Grafové minory

2. ledna 2013

Obsah

Minor se dá získat tak, že zahazuju vrcholy a hrany a kontrahuju hrany.

Topologický minor používá jen topologické kontrakce (kontrahuje se jen taková hrana, jejíž alespoň jeden vrchol má stupeň 2).

Pozorování 1 *Můžu kontrakce uvažovat až na konec.*

Indukovaný minor je takový, který jen kontrahuje.

Lemma 1 *Nechť H je minorem G. Potom existuje zobrazení $f : V(H) \to \mathcal{P}(\mathcal{V}(\mathcal{G}))$ takové, že:*

- *$\forall v \in V(H); f(v)$ je neprázná a souvislá.*
- *Neprotínají se.*
- *Pokud je v H hrana, pak musí být hrana mezi množinami v původním.*

Důkaz:
Buď je to vidět, nebo je to napsané v barevnosti.

☻

Lemma 2 *Nechť H je max. stupně 3. Potom platí, že H je minorem $G \Leftrightarrow H$ je topologickým minorem.*

Důkaz:
Jedna implikace je triviální.

Druhá, najdu si stromečky v skupinkách, ty už mají malé stupně, tam to jde vykoukat.

☻

Pozorování 2 *Relace být minorem je transitivní.*

Důkaz:
Prostě se udělají za sebou.

☻

Třída grafů $\mathcal{G}$ je ***uzavřená na minory***, pokud s každým jeho prvkem obsahuje i všechny jeho minory.

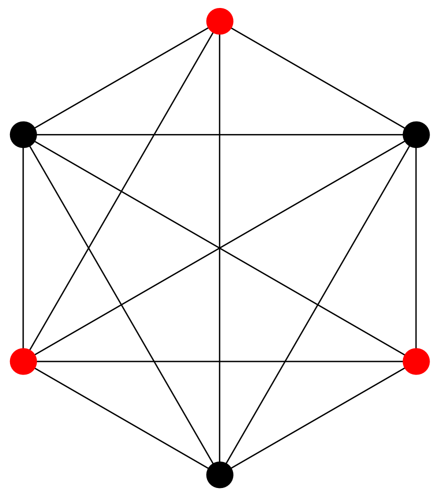
Podobně uzavřenost na libovolné jiné minory.

Věta 1 (Kuratovského minorová) *Graf je rovinný, právě když neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor.*

Lemma 3 *Pokud G obsahuje K_5 nebo $K_{3,3}$ jako minor, tak jeden z nich obsahuje i jako topologický minor.*

Důkaz:
Pro $K_{3,3}$ platí podle Lemmatu 2.

Pro K_5, pokud napřed mažu vrcholy a hrany a potom teprve kontrahuji, tak se mi může poštěstit, že mám jen topologické kontrakce. Nechť tomu tak není. Kontrakce můžu proházet, nechť poslední kontrakce je tedy netopologická. Najdu tam buď K_5 nebo $K_{3,3}$. Potom ho ale má jako topologický.



Důkaz:
Přímo plyne z Lemma 3.

Pozorování 3 *Máme dané nakreslení G na plochu. Podom odebírání vrcholů, hran a kontrakce zachovávají nakreslení.*

Důkaz:
Odebírání je zřejmé. Kontrakce – místo jednoho vrcholu tam půjdou ty hrany podél sebe, co vedla ta původní.

☻

Tím jsme zavedli ***minor nakreslení*** (musí jít převádět přímo to nakreslení – nesmí se přeskakovat někde).

Pozorování 4 *Třída grafů nakreslitelná na danou plochu je uzavřená na minory.*

Nechť G je multigraf s daným nakreslením. Označme F množinu bodů reprezentujících stěny v tomto nakreslení. Potom G^* je ***duální graf*** je multigraf, kde F je množina vrcholů a hrany jsou původní, jen otočené.

Identifikuje původní graf až na izolované vrcholy. Kdyby byl 3-souvislý, tak má jen jedno nakreslení a tedy jen jeden duál.

