 2 \Rightarrow r(A) = 2 \Leftrightarrow A \subseteq C \in L$. V ostatních případech je to 3.

☻

Příklady: Fannův matroid (fannova rovina), uniformní matroid $(X, \left(\begin{array}{c} X \\ k \end{array}\right))$.

1.2 Základní operace

1.2.1 Zkrácení

Mám $k \in \mathbb{N}, (X,S) \to (X, \{A \in S; |A| \leq k\})$.

1.2.2 Součet

Máme dvě množiny $X_1, X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset$, matroidy S_1, S_2. Součet je $(X_1 \cup X_2, \{A \subseteq S_1 \cup S_2; A \cap X_1 @ \in S_1 \wedge A \cap X_2 \in S_2\})$.

1.2.3 Partiční matroid

$X = \dot{\bigcup} X_i, S = \{A \subseteq X; \forall i; |A \cap X_i| \leq 1\}$.

1.2.4 Vynechání

$$(X - Z, \{A; A \in S; A \cap Z = \emptyset\}$$

1.2.5 Kontrakce

$$(T \subseteq X, \{A \in S/T \Leftrightarrow A \cup J \in S\})$$

, kdy J je maximální nezávislá na T.

Pozorování 4 *Definice nezávisí na výběru J.*

1.3 Průnik dvou matroidů

Máme (X, S_1) a (X, S_2). Jejich průnik, $(X, S_1 \cap S_2)$ ale není matroid. ***TODO: Dokázat***

Ale dá se v tom poznat maximální množina co do velikosti (ne do inkluze).

Věta 9 (Průnik matroidů) *Máme matroidy* $(X, S_1), (X, S_2)$*. Potom:*

$$\max_{J \in S_1 \cap S_2} |J| = \min_{A} \subseteq X r_1(A) + r_2(X - A)$$

Poznámka 1 *Toto dává dobrou charakterizaci pro úlohu „Existuje J velké alespoň k?“. To znamená, že mám certifikát jak pro odpověď „ano“ (dá mi J), ale i pro „ne“ – dostanu nějaké dostatečně malé A.*

Důkaz:
Napřed dokážeme, že max $\leq$ min. Vezmeme J, která je nezávislá. Nechť $J \in S_1 \cap S_2, A \subseteq X \Rightarrow J \cap A \in S_1 \wedge J \cap (X - A) \in S_2$. Tedy $|J| \leq r_1(A) + r_2(X - A) \forall A \subseteq X$.

TODO: Opačná nerovnost

☻

Věta 10 (Obraz matroidu) *Obraz matroidu je matroid, tedy:* (X, S) *je matroid a* $f : X \to X'$ *je funkce. Definujeme* $S' := \{f(I); I \subseteq X, I \in S\}$*. Potom* (X', S') *je matroid a* $r'(U) = \min_{T \subseteq U} \left\{|U - T| + r(f^{-1}(T))\right\}$.

Důkaz:
Vezmeme S jako S_1, množinky všech, které f sloučí do jednoho a označíme S_2 a nacpeme do věty 9.

☻

Důsledek 2 (Sjednocení matroidů) *Pokud* $(X, S_1), (X, S_2)$ *jsou matroidy, potom* $\{Y \subseteq X; \exists Z \subseteq Y, Z \in S_1, Y - Z \in S_2\}$ *je matroid na* X *a* $r(U) := \min_{T \subseteq U} \{|U - T| + r_1(T) + r_2(T)\}$.

Důkaz:
Nechť $X_1 := X \times \{1\}, X_2 := X \times \{2\}$. Vezmeme matroidy $\overline{M_1} := (X_1, S_1), \overline{M_2} := (X_2, S_2)$. Jejich sjednocení $\overline{M_1} \oplus \overline{M_2}$ je také matroid (dle 1.2.2). Potom vezmu funkci f, která zahazuje druhou složku a dle věty 10 je to také matroid.

☻

Důsledek 3 *$M = (X, S)$ matroid. Potom:*

$$\max \left\{ \left| \bigcup_{I,|I|=k} \right| \right\} = \min_{I \subseteq X} \{ |X - T| + k \cdot r(T) \}$$

Důsledek 4 *X je sjednocení k nezávislých množin $\Leftrightarrow \forall U \subseteq X; k \cdot r(U) \geq |U|$.*

Důsledek 5 *M má k disjunktních bazí $\Leftrightarrow \forall U \subseteq X k \cdot (r(x) - r(U)) \leq |X - U|$.*

Poznámka 2 *Toto se používá na vektorové matroidy.*

1.4 Hladový algoritmus

Máme množinový systém $(X, S), S \subseteq 2^X$ a máme váhovou funkci $w : X \to \mathbb{R}$. Uvažme diskrétní optimalizační problém „najdi $A@ \in S$ takové, že $w(A)$ je maximální.

