ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE

ZU (1x)

(1.) Definícia 1:

- $F(x)$ sa nazýva účelová (cieľová, objektívna) funkcia
- M sa nazýva množina prípustných riešení
- každý prvok $x \in M$ sa nazýva prípustným riešením
- také $x^0 \in M$, pre ktoré platí $F(x^0) \overset{\geq}{\leq} F(x)$, $x \in M$ sa nazýva optimálnym riešením

Poznámka:

Platí: $\max F(x) = -\min -F(x)$

Niekedy je úloha $\sup\limits_M (\inf\limits_M) F(x)$

(2.) Definícia:

Úlohou LP v normálnom tvare nazývame úlohu

$$\max_M \mathbb{c}^T x,\ M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbb{b},\ x \geq 0\},\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbb{c} \in \mathbb{R}^n$$

Konvexné programovanie

$\min\limits_M F(x)$, $F(x)$ a funkcie g_j s popisom M t.j. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \dots, m\}$

sú konvexné. Patrí sem úloha $\max\limits_M F(x)$, kde $F(x)$ a $g(x)$ sú konkávne,

$M \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0,\ j = 1, \dots, m\}$.

gradientné metódy = metódy prípustných smerov

Celočíselné programovanie

úlohy LP: $\min\limits_{M_C} \mathbb{c}^T x$, $M_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mathbb{b},\ x \geq 0,\ x_i \in \mathbb{Z},\ i \in C\}$, $C \subset \{1, \dots, n\}$

Optimalizačné procesy

- spojité rozhodovacie problémy

Semiinfinitné programovanie

$\max\limits_M \mathbb{c}^T x$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{a}(t) \leq b(t)\}$ kde pri pevnom $t \in T \subset \mathbb{R}^m$ je

$\mathbb{a}(t) \in \mathbb{R}^n$, $b(t) \in \mathbb{R}$, $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^n$, T je kompaktná a konvexná

$\hookrightarrow$ lineárna semiinfinitná úloha

(7.) Výhodná simplexová tabuľka

E	A_N	$\mathbb{b}$
$0 \ \dots \ 0$	$\mathbb{c}_N - \mathbb{z}_N$	$-c_0$

kde $\mathbb{z}_N = \mathbb{c}_B^T A_N$

Tabuľka v k-tom kroku: (predpokladáme, že E je na posledných miestach)

D	E	d_0
$c_N - z_N$	$0 \dots 0$	$-c_0$

(7.) Poznámka ku ε-modifikovanej úlohe:

Ak nemáme jednoznačne určený kľúčový riadok, tak tvoríme minimá z podielov prvkov prvého stĺpca tabuľky ku prvkom kľúčového stĺpca, ktoré pripadajú do úvahy ako pivoty. Môže sa stať, že niektorých z možných kandidátov na pivota vyškrtneme. Potom berieme do úvahy druhý stĺpec tabuľky, potom tretí a tak ďalej. Vzhľadom k tomu, že v tabuľke existuje jednotková matica tak musíme ~~vždy~~ po konečnom počte krokov nájsť pivota jednoznačne. Potom vykonáme transformáciu tabuľky.

(8.)

Veta:

Ak sú x^1, x^2 2 rôzne optimálne riešenia úlohy LP, potom každý bod úsečky $u(x^1, x^2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$ je tiež optimálnym riešením úlohy LP.

Dôkaz:

Pretože $c^T x^1 = c^T x^2 = c_0$, platí pre každé $x \in u(x^1, x^2)$:

$$c^T x = c^T(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) = \lambda_1 c^T x^1 + \lambda_2 c^T x^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) c_0 = c_0$$

Tvrdenie:

M_{opt} je rovná uzáveru steny M určitej dimenzie.

Bez dôkazu (príliš rozsiahly)

Príklad: < Veta 1: ...

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5,\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2,\ x_1, \dots, x_4 \geq 0\}$$

Ak $J = \{1\}$, potom

$$M_{opt} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5,\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 2,\ x_1 = 0;\ x_2, x_3, x_4 \geq 0\}.$$

Dôsledok:

Ak všetky $c_j - z_j > 0$ $(j \in N)$, potom x^0 je jediným optimálnym riešením

Poznámka:

Ak v poslednej (optimálnej) tabuľke máme nejaké $c_j - z_j = 0$ $j \in N$, potom môžeme zvoliť príslušný (j-ty) stĺpec za kľúčový.

1) Ak nájdeme pivota ($\exists$ aspoň jedna kladná hodnota v d_j^0), označme ho $d_{rj} > 0$, potom nové prípustné bázické riešenie má hodnotu cieľovej funkcie

$$-c_0' = -c_0 - \frac{(c_j - z_j)\, d_{rj}}{d_{rj}} = -c_0,$$

teda optimálna hodnota cieľovej funkcie ostala zachovaná a dostali sme tedа nové optimálne riešenie.

2) Ak platí $d_j \le 0$ (neexistuje pivot), potom ∞ hrana

$$h = \{x \in R^n \mid x = x^0 - d_j x_j,\ x_j \ge 0\}$$

predstavuje optimálne riešenie tvaru, $x_k = 0$, $k \in N \setminus j$.

Z prepisových vzorcov $\Rightarrow$
$$x_B = d^0 - D x_N, \quad x_N = 0 - (-x_N) \quad \text{pre } \forall x \in M.$$

Ak položíme x_k, $k \in N \setminus j \Rightarrow$
$$x_B = d^0 - d_j x_j \ge 0, \quad x_N = 0 - (-0)$$

Pre $x \in h$:
$$c^T x = c_0 + \sum_{k \in N} (c_k - z_k) x_k = c_0 + \underbrace{(c_j - z_j)}_{=0} x_j = c_0$$

lebo $x_k = 0$, $k \in N \setminus j$

Konvexnou kombináciou získaných ďalších optimálnych riešení nájdeme celú M^{opt}, alebo jej časť.

(12.)

REVIDOVANÁ SM – zbavenie sa EB (jednotkovej matice)

(10.)

$$\begin{array}{c|c|c|} & y' & \\ \hline x' & A & b \\ \hline & -c & 0 \\ \hline \end{array}$$

(P') $\max_{M_1'} c^T x$, $M_1' = \{(x, x') \in R^{n+m} \mid Ax + x' = b,\ x, x' \ge 0\}$

(D') $\min_{M_2'} b^T y$, $M_2' = \{(y, y') \in R^{m+n} \mid A' y - y' = c,\ y, y' \ge 0\}$

11.) $y^0 \rightsquigarrow x^0$

Ak y^0 je opt. riešením (D) a ak označíme $I_2=\{i\in\{1,\dots,m\} \mid y_i^0>0\}$, $J_2=\{j\in\{1,\dots,n\} \mid a_j^T y^0 > c_j\}$,

potom $M_2^{opt}=\{x^0\in M_1 \mid a_i x^0 = b_i,\ i\in I_2,\ x_j^0,\ j\in J_2\}$.