Pozorování 5 *Je-li H minorem G, potom H^* je minorem G^*.*

Důkaz:
Odebrání hrany odpovídá kontrakci a naopak. Odebírejme jen izolované vrcholy.

☻

Opačně platí jen pokud tam nejsou žádné izolované.

1 Vnějškově rovinné grafy

Má nějaké nakreslení, kdy jsou všechny vrcholy na vnější stěně.

Pozorování 6 *Je to uzavřené na minory.*

Důkaz:
Zřejmě po libovolné operaci zůstane rovinný, z vnější stěny to taky nic nedostane.

☻

Věta 2 *Vnějškově rovinný je právě když neobsahuje jako minor ani K_4 ani $K_{3,2}$.*

Důkaz:
Že tyto věci nejsou vnějškově rovinné je vidět.

Jinak sporem. Když mám vnějškově rovinné, vezmu duál a odeberu vrchol odpovídající vnější hraně, dostanu les.

Nechť je tedy rovinný (jinak obsahuje něco moc velkého). Když duál bez vrcholu je les, tak pohoda. Jinak máme kružnice nebo násobné hrany. Pokud ne, tak vykoukám minory.

☻

2 Dobré uspořádání

Předuspořádání je relace, která je tranzitivní a reflexivní.

Částečné uspořádání z toho uděláme faktorizací podle tříd ekvivalence.

Množina X je dobře uspořádaná pomococí $\leq$ pokud každá posloupnost $x_i \in X$ obsahuje neklesajícídvojici, tj $\exists i, j; i < j \wedge x_i \leq x_j$.

Je-li třída X dobře uspořádaná, potom každá posloupnost obsahuje neklesající podposloupnost. Uděláme pomocí nekonečné ramseyovy věty.

Řekneme, že O je množina zakázaných prvků pro $Y \subseteq X$, pokud platí: $\forall x \in X; x \notin Y \Leftrightarrow \exists o \in O; o \leq x$.

Pozorování 7 *Je-li X dobře uspořádané a Y je uzavřená na $\leq$, potom O existuje a je konečná.*

Důkaz:
Za O vezmeme množinu minimálních prvků $X \backslash Y$. Ty jsou neporovnatelné a proto je to konečné (jinak bych je mohl nastrkat do posloupnosti).

☻

Jestliže $(X, \leq)$ je uspořádání, potom $(X^{<\infty}, \leq)$, kde $X^{<\infty}$ jsou všechny konečné podmnožiny X (např. trojprvkové) a množiny $a, b \in X^{<\emptyset}$, pokud existuje prosté zobrazení z $f : a \to b$ takové, že $a_i \leq f(a_i) \forall a_i \in a$.

Věta 3 *Je-li $(X, \leq)$ dobře uspořádané, potom i $(X^{<\infty}, \leq)$ je dobré.*

Důkaz:
Vezmeme špatnou posloupnost takovou, že každý prvek je nejmenší možné velikosti tak, aby rozšiřoval předchozí do špatné. Ale můžu vyměnit za B_i, to ale už musí být dobrá posloupnost.

☻

Věta 4 *Třída zakořeněných stromů je dobře uspořádaná na topologické minory.*

Důkaz:
Předpokládejme, že existuje špatná posloupnost. Podobně jako minulý důkaz.

☻

Příklad 1:

To s $X^{<\infty}$ neplatí pro nekonečné. Jednoduše si můžu vždycky dvě různé vybrat, jednu zvednout, jednu snížit a dvojic mám libovolně mnoho.

☺

Stromový rozklad grafu G je strom T takový, že:

- $\forall X_i \in V(T); X_i \subseteq V(G)$
- $\forall e \in E(G); \exists X_i \in V(T); \{u, v\} \subseteq X_i$
- $\forall v \in V(G); T|x_i$, kde $u \in x_i$ je neprázdný souvislý podstrom.