Algoritmus 1 (Hladový):

Nechť $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ a označme $w_i := w(i)$. Uspořádáme prvky tak, že $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \ldots w_n$.

Vezmi množinu $J \neq \emptyset$. Potom pro $i := 1, \ldots, n$ pokud $J \cup \{i\} \in S \wedge w_i \geq 0$, potom do J přidej i.

☺

Věta 11 *Nechť (X, S) je dědičný neprázdný systém. Potom algoritmus 1.4 správně řeší diskrétní optimalizační systém pro každou $w : X \to \mathbb{R} \Leftrightarrow (X, S)$ je matroid.*

Důkaz:
Pokud (X, S) není matroid. Potom máme dvě množiny maximální do inkluze, které nemají stejnou velikost. Pokud vezmu $w(*) := 1$, potom mi může nabrat celou tu menší množinu a neumět ji zvětšit.

Drobné pozorování: všechny w ve výsledku jsou ≥ 0. To, že si neublížím přidáním je jasné z dědičnosti a stejné velikosti maximální množiny co do inkluze.

☻

Poznámka 3 *Hladový algoritmus řeší i následující úlohu: „najdi* $\max_{A \subseteq X} w_i \cdot z_i; \sum z_i \le r(A), z_i \ge 0$*“.*

2 Lineární programování

Máme minimalizovat hodnotu $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots$ za podmínek $b_{1,1}x_1 + \dots \ge z_1$, etc., potom existuje ještě duální, maximalizovat „vynásobení podmínek“ tak, aby byl odhad z druhé strany co nejlepší.

Pozorování 5 (Slabá věta o duaalitě) *Pro každé přípustné řešení x primární úlohy a y její duální úlohy platí, že* $g(y) \le f(x)$.

Důsledek 6 *Když mám stejné, tak už to musí být optimum.*

Pozorování 6 *Nechť* A *je matice* $\mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. *Potom soustava* $Ax = b$ *má řešení* $\Leftrightarrow \nexists$ *řešení pro* $y^t A = 0 \wedge y^t b = -1$.

Důkaz:
Plyne z toho, jak funguje gaussova eliminace. Pokud na jedné straně dostanu 0 a na druhé -1, tak to nemá řešení. Pokud ho nedostanu, tak vyeliminuju.

☻

2.1 Fourier-Motzkinova eliminace

2.1.1 Značení

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$
- a_i je i-tý řádek matice A.
- a'_i je i-tý řádek matice A bez první složky.

Předpokládejme, že máme 3 typy nerovností:

- $x_1 + a'_i x' \le b_i$
- $-x_1 + a'_j x' \le bj$

- $a'_k x' \leq b_k$

Pozorování 7 *Úloha má řešení* $\Leftrightarrow$*, když má řešení systém, který dostaneme posčítáním všech dvojic nerovností z první a druhé skupiny. Třetí se jen přidá.*

Důkaz:
Doprava je zřejmé.

Opačně potřebuju získat jen x_1, zbytek mám spočítané. Máme omezení pro oba směry, ale musí vyjít (jinak by nebyla splněná podmínka pro x'), tak vezmu cokoliv z tohoto rozsahu.

☻

Věta 12 (Farkašovo lemma) *Systém* $Ax \leq b$ *má řešení* $\Leftrightarrow \nexists$ *nezáporný vektor* $y \in \mathbb{R}^n_+$*, takový, že* $y^T A = 0$ *a* $y^T b < b$*.*

Důkaz:
Předpokládejme, že má řešení a máme i takový vektor. Pak ale $0 = y^T(Ax) \leq y^T b < 0$, to je spor.