Poznámka:

Ku ľubovoľnej úlohe LP $\max\limits_{M_1^*} c^T x$,
$$M_1^* = \left\{x \;\middle|\; \begin{array}{ll} a_i x = b_i \quad i\in I_1, & x_j\ge 0 \quad j\in J_1 \\ a_i x\ge b_i \quad i\in I_2 & x_j\in\mathbb{R} \quad j\in J_2 \\ a_i x\le b_i \quad i\in I_3 & \end{array}\right\}$$

↳ neobmedzené, čo do znamienka

pri označení
$$\left.\begin{array}{ll} -a_i x \le -b_i & i\in I_2 \\ a_i x\le b_i & i\in I_3 \end{array}\right\} a_i' x \le b_i' \quad i\in I_2\cup I_3$$

je duálna úloha $\min\limits_{M_2^*}\{\sum_{i\in I_2\cup I_3} b_i' y_i + \sum_{i\in I_1} b_i y_i\}$,
$$M_2^*=\left\{y \;\middle|\; \begin{array}{ll} a_j^T y = c_j \quad j\in J_2, & y_i\in\mathbb{R} \quad i\in I_1 \\ a_j^T y\ge c_j \quad j\in J_1 & y_i\ge 0 \quad i\in I_2\cup I_3 \end{array}\right\}$$

13.)

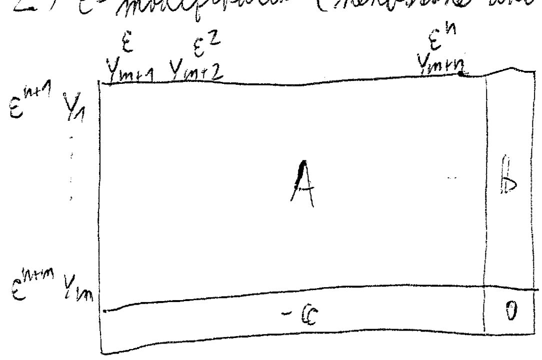
Myšlienka duálnej SM: Úlohy (P) a (D) sa riešia súčasne. Postupuje sa po dvojiciach bázických riešení oboch úloh s rovnakými hodnotami účelových funkcií.

15.)

Prípad $d_{00}^* = d_{00}$ nastane iba v prípade degenerovaného prípustného bázického riešenia (D'), t.j. $\overline{d}_{0r}=0$ pre nejaké r. Aby nenastal cyklus (kedy by DSM zlyhala), dá sa postupovať 2 spôsobmi:

1.) Blandove pravidlo: Za index hľadaného stĺpca sa berie
$$r^* = \min\left\{r \;\middle|\; \frac{\overline{d}_{0r}}{|d_{sr}|} = \min_{\substack{j\in N \\ d_{sj}<0}} \frac{\overline{d}_{0j}}{|d_{sj}|}\right\}$$

2.) ε-modifikácia (nenastane ani degenerácia)



$y' = -c + E\varepsilon^1 - A^T\varepsilon^2$, kde $\varepsilon^1=(\varepsilon^1,\varepsilon^2,\dots,\varepsilon^n)$
$\varepsilon^2 = (\varepsilon^{n+1},\dots,\varepsilon^{n+m})$

kde $\varepsilon>0$ je ľubovoľne malé

$\Rightarrow y' > 0$

Príklad:

(P) $\max\limits_{M_1}\{-x_1-2x_3\}$

$$M_1=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_1+2x_2-x_3 \le -4, \\ 2x_1+x_2-2x_3 \le -2, \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{array}\right\}$$

(D) $\min\limits_{M_2}\{-4y_1-2y_2\}$

$$M_2=\left\{y\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -y_1+2y_2 \ge -1 \\ 2y_1+y_2\ge 0 \\ -y_1-2y_2\ge -2 \\ y_1,y_2\ge 0 \end{array}\right\}$$

$\boxed{20}$ 3x

ekvivalentné úlohy:

(P') $\max\limits_{M_1'} \{-x_1 - 2x_3\}$ (D') $\min\limits_{M_2'} \{-4y_1 - 2y_2\}$

$$M_1' = \{x, x' \mid -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -4$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = -2$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0\}$$

$$M_2' = \{y, y' \mid -y_1 + 2y_2 - y_3 = -1$$
$$2y_1 + y_2 - y_4 = 0$$
$$-y_1 - 2y - y_5 = -2$$
$$y_1 \cdots y_5 \geq 0\}$$

Východzia tabuľka:

	y_3 / x_1	y_4 / x_2	y_5 / x_3	b	
y_1 x_4	-1	2	-1	-4	s
y_2 x_5	2	1	-2	-2	
$-c$	1	0	2	0	
	r				

Východzie príp. báz. riešenie pre (D'):

$(y_1 = 0, y_2 = 0,$
$y_3 = 1, y_4 = 0, y_5 = 2)$

Východzie báz. riešenie pre (P'):

$(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
$x_4 = -4, x_5 = -2)$

Hodnoty cieľových funkcií $= 0$.

$$\left.\begin{array}{l} s = 1 \\ r = \min\limits_{\text{index}} \left\{ \underset{1}{\frac{1}{|-1|}}, \underset{2}{\frac{2}{|-1|}} \right\} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{pivot } d_{sr} = d_{11} = -1$$

Po transformácii:

	y_1 / x_4	y_4 / x_2	y_5 / x_3		
y_3 x_1	-1	-2	1	4	
y_2 x_5	2	5	-4	-10	s
	1	2	1	-4	
			r		

(25) Definícia:
Obor riešiteľnosti úlohy (2) sa nazýva množina

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \text{úloha (2) je riešiteľná}\}$$

Definícia:

Ak pre pevné $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ existuje optimálne riešenie úlohy (2) x_1, potom interval

$$\Lambda_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \min\limits_{M} (c + \lambda c')^T x = (c + \lambda c')^T x_1\} = [\underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1]$$

sa nazýva obor stability riešenia x_1.

Definícia:

Funkcia $\varphi(\lambda) = \min\limits_{M} (c+\lambda c')^T . x$; $\lambda \in \Lambda$ sa nazýva funkcia ~~stability~~ riešiteľnosti úlohy (2).

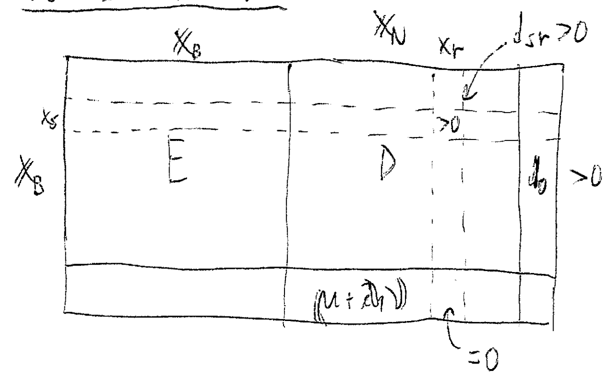
Poznámka:

Ak je zadaný interval I pre parameter λ, môže sa riešiť úloha

$$\min_{M \times I} (c+\lambda c')^T . x$$

27. 2. strana

Dôkaz 3V LPP:



Z poslednej tabuľky SM, ktorá vrátila optimálne riešenie x_1:

$$\bar\lambda_1 = \inf_{I_2}\left\{-\frac{\mu_j}{\nu_j}\right\} = \min_{\nu_j<0}\left\{-\frac{\mu_j}{\nu_j}\right\} = -\frac{\mu_r}{\nu_r}$$

$$I_2 = \{j \in N \mid \nu_j < 0\}$$

a pre $\lambda \in \langle \underline{\lambda}_1, \bar\lambda_1 \rangle$ je x_1 optimum, potom $\mu + \bar\lambda_1 \nu \geq 0$ a tiež platí $\mu_r + \bar\lambda_1 \nu_r = 0$ (zhora uvedenej rovnosti). Sú 2 možnosti:

1.) $d_r \leq 0$. Z 2V SM $\Rightarrow$ pre také λ, pre ktoré $\mu_r + \lambda\nu_r < 0$, neexistuje riešenie úlohy (2). $\nu_r < 0 \Rightarrow \lambda > -\frac{\mu_r}{\nu_r} = \bar\lambda_1$ a pre $\lambda > \bar\lambda_1$ neexistuje riešenie.