Vrcholům stromu T budeme říkat ***uzly***.

Šířka rozkladu bude $\max_i |X_i| - 1$.

Stromová šířka G je nejmenší možná šířka nějakého jeho stromového rozkladu.

Třetí podmínka je ekvivalentní s $\forall x_i, X_j, X_k$ takové, že X_k je mezi X_i, X_j v T. Potom $X_k \subseteq X_i \cap X_j$.

Pozorování 8 *Šířka grafu je rovna nejvyšší šířce jeho některé komponenty.*

Lemma 4 $tw(G) \geq \omega(G) - 1$

Důkaz:
Sporem. Předpokládejme, že celá klika není uvnitř jednoho uzlu.

Když zorientuji hranu k nějakému chybějícímu vrcholu. Každý má jednu, jedna hrana musí být oboustranná. Chybí hrana.

☻

Tvrzení 1 *Je-li H minorem G, potom $tw(H) \leq tw(G)$.*

Tvrzení 2 *Stačí vzít původní rozklad.*

2.1 Rekurzivně definované třídy grafů

Pro $k \in \mathbb{N}$, ***k-pólový*** graf je takový graf, ve kterém je vyznačeno k vrcholů a vzniká slepováním takových grafů za póly (nesmí se spojit póly stejného) a vyznačí se nových k z nich. Tyto operace jsou dány.

Rekurzivní třída grafů určené (O, B) je množina k-pólových grafů a O je množina operací na k-pólových grafech, je třída grafů, která lze z B pomocí O vytvořit.

Věta 5 *Graf má stromovou šířku nejvýše* $2 \Leftrightarrow$ *je podgrafem nějakého sériově-paralelního grafu.*

Důkaz:
Když máme sériově-paralelní postup, tak tvoříme terminály takové, že terminály jsou v kořeni.

Paralelní udělám tak, že jen je pověsím za společný kořen.

U sériového smíme mít uzly velikosti 3, nacpu jak spojovaný, tak nové terminály do kořene a hotovo. Nad to můžu přidat nový kořen jen s těmi novými terminály (kvůli čistotě).

Opačně, upravíme rozklad, aby byl hezký. Všechny uzly budou obsahovat právě 3 vrcholy (můžu si půjčit). Sousední uzly budou mít společné 2 vrcholy (to se dá také popůjčovat). Můžeme doplnit hrany tak, aby každý uzel indukovat K_3.

Máme list, ten má 3 vrcholy, se sousedem má společné 2 vrcholy. Ten třetí už se nikde nevyskytne. Zapomeňme na něj chvíli a z indukce předpokládejme, že to jde vytvořit. V něm je někde jako list sestavovacího stromu ta zbylá hrana. V době kdy vznikla, tak jsem mohl přidat ještě tu dvouhranu (tu vytvořím sériově, přidám paralelně).

☻

Věta 6 *Sériově-paralelní grafy jsou právě ty, co nemají* K_4 *jako minor.*

Důkaz:
Vezmeme nakreslení (můžeme předpokládat, že je rovinný), vezmeme minor.

Když je sériově paralelní, tak tam K_4 není, kvůli tomu, že K_4 má moc velkou šířku.

Když tam je stupeň velikosti 1, tak je to list. Pokud lze vytvořit zbytek, tak tohle taky. Dále tedy nemějme listy. Obdobně, když má stupeň 2, tak dokážu udělat cestičku. Dále, paralelní hrany.

Tedy, když vyřadíme všechno toto, tak má minimální stupeň 3 a je prostý.

Potom ale bude mít K_4 jako minor. To se dokáže sporem. Vezmeme nejmenší protipříklad. Je 2-souvislý (K_4 neproleze skrz artikulaci). Obdobně i 3-souvislý. Zahodím nějaké u, pak je 2-souvislý. Buď najdu kružnici, která prochází 3 vrcholy. Nebo ne, a potom mám také K_4.