Doleva indukcí podle počtu sloupců, nepřímo – nemá řešení, tak najdu vektor, vezmu z 2.1

☻

Věta 13 (O silné dualitě) *Řešení obou úloh je stejně velké, pokud mají obě alespoň jedno řešení.*

`TODO: Chybí hodina`

Důsledek 7 *Mnohostěn* P *má konečně mnoho stěn.*

Věta 14 *Nechť* F *je minimální (ve smyslu inkluze, nic menšího už není stěna) neprázdná stěna mnohostěnu* $P := \{x|Ax \leq b\}$*. Potom* $F = \left\{x|A^0x = b^0\right\}$ *pro nějaký podsystém* $A^0x \leq b^0$ *systému* $Ax \leq b$*. Navíc* $rank(A^0) = rank(A)$*.*

Důkaz:
$F = \left\{x \in P|A^0x = b^0\right\}$ dle `TODO: odkaz na minulou větu, až bude minulá věta existovat`. Chceme dokázat, že se můžeme na toto $\in P$ vykašlat.

Vezměme libovolný $\overline{x} \in F$. $a_i \cdot \overline{x} \leq b_i$ pro některou neobsaženou v $A^0 x \leq b^0$. Nemůže to být ale rovnost, mohl bych ji mít uvnitř ^{0} podmínek.

Pro spor předpokládejme, že $\exists y : A^0 y = b^0$ a $y \notin P$. Vybereme nějaký bod mezi $\overline{x}$ a y, pro který platí $=$ pro některou nepoužitou podmínku. (musí takový existovat, u $\overline{x}$ platí ostře, venku porušuje, někde musí platit rovnost.) Při přidání této podmínky do těch ^{0}, tak bych získal něco menšího, co je ale také stěna. Tedy takové y nemůže existovat.

Dále je potřeba dokázat hodnost. Pokud by byla $rank(A) > rank(A^0)$. Potom by nemohlo platit to výše.

☻

$v \in P$ je ***vrchol***, pokud $\{v\}$ je stěna P.

Pozorování 8 *Má-li P vrchol, pak každá minimální stěna je vrchol.*

Důkaz:
Plyne z hodností.

☻

Věta 15 *Nechť $P := \{x | Ax \leq b\}$ a $v \in P$. Pak v je vrchol $P \Leftrightarrow v$ nelze napsat jako konvexní kombinaci vektorů z $P \backslash \{v\}$.*

Důkaz:
Mám $A^0 x \leq b^0$, tj $\{v\} = \left\{x | A^0 x = b^0\right\}$. Pro spor předpokládejme, že $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k, \lambda_i \geq 0; \sum \lambda_i = 1, v_i \in P$.

Všechny patří dovnitř, tedy $A^0 v_i \leq b^0$. Aby někde nastala nerovnost, tak bych musel někde přesáhnout, aby mi vyšlo celé v. Tedy, $A^0 v_i = b^0$, tedy patří do stejné stěny.

Opačně, mějme něco, co nejde napsat jako konvexní kombinace.

☻

Věta 16 (Mikovského) *Množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je polytop $\Leftrightarrow \exists$ konečná množina J taková, že P je konvexní obal J.*

Důkaz:
Vyřešme zvlášť, když $P = \emptyset$. Potom je $J = \emptyset$.

Nechť je tedy P neprázdné. Potom má alespoň jeden vrchol. Označme tedy $v_1, \ldots, v_k$. Těch je jen konečně mnoho. Ten konvexní obal je zřejmě jeho podmnožinou.

Nyní pro spor předpokládejme, že existuje něco, co je v P a není v konvexním obalu. Z toho se vykope spor (vezmu nějakou tu nadrovinu, ve které je ten bod, ale ta musí potkat nějaký vrchol).

Nyní máme konečnou množinu J a máme P, která je konvexní obal J. Najdeme systém nerovností, které budou popisovat ten polytop. Vymyslíme si ho, zjistíme, že máme množinu bodů (kvůli minulé implikaci) a nakonec dokážeme, že to má ty body správné.

☻

3 Párování v grafech

Věta 17 (Birkhoff) *Nechť G je bipartitní graf. Potom konvexní obal perfektních párování G je popsán následujícím způsobem: Součet „existence" přes sousední hrany je max. 1, hledáme maximum.*

Důkaz:
Problém s celočíselností. Předpokládáme tedy, že existuje neceločíselný vrchol v P. Vezmeme hrany, které se neceločíselně podílejí na tomto vrcholu.

V těchto je alespoň jeden cyklus. Délky těchto cyklů jsou sudé (jsme v bipartitním grafu). Když budeme některé (třeba liché) zmenšovat, druhé zvětšovat, tak to lze dělat tak, že se pro žádný vrchol součet nezmění. Pak to uděláme naopak. A původní je lineární kombinace těchto nových, což je spor s tím, že je to vrchol.