2.) $d_r \not\leq 0 \Rightarrow \exists$ kladný prvok kľúčového stĺpca. Zvolí sa r ako kľúčový stĺpec a kľúčový riadok s sa nájde ako v SM. Vykoná sa 1 krok SM a získa $x_2 \rightarrow$ susedný vrchol vrcholu x_1. Podľa 1. LPP ($\bar\lambda_1$ ako λ_1 a x_2 ako x_1) $\exists$ uzavretý interval $\langle \underline{\lambda}_2, \bar\lambda_2 \rangle$ taký, že

- $\forall \lambda \in \langle \underline{\lambda}_2, \bar\lambda_2 \rangle$ je x_2 optimálnym riešením,
- $\langle \underline{\lambda}_2, \bar\lambda_2 \rangle$ je najväčší interval s touto vlastnosťou,
- a $\bar\lambda_1 \in \langle \underline{\lambda}_2, \bar\lambda_2 \rangle$. $\Rightarrow \bar\lambda_1 \geq \underline{\lambda}_2$

Po transformácii tabuľky sa posledný riadok zmení nasledovne:

$(\mu + \bar\lambda_1 . \nu)' = \mu + \lambda_1 . \nu \geq 0$ ... teda sa nezmení

Výpočet nových hodnôt: $\mu_j' = \mu_j - \frac{d_{sj} . \mu_r}{d_{sr}}$ $\quad \nu' = \nu_j - \frac{d_{sj} . \nu_r}{d_{sr}}$

$$\underline{\lambda}_2 = \sup_{\nu_j' > 0}\left\{-\frac{\mu_j'}{\nu_j'}\right\}$$

$$\bar\lambda_2 = \inf_{\nu_j' < 0}\left\{-\frac{\mu_j'}{\nu_j'}\right\}$$

Pretože s je index bázickej premennej, tak platí:

$$\nu_s' = \underbrace{\nu_s}_{=0} - \frac{1 \cdot \overbrace{\nu_r}^{<0}}{\underbrace{d_{sr}}_{>0}} \Rightarrow \nu_s' > 0 \Rightarrow \underline{\lambda_2} \geq -\frac{\mu_s'}{\nu_s'}$$

Pre dôkaz sporom predpokladajme, že $\bar{\lambda}_1 > \underline{\lambda_2} \Rightarrow \bar{\lambda}_1 > -\frac{\mu_s'}{\nu_s'} \Rightarrow \mu_s' + \nu_s' \cdot \bar{\lambda}_1 > 0$

Špeciálne zo vzťahu: $(\mu + \bar{\lambda}_1 \nu)' = \mu + \bar{\lambda}_1 \nu$ vyplýva:

$$(\mu_s + \bar{\lambda}_1 \nu_s)' = \mu_s + \bar{\lambda}_1 \nu_s = \mu_s' + \bar{\lambda}_1 \nu_s' = 0$$

Pretože x_s bola bázická premenná, platí $\mu_s' = \mu_s$ a $\nu_s' = \nu_s$ (podľa vzťahov)

$\rightarrow$ spor $(\mu_s' + \bar{\lambda}_1 \nu_s) \begin{matrix} > 0 \\ = 0 \end{matrix} \Big\}$ súčasne

Analogicky pre $\underline{\lambda_1}$ (konečné).