☻

3 Chordální gray

Chordální graf neobsahuje indukovanou kružnici větší než 4.

***k*-strom** je graf, který lze vybudovat z kliky na $k+1$ vrcholech tak, že nový vrchol vždy udělám sousedem existující kliky na k vrcholech.

Každý k-strom je chordální graf. Má rozklad takový, že každý uzel indukuje kliku.

Důsledek 1 *Stromová šířka je nejmenší k takové, že nějaký k-strom obsahuje tento strom.*

Lze je konstruovat pomocí slepovacích operací.

Jsou to průnikové grafy podstromů ve stromě.

Jsou k-degenerované (je stupeň max. stupně k, lze rozebírat).

Má lineárně mnoho hran s počtem vrcholů.

4 Vyhledávací hry a stromová šířka

Jeden hráč je zloděj, druhý hráč je k policejních vrtulníků, hrací plán je graf. Během jednoho tahu policejní vrtulník vzletí a je známo kam, kam se přesouvá, během toho zloděj může libovolně daleko ne přes vrtulníky, pak vrtulník přestane.

Cílem je pro zloděje utíkat navždy, u policistů obsadit zloděje.

Tvrzení 3 *Policie má vyhrávající strategii s $k+1$ vrtulníky $\Leftrightarrow$ stromová šířka je nejvýše k.*

Důkaz:
Když je dostatek vrtulníků, tak máme vždy obsazený některý uzel. Při přesunu sedím na průniku dvou uzlů.

☻

5 Stromová šířka a minorová věta

Věta 7 (Kruskal) *Grafy stromové šířky nejvýše* 1 *jsou dobře uspořádané na minory.*

Věta 8 *Obdobně jako Kruskalova, ale platí pro libovolnou danou stromovou šířku.*

Věta 9 *Pro každý graf G platí ekvivalence, že G je rovinný $\Leftrightarrow$ třída grafů bez G jako minor má omezenou stromovou šířku.*

Věta 10 *Pro každé n existuje k_n takové, že graf šířky alespoň k obsahuje mřížku $n \times n$ jako minor.*

Věta 11 *Nechť $G_0, G_1, \ldots$ jsou grafy a G_0 je rovinný. Potom v G_i najdu buď G_0 jako minor nebo to má omezenou stromovou šířku.*

Hadvigerovo číslo je velikost největšího úplného grafu, který je minor G. Domněnka je, že barevnost je tímto omezená.

6 Řezy

Řez souvislého grafu G je množina $S \subseteq V(G)$ taková, že $G \backslash S$ má více než jednu komponentu.

Tvrzení 4 *Nechť T je stromový rozklad souvislého grafu G. Potom $\forall (X_i, X_j) \in E(T)$ platí alespoň jedno z:*

- *$X_i \cap X_j$ je řez v G.*
- *Všechny uzly za X_i jsou podmnožiny X_j.*
- *Opačně.*

Důkaz:
Sporem. Ukážeme, že neplatí ani jedno a najdeme tam cyklus v tom stromovém rozkladu.

☻

Řezem množiny množiny $W \subseteq V(G)$ je $S \subseteq V(G)$ takové, že alespoň dva vrcholy W patří do různých komponent.

Kliku takto nepřeříznu, cokoliv jiného ano.

Pozorování 9 *Pro každou množinu $W \subseteq V(G)$ a každý rozklad T grafu G platí, že $W \subseteq v \in V(T)$ nebo má řez tvaru $X_i \cap X_j; (X_i, X_j) \in E(T)$.*

Důkaz:
Nechť není v rámci jednoho uzlu. Takže $\forall X_i \exists u \in W \setminus X_i$. Orientuji hranu z X_i směrem ke komponentě obsahující u. Existuje obousměrně orientovaná hrana. Řez na této hraně je oddělí.

☻

Řez S množiny W nazveme ***dobrým***, pokud žádná z komponent $G \setminus S$ neobsahuje více než $\frac{|W|}{2}$ vrcholů z W.