☻

Věta 18 (Polytop poločíselných párování) *Nechť G je graf a $\overline{x} \in P(G)$. Pak $\overline{x}$ je vrchol, $\forall e \in E : \overline{x}_e \in \{0; 1; 0.5\}$ a hrany s $\overline{x}_e = 0.5$ tvoří vrcholově disjunktní liché cykly.*

Důkaz:
Máme $\overline{x}$ splňující podmínky. Definujme vrchol w, $w_e = -1$ pro $x_e = 0$ a $\overline{w}_e = 0$ pro $\overline{x}_e > 0$. Pak $\{\overline{x}\} = P(G) \cap \left\{x | w^T x = 0\right\}$. Že tam je je jasné, sám je tam proto, že nuly musí mít na stejném místě, poloviny tvoří liché cykly a na snížení jedničky bych si musel někde jinde půjčit.

Tato podmínka je tečná nadrovina, tedy je to vrchol.

Mějme všechny tyto vektory, dokážeme, že P je konvexní obal tohoto. Sestrojíme $G' = (V', E'), V' = V \times \{0, 1\}$ a hrany spojím „mezi vrstvami“. Tento graf je bipartitní. Definujeme w' pro graf G', tedy ten původní rozkopírujeme.

☻

Věta 19 (O polytopu perfektních párování) *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že konvexní obal perfektních párování je roven polytopu $PM(G)$, kde $PN(G) = \left\{x \in \mathbb{R}^{|E|} | x(\delta(v)) = 1 \forall v \in V; x(\delta(S)) \geq 1 \forall S \subseteq V, |S| = 2k+1, \ldots\right\}$.*

Důkaz:
Indukcí dle velikosti grafu.

Pokud tam jsou liché cykly/části s $x(\delta(S)) = 1$, tak vždy rozdělíme a vezmeme grafy, kde je zkontrahovaná lichá část a zkontrahovaný zbytek (povolené násobné hrany).

☻

Vektory jsou ***afinně nezávislé***, pokud soustava $\sum \lambda_i v_i = 0$ a $\sum \lambda_i = 0$ má právě jedno řešení.

Dimenze množiny $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je o jedna méně než maximální velikost afinně nezávislé podmnožiny X

Řekneme, že mnohostěn $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je ***plné dimenze***, pokud $dim(P) = n$.

Řekneme $a_i x \leq b_i$ ze systému nerovností $Ax \leq b$ je ***implikovaná rovnost***, pokud $a_i x = b_i \forall x, Ax \leq b$.

Tvrzení 1 *Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je mnohostěn a nechť $\overline{A}x = \overline{b}$ je systém implikovaných rovností z $Ax \leq b$. Potom $dim(P) = n - rank(\overline{A})$.*

Důkaz:
Pokud je $\overline{A}$ prázdné, pak vezmeme $v := \sum \frac{1}{|A|} \cdot v_i$. Ten je někde „uvnitř“ – není na žádné hranici. Vezmu tedy dalších n vektorů do všech směrů od něj a máme $n+1$ afinně nezávislých vektorů.

Dále je vždy nějakou proměnnou vyjádřit z implikované rovnosti a tedy se jí zbavit a posunout se do prostoru o dimenzi o 1 menší. Takto se zbavím všech.

☻

Faseta mnohostěnu P je maximální vlastní stěna P.

Tvrzení 2 *Nechť F je neprázdná vlastní stěna $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$. Potom F je faseta $\Leftrightarrow dim(F) = dim(P) - 1$.*

Důkaz:
Máme neprázdnou vlastní stěnu a $dim(F) = dim(P) - 1$. $F = \{x \in P | A_0 x = b_0\}$ pro vhodný podsystém $Ax \leq b$. $A_0 x = b_0$ má $rank = 1$. Je to neprázdné, tedy tam jsou jen ty samé rovnosti (až na násobky). F je tedy maximální.

Nyní máme neprázdnou vlastní stěnu a je maximální. F je stěna, tedy $F = \{x \in P | A_0 x = b_0\}$. Protože F je maximální stěna, $A_0 x = b_0$ je jediná rovnost (mohly by tam být implikované, ale ty jsou nezajímavé). Proto je dimenze o jedna menší, než P.