$x := x_2$

$y := x_3$

$$\frac{4}{5}x + \frac{4}{3}y \leq 100$$

$$\frac{4}{5}x + y \leq 100$$

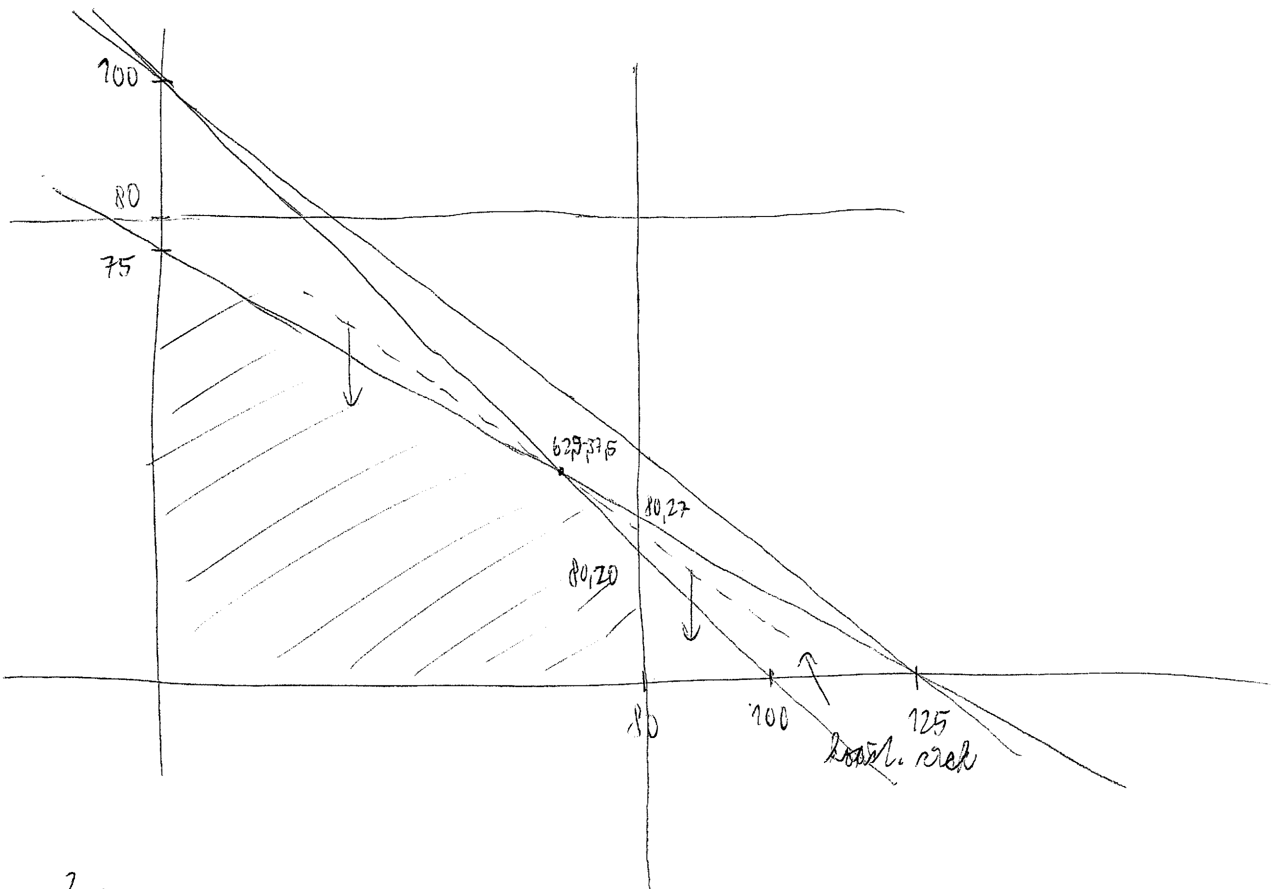
$$x + y \leq 100$$

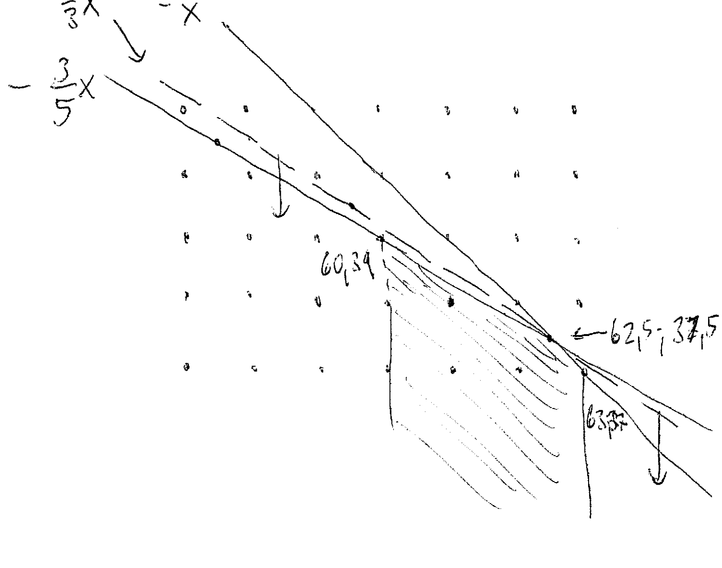
$$x \leq 80$$

$$y \leq 80$$

$4000x + 6000y = zisk$

$y = zisk' - \frac{2}{3}x$





$zisk'_1 = \frac{2}{3} \cdot 60 + 39 = 79$

$zisk'_2 = \frac{2}{3} \cdot 63 + 37 = 79$

1. Gomoryho algoritmus

(1) $\max\limits_{M_C} c^T x$ $\qquad M_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ x_i \in \mathbb{Z},\ i \in C \subset \{1,\dots,n\}\}$

$h(A) = m,\ 1 \leq m < n,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m$

Spojitá úloha: (2) $\max\limits_{M} c^T x$ $\qquad M = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$

1) riešime úlohu (2): a) neexistuje riešenie, pretože $M = \emptyset \Rightarrow M_C = \emptyset \to$ koniec.

Predpoklad: M je obmedzená, $C < 0$.

Tento predpoklad nemusí byť splnený v 1. Gom. alg.

Tu ho máme pre jednoduchosť výkladu.

b) $\exists x^{opt} \in M_C \to x^{opt}$ je riešenie (1) $\to$ koniec

c) $\exists x^{opt} \notin M_C \to$ zavádzame rez (tvoríme sečnú nadrovinu)

Označme $k \equiv \{\min i \in C \mid x_i^{opt} \notin \mathbb{Z}\}$

Predpoklad:

Pre dôkaz konečnosti algoritmu musí platiť $x_0 \equiv c^T x$, $0 \in C$ (t.j. $c^T x \in \mathbb{Z}$).

k-ty riadok z poslednej tabuľky má tvar: $x_k = d_{k0} - \sum\limits_{j \in N} d_{kj} x_j$ $\qquad (x_i^{opt} = d_{k0})$

(3) $$x_k = [d_{k0}] + \underbrace{\boxed{d_{k0}}}_{\substack{>0 \\ <1}} - \sum_{j \in N} [d_{kj}] x_j - \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j \Rightarrow -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j = -x_k + [d_{k0}] - \sum_{j \in N} [d_{kj}] x_j$$

Definujeme

(4) $$R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j = 0\}$$

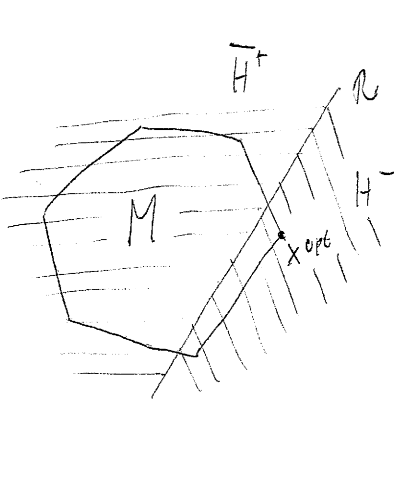
Veta:

Pre nadrovinu R a jej príslušné polpriestory

$$H^- \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j < 0\}$$

$$\bar{H}^+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j \geq 0\}$$

platí $x^{opt} \in H^-$ a $M_C \subset \bar{H}^+$.



Dôkaz:

Pre x^{opt} platí $x_j^{opt}=0$, $j\in N$. Po dosadení do (4) dostaneme

$$-\boxed{d_{k0}} + \sum_{j\in N} \boxed{d_{kj}}\cdot 0 = -\boxed{d_{k0}} < 0 \Rightarrow x^{opt}\in H^-.$$

Zvoľme $x\in M_c$ ľubovoľne pevne a dosaďme do (3):

$$-1 \le -\boxed{d_{k0}} \le \underbrace{-\boxed{d_{k0}} + \sum_{j\in N}\underbrace{\boxed{d_{kj}}}_{\ge 0} x_j}_{\in \mathbb{Z}} \overset{\Leftarrow}{=} \underbrace{-x_k + [d_{k0}] - \sum_{j\in N}[d_{kj}]\, x_j}_{\in\mathbb{Z}}$$

$$-\boxed{d_{k0}} + \sum_{j\in N}\boxed{d_{kj}}\, x_j \ge 0 \Rightarrow x\in \bar{H}^+ \Rightarrow M_c\subset \bar{H}^+$$

Poznámka:

Pretože v ďalšom kroku budeme riešiť úlohu $\max_{M\cap \bar{H}^+} c^T x$, pridáme ku poslednej tabuľke podmienku

$$-\boxed{d_{k0}} + \sum_{j\in N}\boxed{d_{kj}}\, x_j - x_{n+1}\ge 0 \to x_{n+1} = -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j\in N}\boxed{d_{kj}}\, x_j$$

1. ý. riadok

$-\boxed{d_{kj}}$	$-\boxed{d_{k0}}$

Pretože v poslednom stĺpci (hodnoty bázických premenných) je jediná záporná hodnota $-\boxed{d_{k0}}$, zvolíme tento riadok za kľúčový. Po jednej transformácii tabuľky posledný riadok opäť vynecháme.

Napriek tomu vo všeobecnom kroku riešime úlohu $\max_{M\cap\bar{H}_1^+\cap\dots\cap\bar{H}_l^+} c^T x$.

Konečnosť

Za predpokladu, že M je ohraničená a $0\in C$, je 1. Gom. alg. konečný.

Jednotlivé spojité úlohy riešime upravenou DSM, ktorú nazývame lexikografickou DSM (l-metódou).

Definícia:

Prvok $x\in R^n$ nazveme lexikograficky kladný (l-kladný), ak pre $i=\{\min l\in\{1,\dots,n\} \mid x_l\ne 0\}$ platí $x_i>0$. Značenie: $x\succ 0$

Príklad: $x=(0,0,1,-100,-200,-300)\succ 0$

redukce grafu (mel beyt uplnej?...) bude prave ta HK o delce n(pocet vrcholu).