Pozorování 10 *Je-li $tw(G) \leq k$, potom každá W má dobrý řez velikosti nejvýše $k+1$.*

Důkaz:
Vyzkouším řez každý vrchol, existuje-li velká komponenta, orientujeme hranu směrem k ní. Vznikne obousměrná hrana.

☻

Věta 12 (Lipton-Tarjan) *Každý rovinný graf na n vrcholech má řez S velikosti nejvýše $2\sqrt{2n}$ takový, že každá komponenta $G \setminus S$ má méně než $\frac{2}{3}n$.*

Důkaz:
Označme $k := \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$. BÚNO G je rovinná triangulace.

C bude řez a zároveň cyklus, ne nutně indukovaný. Zvolíme C tak, aby $|C| \leq 2k$, vnějšek $|B| \leq \frac{2}{3}n$ a aby $|A| - |B|$ co nejmenší (A je vnitřek).

Předpokládejme pro spor, že vnitřek nám vyjde příliš veliký.

D bude podgraf určený hranami, které jsou nakresleny na C nebo uvnitř C.

Označíme $\forall u, v \in C; c(u,v)$ jako vzdálenost v C a $d(u,v)$. Je vidět, že $d(u,v) \leq c(u,v)$.

Dokážeme, že vždy máme rovnost. Pro spor předpokládáme, že $d(u,v) < c(u,v)$. Vezmeme nejbližší takové u, v. Uvnitř mám tedy zkratku, to nám dělí na dvě části. V tom případě ale můžu udělat lepší volbu přes tu zkratku. Jediné, co musím udokazovat je, že mi B moc nenaroste, ale protože A bylo moc velké a ukrojím max polovinu, tak zbude alespoň $\frac{1}{3}$ pro nové A.

Nyní, když budeme předpokládat, že C je moc dlouhé a nejsou tam žádné zkratky, tak je uvnitř příliš mnoho vrcholů. To udělám přes protilehlé vrcholy a cesty mezi nimi, ty cesty jsou disjunktní (kdyby neexistovaly cesty, tak by existoval řez, to by byla cestička a byla by příliš krátká). Tam je ale už moc vrcholů (je jich kvadraticky).

☻

Tvrzení 5 *Nechť G je rovinný. Potom $tw(G) = O(\sqrt{|V(G)|})$.*

7 Dolní mez na stromovou šířku

Houští je systém podmnožin $\mathcal{B}$ nad vrcholy, pokud platí:

- $B \in \mathcal{B}$, potom B indukuje souvislý podgraf.
- $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, potom $B_1 \cup B_2$ indukuje souvislý podgraf.

K tomu druhému, buď se překrývají, nebo je mezi nimi hrana.

Říkáme, že množina $W \subseteq V_G$ ***drží*** houští $\mathcal{B}$, pokud $B \cap W \neq \emptyset \forall B \in \mathcal{B}$. ***Řád*** houští je největší velikost W.

Tvrzení 6 *Má-li G houští řádu k, potom $tw(G) \geq k - 1$.*

Důkaz:
Sporem. Kdyby ne, tak neexistuje X_i, který drží $\mathcal{B}$. Zorientuji hrany k nějaké B_i, která má prázdný průnik s X_i. Budu mít obousměrnou hranu.

☻

Věta 13 (minorová pro tw, Seamur, Thomas) *Pro každé $k \geq 1$ platí, že G má houští řádu alespoň $k \Leftrightarrow$ má stromovou šířku $k - 1$.*

Důkaz:
Budu dokazovat silnější. Nechť G nemá houští řádu $k + 1$. Potom pro každé houští $\mathcal{B}$ existuje rozklad T takový, že každý uzel velikosti alespoň $k + 1$ je list v T a nedrží $\mathcal{B}$.

Vezmeme houští $\mathcal{B} = \{V_G\}$. Potom T podle předchozího odstavce nemá velké uzly.