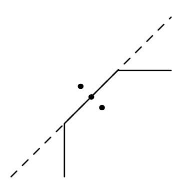
☻

Řekneme, že nerovnost $w^T x \leq t$ ***indukuje fasetu*** F mnohostěnu P, pokud $F = \left\{x \in Y | w^T x = t\right\}$.

Řekneme, že systém nerovností (nebo rovností) $Ax \leq b$ je ***minimální***, pokud žádnou podmínku nemůžeme vynechat, aniž by se zvětšila množina řešení a žádnou nerovnost nelze přepsat na rovnost, aniž by se zmenšila množina řešení.

Věta 20 *Nechť $P = \{x \in \mathbb{R}^n, A'x = b', A''x \leq b''\}$ je mnohostěn a nechť je neprázdný. Definující systém je minimální $\Leftrightarrow$ řádky A' jsou lineárně nezávislé a každá podmínka $a_i'' x \leq b_i''$ z $A''x \leq b''$ indukuje jinou fasetu P.*

Důkaz:
Máme minimální systém. Pokud by byly lineárně závislé, můžeme jeden vyhodit. Označme $\overline{A}'' x \leq \overline{b}''$ podsystém $A''x \leq b''$ odebráním $a_i'' x \leq b_i''$. Protože výchozí systém byl minimální, tak existuje vektor, který splňuje vše zbylé, ale nesplňuje odebranou. Dále vezmeme bod striktně uvnitř a vezmeme lineární kombinaci těchto dvou bodů takový, že splňuje odebranou podmínku s rovností. Ten ale splňuje ty ostatní s nerovností (ostrou).



Obrázek 1: body u stěny

Tedy, musí ležet v některé fasetě.

Opačně, tedy A' jsou lineárně nezávislé a nerovnosti indukují každá jinou fasetu. Nahradíme některou rovností. V tu chvíli by klesla dimenze. Pokud vynecháme rovnost, pak vzroste dimenze P. Vynechání nerovnosti $a_i''x \leq b_i''$. Označíme F stěnu indukovanou touto nerovností. Toto je faseta. Existuje x_1, které splňuje všechny rovnosti a splňuje tuto nerovnost neostře a ostatní ostře (tedy, leží v této stěně). Potom vezmeme jeden uvnitř a posuneme se o ϵ ven.

☻

Důsledek 8 *Mnohostěn plné dimenze má jednoznačný minimální definující systém (až na násobky).*

Matice $A^{m \times n}$ je ***unimodulární***, pokud každá čtvercová regulární matice A velikosti $n \times n$ má determinant ± 1.

Matice A je ***totálně unimodulární***, pokud každá čtvercová podmatice má determinant $0, \pm 1$.

Předpokládejme, že A je totálně unimodulární. Vedle připojíme jednotkovou matici. Potom je i tato rozšířená totálně unimodulární, rozvoj podle sloupce. Opačná implikace platí také (nemusím z I vůbec vybírat).

Tvrzení 3 *Předpokládejme, že $A^{n \times n}$ je celočíselná čtvercová regulární matice. Potom $A^-1 \cdot b$ je celočíselný vektor pro každý celočíselný $b \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ $\det(A) = \pm 1$.*

Důkaz:
Zprava doleva je to z kramerova pravidla.

Opačně, vezmeme b jako kanonickou bázi, tak dostáváme jednotlivé sloupečky, A^{-1} je celočíselná. Proto má determinant ± 1 jak A, tak A^{-1}.

☻

Mnohostěn P je ***racionální***, pokud je popsaný racionálním systémem rovností a nerovností.

Mnohostěn P je ***celočíselný*** právě když každá jeho stěna obsahuje celočíselný vektor.

Věta 21 *Nechť $A^{m \times n}$ je celočíselná matice plné řádkové hodnosti (tedy hodnosti m). Potom mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b; x \geq 0\}$ je celočíselný pro každý celočíselný vektor $b \Leftrightarrow A$ je unimodulární.*

Důkaz:
Zprava doleva: A je unimodulární a máme celočíselné b. Máme $\overline{x}$ vrchol P.
Alespoň jeden musí existovat (např. nulový). Tedy, $\{\overline{x}\} = \{x \in \mathbb{R}^n; A'b = b', x_i = 0 \forall i \in J\}$ – vyberu takové, aby byly nezávislé, tedy A' je čtvercová.

Sloupce A odpovídající $x_i \neq 0$ jsou lineárně nezávislé.

Doplňme B na matici $m \times m$ tak, aby byla regulární.