PISEMKA Z 7.2.2006:

1) Navrhnete hladovy algoritmus ktery pro danou vstupni hodnotu x kc navrhne poskladani x z minci v hodnotach 10,5,2,1 kc tak, ze je pouzit minimalni mozny pocet minci.
a) dokazte spravnost algoritmu
b) naleznete mnozinu hodnot minci, pro kterou vas algoritmus nebude fungovat, tj. nedosahne vzdy minima (nemusi se jednat o existujici hodnoty minci)

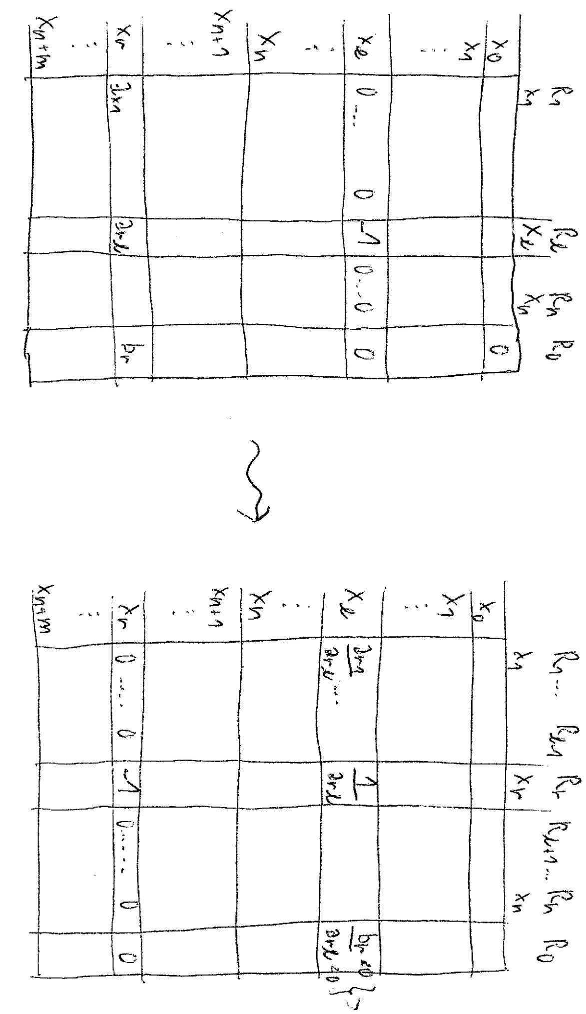
Riešenie: Algoritmus - vyberu nejvetsi hodnotu tolikrat, kolikrat se vejde a opakuji postupne pro mensi. Nefunguje napr. na 10, 9, 1 a x = 27 a mnoha dalsich prikladech. Pozor ale, nestaci podminka, ze nasledujici hodnota je alespon dvojnasobek predchozi, viz napr. 1,4, 9 a x=12.
Dukaz: Uvedomim si, ze v nejlepsim pripade bude max 1 krat 5, 2 krat 2, 1 jedna 1 a pak
rozbor pripadu

2) Mame TSP (obchodni cestujici) Predpokladejte, ze mate k dispozici cernou skrinku resici TSP v polynomialnim case. Navrhnete polynomialni algoritmus, ktery pro Kn a w nalezne HK minimalni delky (vystupem algoritmu bude nalezena HK). Zduvodnete, ze je nalezeny alg. polynomialni.

Riešenie: 1.verze
1)metodou puleni intervalu zjistis k)
2)postupujes po te kruznici: likvidujes hrany z vrcholu ve kterem jsi krome te po ktere jsi prisla (napr. pricitas k jejich delce k) a kdyz ti CS zahlasi ze prestala existovat ta kruznice, tak jsi nasel/la další hranu. Tu pak vratis a pokracujes s vrcholem na jejim druhem konci.
2.verze
Vezmu si prvni vrchol, a ohodnocuju hrany z nej vedouci nejakym z > k (likvidace hran). Kdyz mi CS rekne, ze neexistuje TSP s ohodnocenim <= k, vratim puvodni ohodnoceni teto hrane /u ostatnich nechavam z/ a pokracuju dalsim vrcholem na druhem konci nalezene hrany. Takto mam rozhodovaci problem, ale ja potrebuju optimalizacni, tak se musi dokazat, ze i kdyz budu binarne vyhledavat, tak to porad bude polynomialni. (to mi chybelo, nemel jsem to tedy "podrobne")

3) Problem 3R-SAT (SAT, kazda promenna max 3 vyskyty)
Dokazte ze je NPU.

Riešenie: Prevod ze SAT, pro kazdou promennou tam dam tolik novych a1 .. an, kolikrat se vyskytuje a musim pridat podminku na ekvivalenci a1 <-> a2 ... <-> an. Potom jsem hotov. Ekvivalenci a1 <-> a2 muzu prepsat na (a1 v non a2) & (non a1 v a2), coz bych mel ale moc promennych, figl je v tom, ze misto ekvivalenci napisu implikace do kolecka (to me taky nenapadlo). Cili a1 -> a2 -> a3 -> .. -> an -> a1, tedy (non a1 v a2) & (non a2 v a3)...., tim vyplacam dva vyskyty a jeden mi zbyde do puvodni formule.



Pravidlo transformácie:

1. namiesto kľúčového riadku máme $\boxed{0 \dots 0 \; -1 \; 0 \dots 0 \,|\, 0}$
2. kľúčový stĺpec delíme $-a_{rl}$
3. ostatné stĺpce obvyklým spôsobom

Definícia:

Hovoríme, že x je lexikograficky väčšie ako y (pre $x, y \in \mathbb{R}^n$), ak platí $x - y \succ 0$.

Označme $\tilde{x} \equiv (c^T x, x) = (x_0, x)$, kde $x \in M$ a $\tilde{x}$ budeme nazývať rozšíreným riešením úlohy (2). Množinu všetkých rozšírených riešení označíme $\tilde{M}$ a platí $\tilde{M} = \{(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = c^T x,\ x \in M\}$.

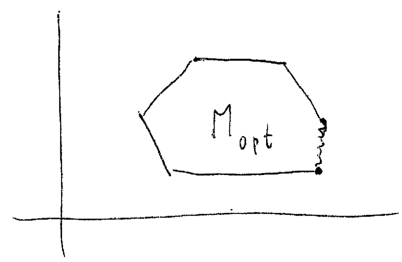
Definícia:

x^* nazveme lexikograficky optimálnym (l-optimálnym) riešením (2), ak platí

$$\tilde{x}^* \succ \tilde{x},\ \text{pre } \forall \tilde{x} \in \tilde{M},\ \tilde{x} \neq \tilde{x}^*$$

Poznámka:

l-optimálne riešenie je jediné a vždy existuje.



Nech máme úlohu v tvare

$$\max_{M_C} c^T x,\ \text{kde } c^T x = x_0$$

$$M_C = \{(x, x') \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + x' = b,\ x, x' \geq 0,\ x_\alpha, x'_\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \in C\}$$

$$C = \{0, 1, \dots, n+m\}.$$

Predpoklad: Príslušná M je obmedzená. $c < 0$.