Tedy, jak dokážu to silnější? Všechna houští setřídím podle počtu množin velikosti nejvýše k, které ji drží.

Když mám dáno $\mathcal{B}$, zvolím W nejmenší, které ji drží (což je nejvýše k). Označme $A_1, \ldots, A_r$ komponenty $G \backslash W$.

$\forall i \in 1 \dots r$ má graf $G_i := G|W \cup A_i$ má rozklad T_i takový, že W je uzlem T_i a každý uzel velikosti alespoň $k+1$ je listem a nedrží $\mathcal{B}$.

První případ je, když $\mathcal{B} \cup \{A_i\}$ není houští. Potom T_i bude nahoře W, pod tím $A_i \cup N(A_i)$. Tím pádem existuje B, že $B \cup A_i$ není souvislý (jinak by $\mathcal{B} \cup \{A_i\}$ bylo houští), proto $N(A_i)$ není v $\mathcal{B}$, proto ani $A_i \cup N(A_i)$ nedrží.

Druhý případ je, když $B\,\{A_i\}$ je houští $\mathcal{B}'$. V jakém pořadí jsou $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$? Každá množina, která drží $\mathcal{B}'$ drží i $\mathcal{B}$, ale W nedrží B', protože se tam neprotíná. Tu už jsme vyřešili. Splňuje-li T' podmínky pro $\mathcal{B}$, tak pohoda. Nesplňuje-li ji, potom je disjunktní A_i, potom můžeme obdobně $A_i \cup \mathbb{N}(A_i)$ přidat.

☻

Věta 14 (Rovinná mřížková) *Každý rovinný graf, který má stromovou šířku alespoň $30k+1$, pro $k \geq 2$ obsahuje mřížku $k \times k$ jako minor.*

Podmnožina vrcholů W^* je ***silně k-souvislá***, jestliže pro každý řez S velikosti max. k, existuje komponenta $G \backslash S$, která obsahuje alespoň $\frac{2}{3}$ vrcholů W^*.

Důkaz:
Vezmeme za W takovou množinu vrcholů, že její nejmenší dobrý (žádná komponenta nemá více než polovinu vrcholů) řez S má největší možnou velikost.

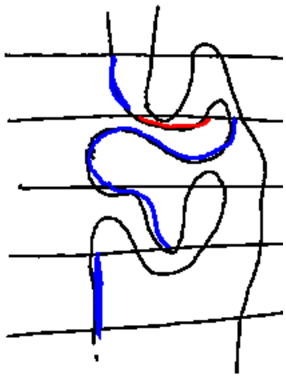
Velikost tohoto řezu je alespoň $10k+1$. Jinak by šlo zkonstruovat rozklad šířky nejvýše $30k+1$. Obsahuje silně $5k$-souvislou množinu.

Nechť W není silně $5k$-souvislá. Potom vezmeme řez S_1, který této silné $5k$-souvislosti zabraňuje. S_1 nesmí být dobrý, takže existuje komponenta C, která obsahuje více než polovinu, ale méně než $\frac{2}{3}$ vrcholů. Tuto část označíme jako $W' := W \cap C$. Pokud není silně $5k$-souvislá, můžu zopakovat. Tím získám S_2, $S := S_1 \cup S_2$, ten je ale dobrý, má velikost $10k$, což je spor. První $W^?$, co se mi líbí, prohlásím za W^*.

Vezmu nakreslení G a určíme uzavřenou křivku φ takovou, že protíná G jen ve vrcholech, prochází nejvýše $4k$ vrcholy, φ se svým vnitřkem obsahuje alespoň $\frac{2}{3}$ vrcholů W^*, celkově ale obsahuje nejméně vrcholů, co jde. Zcela zřejmě existuje nějaká taková existuje.