Potom $B\overline{x_B} = b$, kde $\overline{x_B}$ je restrikce $\overline{x}$ na složky odpovídající sloupcům B.

Pak i B^{-1} má determinant ± 1 a tedy $\overline{x_B}$ je unimodulární.

Nechť B je regulární podmatice A velikosti $m \times m$. Chceme dokázat, že $\det(B) = \pm 1$. Dle předešlého tvrzení stačí ověřit, pro každé $\forall v$ celočíselné, $B^{-1} \cdot v$ je celočíselné.

Volme $y \in \mathbb{Z}^n$ tak aby $y + B^{-1}v \geq 0$. Položme $b = B(y + B^{-1} \cdot v)$.

Nechť z označuje vektor vzniklý z $y + B^{-1} \cdot v$ doplněním nulami pro sloupce A, které nejsou v B. Potom $A \cdot z = b$. Chceme dokázat, že z je celočíselné. $z \in P$, chtěli bychom zjistit, že je to vrchol. Dokážeme z lineární nezávislosti.

Tedy je celočíselný, tedy zpět i b je celočíselné a $B^{-1} \cdot v$ je celočíselné.

☻

Věta 22 *Nechť A je celočíselná matice $m \times n$. Potom mnohostěn $P = \{x; Ax \leq b, x \geq 0\}$ je celočíselný pro každé celočíselné $b \Leftrightarrow A$ je totálně unimodulární.*

Důkaz:
Zavedeme pomocnou proměnnou z, matici rozšíříme o I a převedeme to tím na minulou větu.

☻

Věta 23 *Předpokládejme, že A je matice se složkami $0, 1, -1$ taková, že každý sloupec obsahuje nejvýše jednu 1 a nejvýše jednu -1.*

Důkaz:
Indukce a rozvoj dle sloupce s max jedním nenulovým. Pokud takový není, je singulární.

☻

4 Elipsoidová metoda

U lineárního programování máme tři druhy úloh:

- Optimum.
- Přípustné řešení
- Rozhodnout, jestli vůbec nějaké řešení existuje

Pozorování 9 *Umíme-li v polynomiálním čase řešit rozhodovací variantu, pak umíme v polynomiálním čase i variantu 2.*

Důkaz:
Nechť k je počet nerovností. Pokud $k = 0$, tak stačí ugaussit.

Jinak si vybereme nerovnost a změníme ji na rovnost. Pokud má řešení i potom, tak pokračujeme takto (stále nám zbývá nějaká možnost). Nemá-li, tak je zbytečná a zahodíme ji.

☻

Pozorování 10 *Umíme-li v polynomiálním čase najít nějaké řešení, tak umíme i najít optimum.*

Důkaz:
Budeme řešit zároveň duál a původní úlohu a hledat její řešení.

Když máme

$$\begin{array}{rcl} & & \max c^T x \\ Ax & \leq & b \end{array}$$

Potom duální je

$$\begin{array}{rcl} & & \min b^T y \\ y^T A & = & c \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

Ze silné duality víme, že se v takovém případě obě rovnají a vyhráli jsme.

Tedy, je potřeba ověřit, že jedna z úloh není neomezená, takže napřed otestujeme, jestli existuje řešení první. Pokud ne, nemá to řešení. Potom se zeptáme, jestli vůbec ten obojetný má řešení. Pokud ne, tak je ta primární neomezená.

☻

Celé číslo k bude mít velikost $\langle k\rangle := 1 + \lceil \log(|k|+1)\rceil$, tedy počet použitých bitů.

Pro racionální číslo to bude $\left\langle \frac{p}{q}\right\rangle := \langle p\rangle + \langle q\rangle$ pro nesoudělná p a q.

U vektoru to bude součet přes všechny.

Úloha lineárního programování patří do $NP \cap co-NP$.

Stačí si tipnout řešení a v polynomiálním čase ověřit. To by nebyl problém, kdybychom věděli, že existuje nějaké polynomiálně velké řešení.

Má-li polytop $\{x; Ax \leq b\}$ vrchol, pak ho lze popsat jako průsečík kterých stěn vznikne. A dle kramerova pravidla lze vyjádřit x_i jako poměr determinantů a ty už jsou polynomiálně velké.

Lemma 1 *Pro každou racionální matici $D \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, že $||D|| \leq 2^{\langle D\rangle - n^2}$.*

Důkaz:
Kdybych měl délky vektorů, tak největší je, když je vše na sebe kolmé. Takže to omezíme něčím jako $\Pi|d_i|$. A to už se utluče.