Z popisu $M = \{x, x' \mid Ax + x' = b;\ x, x' \geq 0\} \Rightarrow x' = b - Ax$

$$x = 0 - (-x)$$

Z cieľovej funkcie: $x_0 = 0 - (-c^T x)$

Východisková l-tabuľka:

	R_1 x_1 … R_n x_n	R_0
x_0	$-c$	0
$x_1, x_2, \vdots, x_n$	$-E$	0
$x_{n+1}, \vdots, x_{n+m}$	A	b

Definícia:

Tabuľku T nazveme l-normálnou, ak platí

$$R_j \succ 0 \ \text{pre } j = 1, \dots, n.$$

Poznámka:

Z predpokladu $c < 0$ plynie, že východisková tabuľka je l-normálna.

Tvrdenie:

Nedegenerované prípustné bázické riešenie v l-normálnej tabuľke je l-optimálne.

Bez dôkazu

Uvedieme 3 vety l-metódy pre 1. krok (platia všeobecne v každom kroku).

1. veta l-metódy

Ak platí $\mathbb{b} \succ 0$ (resp. $\mathbb{b} \geq 0$ a ε-modifikovaná úloha), potom máme l-optimálne riešenie ($x^{opt} = \mathbb{b}$, $x^{opt} = 0$).

Dôkaz:

Rovnaký ako v DSM.

2. veta l-metódy

Ak existuje r taký, že $b_r < 0$, $a_{rj} \geq 0$ $(j = 1, \dots, n)$, potom je $M = \emptyset$ a neexistuje riešenie (2) a teda ani (1).

3. veta l-metódy

Nech nie sú splnené predpoklady 1. ani 2. vety l-metódy.

Označme $r \equiv \min \{ i \in \underbrace{\{n+1, \dots, n+m\}}_{B} \mid b_i < 0 \}$, $\text{lex.} \min\limits_{a_{rj} < 0} \frac{R_j}{|a_{rj}|} \equiv \frac{R_l}{|a_{rl}|}$.

Jednoznačne určený prvok $a_{rl} < 0$ je pivotom.

Po transformácii tabuľky dostaneme opäť l-normálnu tabuľku.

Dôkaz:

$$„l“: \quad R'_l = \frac{\overbrace{R_l}^{\succ 0}}{\underbrace{-a_{rl}}_{>0}} \succ 0 \qquad „j \neq l“: \quad R'_j \overset{\text{Gauss. el. metóda}}{=} \underbrace{R_j}_{\succ 0} - \frac{a_{rj} \cdot \overbrace{R_l}^{\succ 0}}{\underbrace{a_{rl}}_{<0}} \succ 0$$

a) $a_{rj} \geq 0 \rightarrow$ OK

b) $a_{rj} < 0$. Z definície $l \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{R_l}{a_{rl}} \succ \frac{R_j}{\underbrace{a_{rj}}_{<0}} \Rightarrow R_j \succ \frac{R_l \cdot a_{rj}}{a_{rl}} \Rightarrow R'_j \succ 0 \quad \Rightarrow \text{l-normálna tabuľka}$$

$$„0“: \quad R'_0 = R_0 - \frac{\overbrace{b_r}^{<0} \cdot \overbrace{R_l}^{\succ 0}}{\underbrace{a_{rl}}_{<0}} \prec R_0 \quad \square$$

Poznámka:

l-metóda je konečná, pretože máme konečný počet báz a platí $R'_0 \prec R_0$ a teda sa nikdy nemôžeme dostať do bázy, ktorú sme skôr uvažovali.

Metódy riešenia úloh nelineárneho programovania

1. Metódy prípustných smerov (gradientné)
   Vyjdeme z prípustného riešenia úlohy a) hľadáme smer, v ktorom funkcia klesá,
   b) hľadáme dĺžku kroku
2. Metódy založené na K-T podmienkach
   Výhodné u kvadratického programovania: $\min_M \{x^T C x + p^T x\}$, $M = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$
3. Metódy vonkajšej aproximácie (metódy nepriamych rezov)
   Množinu prípustných riešení úlohy nahradíme „jednoduchšou" množinou (kôvexnym polyédrom) a riešime novú úlohu. Ak leží optimálne riešenie v množine pôvodnej, OK.
4. Metódy vnútornej aproximácie

Metóda Franka a Wolfa

Úloha: $\min_M F(x)$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

F – konvexná a má spojité 1. parciálne derivácie $O \supset M$, O – otvorená mn.

Predpoklad:

hodnota x v r-tom kroku

Funkcia $\nabla F(x^r)(x - x^r)$ je zdola obmedzená na M pre $\forall x^r \in M$.

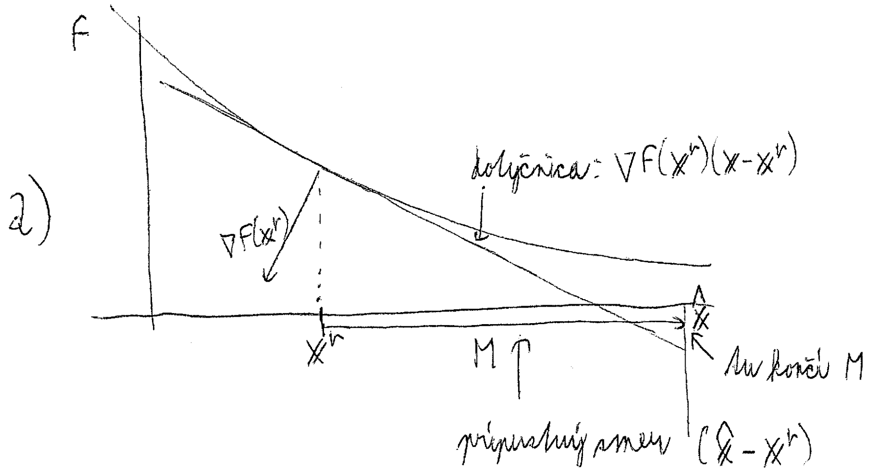
(Tento predpoklad je splnený, keď je M obmedzená.)

Nápad:

Vyjdeme z vrchola M. Riešime $\min_M \theta$: – neexistuje riešenie $\Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow$ zadaná úloha nemá riešenie

nájdeme optimálny vrchol $x^1 \in M$

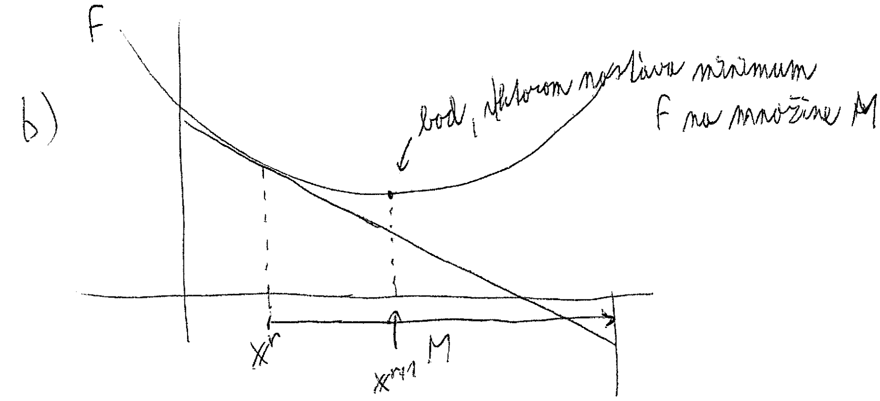
... pokračujeme. Nech $x^r \in M$. Potom:



$F(x^r + \lambda(\hat{x} - x^r))$

Dĺžka kroku: $\hat{x} - x^r$

$x^{r+1} \equiv \hat{x}$



Poznáme $x^r \in M$.