BÚNO obsahuje právě $4k$ vrcholů. Označím vrcholy podél této křivky jako $v_1, \dots, v_{4k}$. Lze nalézt k disjunktních cest $(r_1, \dots, r_k)$, které spojují v_1 a v_{3k}, v_2 a v_{3k-1}, $\dots$, všechny uvnitř φ. To dokážeme sporem. Potom existuje řez, které ty dvě strany od sebe odděluje. Přidáme řez k φ a máme řez velikosti nejvýše $5k$. Ty dvě části ale tedy neobsahují dostatek vrcholů. Z toho odvodíme, že W^* není silně $5k$-souvislá.

Podobně tam najdu i cesty kolmé na toto. To už se ukontrahuje, beru třeba první svislík zleva (modrý):



Pokud by na vodorovné něco překáželo od té další svislé, tak to přesměruju na objížďce na svislé (červený).

☻

8 Jiné druhy šířek

8.1 Cestová šířka

Cestová šířka $pw(G)$ je definovaná skoro stejně jako stromová šířka, jen se nepožaduje strom, ale cesta.

Je vidět, že $tw(G) \leq pw(G)$.

Tvrzení 7 *Platí, že* $pw(T_k) \geq k$*, kde* T_k *je zakořeněný strom na* $k+1$ *úrovních, kde každý vnitřní vrchol má* 3 *syny.*

Důkaz:
Indukcí podle k. Vezmu menší stromy $T_{k-1}, T'_{k-1}, T''_{k-1}$, dám jim společný kořen. Vezmu cestový rozklad tohoto, mám uzly $X_1, \ldots, X_l$, BÚNO X_1 obsahuje vrchol T''_{k-1} a X_l obsahuje vrchol T''_{k-1} nebo T'_{k-1}. Chci dokázat, že $pw(T_k) \geq pw(T_{k-1}$. Mám někde kus pro T''_{k-1}. Ale celé je to souvislé, musím tam přidat ještě něco, aby se to nerozpadlo.

☻

Tvrzení 8

$$pw(G) = O(tw(G) \cdot \log n)$$

Důkaz:
Vezmu optimální stromový rozklad a zakořením. Definujeme značkování. $z(X_i) := 1$, je-li X_i list. Jsou-li $X_{j_1}, \dots, X_{j_i}$, potom vezmu dvě největší značky a vezmu bud tu první, nebo druhou $+1$ (co je větší z toho). Tedy, na stoupnutí značky ji potřeba, aby tam byly dvě děti největší značky. Tedy, značka kořene je nejvýše $\log n$.

Rozklad uděláme tak, zřetězím za sebe a v prostředku vždy přidám jeden krajní, tedy pokaždé naroste nejvýše o stromovou šířku. Velikost odpovídá.

Jediný problém je se souvislým výskytem vrcholu. Ale nic nemůže utéct, protože nalevo od toho je X_j, které je jiný uzel, tedy to musí jít skrz něj.

☻

Existují problémy, které jsou těžké pro stromovou šířku, ale ne pro cestovou.

Lze charakterizovat jako počet policistů nutných k chycení neviditelného zloděje.

8.2 Větvová šířka

Pro dané rozdělení hran na A a $\overline{A}$ řeknu, že váha rozdělení je definována jako počet vrcholů náležících hranám z obou polovin.

Větvený rozklad grafu G je strom B, kde všechny vrcholy jsou stupně buď 3 nebo 1. Listy B odpovídají hranám. Potom každá hrana $f \in E(B)$ určuje rozdělení $A, \overline{A}$. Šířka rozkladu je maximum ze všech vah rozdělení podle hran.

Větvená šířka grafu je nejmenší možná šířka nějakého rozkladu.

Tvrzení 9 *Je-li* $bw(G) \geq 2$, *potom* $bw(G) \leq tw(G) + 1 \leq \lfloor \frac{3}{2} bw(G) \rfloor$.

Důkaz:
Pro každou $e \in E$ najdu $X_i \in T$ a zavěsím k X_i jako list. Poté budu podrozdělovat a kontrahovat.

Opačná nerovnost, budu doplňovat do všech uzlů mezi.

☻