☻

Pokud nemáme vrchol, tak je buď prázdný, to za chvíli, nebo mu nějakou hezkou stěnu přidáme a vrchol dostane.

Pokud nemá řešení najdeme vektor pro Farkasovo lema, tedy máme $\exists y \geq 0$ takové:

$$\begin{aligned} y^T A &= 0 \\ y^T b < 0 & \end{aligned}$$

To ale je zase soustava nerovnic, dle předchozího je dostatečně malé řešení.

Algoritmus 2:

Předpokládejme, že máme omezený polytop plné dimenze.

Napřed udělá kouli dostatečně velkou kouli, kam se to celé vejde. Spočítali jsme maximální velikosti souřadnic vektorů, máme horní odhad velikosti.

Situace: máme elipsoid, který obsahuje ten polytop. Pokud střed je uvnitř, tak jsme vyhráli. Pokud ne, tak nějakou nerovnost ten střed porušuje. My si tu nerovnost posuneme do středu, tím vznikne průnik nerovnosti s elipsoidem. Najdeme nový elipsoid, který to celé obsahuje, ale objem dostatečně klesne.

☺

Aby byla plná dimenze, provedeme perturbaci a ono to bude.

Symetrická matice je ***Pozitivně definitní***, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n; x^T Ax > 0$.

Pro každou pozitivně definitní matici A existuje pozitivně definitní matice Q takové, že $A = Q^T Q$. Označme ji $A^{\frac{1}{2}}$. Platí, že ta matice Q je regulární a Q^T je také pozitivně definitní.

Pro pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a pro vektor $a \in \mathbb{R}^n$ nazveme množinu $E(a, A) := \left\{x \in \mathbb{R}^n; (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\right\}$ ***elipsoidem*** se středem v a daného maticí A.

Každý elipsoid je afinní obraz jednotkové koule v počátku. Lze zapsat jako $T(x) = Qx + b$.

Tvrzení 4 *Pro afinní zobrazení $T(x) = Q(x) + t$ a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ platí, že $vol(T(X)) = |detQ| \cdot vol(X)$.*

Tvrzení 5 *Nechť F je minimální (inkluzí) stěna polyedru $P = \{x|Ax \leq b\}$. Potom F lze vyjádřit jako soustavu rovnic $F = \left\{x|A^0 x = b^0\right\}$, kde $A^0 \subseteq A, b^0 \subseteq b$, $rank(A^0) = rank(A)$.*

Lemma 2 *Pokud P je omezený mnohostěn $P = \{x|Cx \leq d\}$ a C, d jsou celočíselné, potom všechny vrcholy P jsou obsaženy v kouli se středem v počátku a poloměrem $R =$*

Důkaz:
Uvažme vrchol v mnohostěnu P. Existuje podsystém $C^0 x \leq d^0$ takový, že $C^0 v = d^0$ a v je jediné takové řešení. Podle kramerova pravidla umíme každou složku vyjádřit jako $\frac{\det C_i^0}{\det d_i^0}$, dolní je alespoň 1, protože je to celočíselné. $\left|\det C_i^0\right| \leq 2^{C_i^0} - n^2$.

☻

Budeme předpokládat, že P je omezený pokud je tedy neprázdný, tak je konvexním obalem svých vrcholů, tedy se vejde celý do té okoule.

4.1 Iterační krok

Máme polytop, elipsoid a poloprostor, jehož hranice prochází středem elipsoidu tak, že celý polytop patří do toho poloprostoru.

Napřed vezmeme snadný případ. Když elipsoid je jednotková koule v počátku, a nějaký kvadrantový poloprostor (např. $\{x; x_1 \leq 0\}$).

Snažíme se najít nejmenší elipsoid se středem na ose tak, aby se dotýkal vzdáleného bodu a průsečíků s hranou poloprostoru. Chceme ho ve směru osy kolmou na hranici smrštit, ostatní trochu roztáhnout.

Uděláme si diagonální matici, na jednom místě bude $\frac{1}{p^2}$, aby se zmenšil, ve zbylých $\frac{1}{q^2}$, aby se zvětšil. Tedy, $0 < p < 1, q > 1$. Chceme takový, co má nejmenší objem.

Z toho vyjde, že: $(-1-t)e_1^T Z^{-1}(-1-t)e_1 \leq 1$ (Z^{-1} je ta matice na úpravu elipsoidu).