Pretože $\min_M \nabla F(x^r)^T(x - x^r)$ dáva rovnaké opt. riešenie ako $\min_M \nabla F(x^r)^T x$, obmedzíme sa na túto poslednú hodnotu. Riešime úlohu $\min_M \nabla F(x^r)^T x$.

Podľa predpokladu existuje opt. riešenie $\hat{x} \in M$. Teda:

$$\nabla F(x^r)^T(\hat{x} - x) \le 0,\ x \in M. \qquad \nabla F(x^r)^T(\hat{x} - x^r) \le 0.$$

1. Veta:

2. Veta:

Nech $\nabla F(x^r)^T(\hat{x}-x^r)<0$, $\nabla F(\hat{x})^T(\hat{x}-x^r)\leq 0$, potom položíme $x^{r+1}=\hat{x}$, pričom platí $F(x^{r+1})<F(x^r)$.

Dôkaz:

Uvažujme fcia $F(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r))$ pre $\lambda\in\langle 0,1\rangle$.

$$\varphi(\lambda)\equiv F(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r)),\quad \lambda\in\langle 0,1\rangle$$

$$\varphi'(\lambda)=\nabla F(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r))^T(x^{r}-x^r)$$

$$\varphi'(0^+)=\underbrace{\nabla F(x^r)^T(\hat{x}-x^r)<0}_{\text{podľa predpokladu}}\Rightarrow \varphi(\lambda) \text{ klesá v } \langle 0,\lambda^0\rangle,\ \lambda^0>0\Rightarrow \varphi(0)<\varphi(\lambda^0)$$

Chceme overiť, či platí $\min\limits_{\langle 0,1\rangle}\varphi(\lambda)=\varphi(1)$.

Pre dôkaz sporom predpokladajme, že $\exists\lambda\in\langle 0,1\rangle$ tak, že $\varphi(\lambda)<\varphi(1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r))<F(\hat{x}).$$

$$0>F(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r))-F(\hat{x})\geq\nabla F(\hat{x})^T(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r)-\hat{x})=$$

$$=\underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0}$$

3. Veta:

Nech $\nabla F(x^r)^T(\hat{x}-x^r)<0$, $\nabla F(\hat{x})^T(\hat{x}-x^r)>0$, potom definujeme $x^{r+1}\equiv x^r+\lambda_r(\hat{x}-x^r)$, pričom $F(x^{r+1})<F(x^r)$ a λ_r je riešením rovnice $\nabla F(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r))^T(\hat{x}-x^r)=0$.

Dôkaz:

Funkcia $\nabla F(x^r+\lambda(\hat{x}-x^r))^T(\hat{x}-x^r)$ je spojitá na $\langle 0,1\rangle$.

Pri značení z dôkazu vety 2 ide o $\varphi'(\lambda)$.

Keďže $\varphi'(0)=\nabla F(x^r)^T(\hat{x}-x^r)\underbrace{<0}_{\text{predpoklad}}$

a $\varphi'(1)=\nabla F(\hat{x})^T(\hat{x}-x^r)>0$, musí $\exists\lambda_r\in\langle 0,1\rangle$ tak, že $\varphi'(\lambda_r)=0$, t.j. $\nabla F(x^r + \lambda_r(\hat{x} - x^r))(\hat{x} - x^r) = 0 \Rightarrow$ našli sme λ_r také, že $x^{r+1} = x^r + \lambda_r(\hat{x} - x^r) \in M$.

$F(x^r + \lambda_r(\hat{x} - x^r)) < F(x^r)$, lebo $\min_{\langle 0,1 \rangle} \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_r)$

platí $\varphi'(\lambda_r) = 0$.

Algoritmus (zhrnutie horeuvedeného)

Úvodný krok: Riešme $\min_M \theta$. Ak neexistuje riešenie $\rightarrow$ koniec, $M = \emptyset$.

Bežný krok r:

1. Poznáme $x^r \in M$. Nech optimálne riešenie úlohy $\min_M F(x^r)^T(x - x^r)$ je $\hat{x} \in M$.
2. Ak je $\nabla F(x^r)^T(\hat{x} - x^r) = 0$, potom je x^r opt. riešenie a koniec. Inak krok 3.
3. Ak je $\nabla F(x^r)^T(\hat{x} - x^r) < 0$ a $\nabla F(\hat{x})^T(\hat{x} - x^r) \leq 0$, polož $x^{r+1} := \hat{x}$, $r := r+1$, choď na 1.

Ak je

Grygarova - ZOS MKI

rozvoj hlavně až po II. sv. válce (samočinné počítače)

1

- obecná lit: A. Laščák a kol: Optimalne programovanie (1983)
  N. Maňas: Optimalizační metody (1979)
  E. Polak: Computational methods in optimization (1971)
  D. G. Lucubufer: Introduction to linear and non linear programming (1973)

Dělení optimalizačních disciplín

Def 1: Úlohu $\max\limits_{x \in M} (\min) f(x)$, kde $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$

nazýváme úlohou matematické optimalizace (mat. programování).

I. kriterium

a) spojitá optimalizace - M nekonečná & spojité posouvání

b) diskrétní optimalizace - M konečná (spoč.) (kombinatorika)

II. kriterium

a) deterministická optimalizace

b) stochastická — " — ... navíc pravděpodobnost (statistika)

III. kriterium

1a) úloha na volný extrém $\underset{x \in \mathbb{R}^n}{(\min)(\max)} f(x)$; $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(není dána množina M)

z vně dovnitř M ... P ... penaliz. za to že jsem mimo

- Penalizační a bariérové metody

P - posloupnost $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{ f(x) + r_i\, p(x) \}$ $r_i \to 0$

B - $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{ f(x) + r_i\, b(x) \}$ ... můžeme kdykoli skončit

↳ pohybuje jen uvnitř množiny M

M

- M ... množina přípustných řešení
- f(x) ... cílová funkce (objektivní)

Def 2: Optimálním řešením optimalizační úlohy rozumíme $x^0 \in M$ takové, že

$f(x) \geq f(x^0)$, $x \in M$ pro minimum cílové fce na množině přípustných řešení

$f(x) \leq f(x^0)$, $x \in M$ pro maximum — " —

2) úlohy na vázaný extrém $\min_{x \in M} f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subsetneq \mathbb{R}^n$ (2)

$M = \{ x \in N \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \}$,

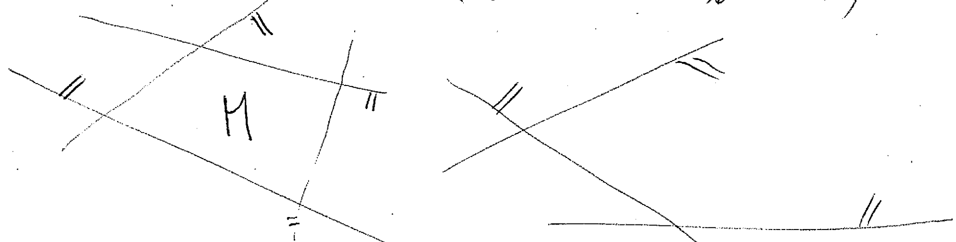
$N \subset \mathbb{R}^n$ $g_i(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$

a) lineární programování

$f(x) = c^T \cdot x$, $c \in \mathbb{R}^n$, (lineární)