Dále, $(-t, 1, 0\ldots 0)^T Z^{-1}(-t, 1, 0\ldots 0) = 1$, z toho nakonec vyjde, že $\frac{1-2t}{(1-t)^2} = 1$.

Z minimálního objemu víme, že chceme minimalizovat odmocninu z determinantu matice Z (ne Z^{-1}). Tam máme jednou p a potom součin mnoha q. Takže minimální $p \cdot q^{n-1}$.

Z toho odvodíme, že $p = 1 + t$ a $q = \frac{1+t}{\sqrt{1+2t}}$.

Vyjde, že $t = \frac{-1}{n+1}$. Z toho odvodíme, že $\frac{1}{p^2}$ je $\frac{n+1}{n}^2$ a $\frac{1}{q^2}$ je $\frac{n^2-1}{n^2}$.

Je potřeba dokázat, že se objem zmenší dostatečně.

Ty obecné jsou jednoduché – ztransformujeme prostor tak, aby tamto platilo, potom vezmeme tu úpravu elipsoidu a ztransformujeme prostor zpět (takže i úpravu).

Lemma 3 *Je-li P polytop plné dimenze, potom pro $k = 2(n+1)(2(n+1)\langle C\rangle + n\langle d\rangle - n^3)$ je objem elipsoidu menší, než polytopu.*

Posun středu je $a - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{Ac}{\sqrt{c^T Ac}}$.

Lemma 4

$$C = \frac{n^2}{n^2-1} \cdot (A - \frac{2}{n+1} \frac{Acc^T A^T}{c^T Ac}$$

Důkaz:
Nechť $Q := A^{\frac{1}{2}}$.

$E(C, f) = \left\{T(R(y)); (y-z)^T Z^{-1}(y-z) \leq 1\right\}$.

☻

Potřebujeme zdola odhadnout objem počátečního mnohostěnu.

Pokud najdeme $n+1$ vrcholů, potom objem konvexního obalu je nejvýše tak velký jako objem mnohostěnu. Ty vrcholy sice nemáme, ale dají se vyjádřit jako podíly z kramerova pravidla.

Lemma 5 *$Ax \leq b$ má řešení $\Leftrightarrow Ax \leq b + (\epsilon, \epsilon \dots \epsilon)$, kde $\epsilon = \frac{1}{2n2^{\langle A|b\rangle - n^2}}$.*

Důkaz:
Z farkashova lematu, stejný důkaz bude fungovat i pro tohle.

☻

5 Metoda vnitřního bodu

Vezmeme bod uvnitř, budeme ho postupně zlepšovat. Aby se dalo něco najít, tak to upravíme do tvaru $Ax = b, x \geq 0$.

Zároveň řešíme i duální úlohu. Skončíme ve chvíli, kdy si jsou dostatečně podobné. Najde striktně přípustné řešení (x, s), tedy je vše > 0.

V iteračním kroku najdeme další striktně přípustné řešení, dostatečně lepší. Když už je to skoro optimální, najdeme zcela optimální.

Pro postup algoritmu zavedeme potenciál. Bude to $G(x, s) = (n + \sqrt{n}) \cdot \log x^t \cdot s - \sum_{i=1}^{n} x_i s_i$.

Věta 24 *Nechť $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$, u a v jsou vrcholy $P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$, pak když $c^t u \neq c^t v \Rightarrow \left|c^t u - c^t v\right| \geq 2^{-2L}$, kde L je velikost zápisu soustavy.*

Důkaz:
Zase přes kramerovo pravidlo a utloukání.

☻

Důsledek 9 *Je-li $x^t s \leq 2^{-2L}$ pro nějakou dvojici přípustných řešení x, s, pak jakýkoliv vrchol x' mnohostěnu P splňující, že je alespoň tak dobré, jako naše řešení, je optimum.*

Důkaz:
Předpokládejme, že existuje vrchol $x' \in P$, který má tu vlastnost, že je lepší, než to x, ale není optimální.

☻

5.1 Iterační krok

Předpokládejme, že vektor x je samé jedničky.

Chceme to změnit proti směru gradientu toho potenciálu. Když ho spočítáme, tak vyjde. Nemůžeme vzít přímo ten směr, ale můžeme vzít projekci do $Ax = 0$. Primární krok budeme dělat ve chvíli, kdy $|d| \geq 0.2$.