$M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \}$

- existenční věta $\binom{\geq}{=}$ (existenční theorem)



→ extrém nastává ve vrcholu (alespoň v 1)

- princip duality (proměnné ⟷ podmínky)

⟶ primární & duální simplexová metoda

b) nelineární programování

- alespoň 1 funkce z f, g_i není lineární
- konvexní a zobec. konvexní programování
  - f a g_i konvexní, spec
  - konvexní fce ⇒ lokální extrém = globální extrém

c) nekonvexní programování

c) parametrické programování

- c_1 není pevné $\underset{c_1}{\circ}\!\longleftrightarrow\!\underset{c_1}{\circ}$ ... intervalová analýza
- vstupní data nejsou dána pevně, ale dají se vyjádřit jako fce dalších proměnných (parametrů)

podkategorie a) a b)

d) celočíselné programování

e) vícekriteriální (vektorové) programování

- cílová funkce je vektorová $f(x) \Rightarrow f_1(x), \dots, f_n(x)$

d) dynamické programování

- zajímají nás rozhodovací procesy

α) diskrétní ... Bellmannův princip optima

- Podstrategie optimální strategie je optimál.

β) spojité ... Pointraginův princip optima (maxima)

g) teorie her $\Rightarrow$ navíc je protihráč

h) semidefinitní programování

∘ $M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 , i = 1, \dots \}$

(2) 29.02.2008

Dopravní problém

1. klasický dopravní problém (úloha LP)

∘ Formulace: Je dáno $V_1, \dots, V_m$ výrobců, které vyrábí jeden výrobek v množství $a_i > 0$ $\forall i$ (ve stejné čas. jednotce a stejných váhových jednotkách)

Je dáno $S_1, \dots, S_n$ spotřebitelů, kteří požadují tento výrobek v $b_j > 0$ $\forall j$ (ve stejné, …)

Je dána $c_{ij} \geq 0$ $\forall i, j$ cena za dopravu jednotky výrobku z V_i do S_j.

Předp: Náklady na dopravu rostou lineárně!

∘ Neznámé: x_{ij} … množství výr., který dodá výrobce V_i spotřebiteli S_j $\forall i, j$

$$M = \left\{ x_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ,\ x_{ij} \geq 0 \ \forall i, \forall j \right\}$$

chceme, aby byla splněna podmínka ekonomické normality

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

pokud toto není pak si domyslíme fiktivního spotřebitele a výrobce s velmi velkými cenami $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ nepoužije se v optimu

∘ $$\min_{\{x_{ij} \in M\}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

∘ nepoužívá simplexovou metodu, ale vlastní s tabulkou $m \times n$ (rovnosti, umělé I)

– simplex $m \times n$ prom; $m + n + m + n$

2. Dopravní problém s nelineárními cenami dopravy (úloha nelineár. progr.)

∘ stejná formulace, ale $c_{ij}(x_{ij}) = d_{ij} + e_{ij} \cdot x_{ij}$

$$\min_{M} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(d_{ij} x_{ij} + e_{ij} x_{ij}^2 \right) \quad \text{(kvadratická úloha)}$$

3. Dopravní problém s celočíselnými podmínkami (4)

- stejná formulace, ale $M_C = \{ x_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall i \forall j \}$

- $\min_{M_C} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

4. Dopravní problém parametrický (parametrické programování)

- Formulace ~~s~~ stejná, ale $a_i \sim a_i + \lambda a_i' \quad \forall i \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Potom $M_{(\lambda)}^{*} = \{ x_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i + \lambda a_i', x_{ij} \geq 0 \ \forall i \forall j \}$

$$\min_{M_C} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

- vůbec hledá obory stability ... $\{\lambda\}$ ~~s~~ se stejným řešením

obor řešitelnosti ... $\{\lambda\}$ pro ~~ne~~ něž vůbec $\exists$ řešení

5. Dopravní problém jako úloha vícekriteriálního programování

- nejen minimalizovat cenu přepravy, ale i maximalizovat zisk
- stejná formulace, ale 2 cílové fce ~~min~~ $\sum_i \sum_j c_{ij} + \cancel{a}\, x_{ij} \rightarrow$ ~~max~~ min

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \longrightarrow \max$$

$$\min_{M} \left\{ \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{m} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i}^{m} z_i \right\}$$

6. Dopravní problém jako úloha dynamického programování

$c_{ij}(x_{ij})$ ... různé funkce $x_{ij} \ \forall i, j$. $\quad \min \sum_{i,j} c_{ij}(x_{ij})$

rozhodovací proměnné $\rightarrow 0 \leq u_j \leq a \quad ; \quad a = (a_1, \dots, a_m) \quad \forall j = 1, \dots, m$

$$\sum_i u_{ij} = b_j \quad \forall j$$

stavové proměnné $\rightarrow X_j$ ... množství výrobku, které lze rozvést v j-tém kroku

$$0 \leq X_j \leq a$$

- Zadán počátečním stavem $X_1 = a$

... $X_2 = X_1 - \cancel{a}\, u_1$

Přehled výsledků lineárního programování

≥ 0

Def 3: Množina $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a x \leq b;\ a \neq 0,\ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R} \}$ nazýváme uzavřený poloprostor v $\mathbb{R}^n$.

Množinu $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid ax = b;\ a \neq 0;\ a \in \mathbb{R}^n;\ b \in \mathbb{R} \}$ nazýváme nadrovinou (podprostor dimenze $n-1$)

Průnik konečného počtu nadrovin a uzavřených poloprostorů nazýváme <u>konvexním polyedrem.</u>

Def 4: Úlohou LP v rovnicovém tvaru nazýváme úlohu $\cancel{\max_M}$;
$\min_M c^T x;\ M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \},\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,$
$c \in \mathbb{R}^n$.

<u>Simplexová metoda požaduje:</u>

1) úlohu LP v rovnicovém tvaru.
2) $b \geq 0$
3) $\exists I_{m \times m}$ v A
4) $1 \leq m < n$
5) $h(A) = m$

<u>Převody</u> (z normálního tvaru do rovnicového tvaru)

a) $Ax \leq b_{\geq 0} \longrightarrow Ax + \xi = b;\ \xi \geq 0;\ \min_{M'} \{ c^T x + 0^T \xi \}$

$M' = \{ x, \xi \mid Ax + \xi = b;\ x \geq 0;\ \xi \geq 0 \}$.

doplňkové proměnné

vnoření do prostoru vyšší dim, ale problém je stejný

b) $Ax \geq b_{\geq 0} \longrightarrow Ax - \xi = b;\ \xi \geq 0$

$Ax - \xi + u = b,\ \xi, u \geq 0$

umělá úloha – jiný problém

$\min_{M_k} c^T x + K^T u \qquad K = k_1, \dots, k_m \qquad k_i >> 0$

$M_k = \{ x, \xi, u \in \mathbb{R}^{n+2m} \mid Ax - \xi + u = b,$
$x, \xi, u \geq 0 \}$

nebo provedeme první etapu

$$\min_{u_i} \sum_{i=1}^{m} \cancel{\quad} u_i$$

opt. řeš. $u = 0$ ⇒ máme vých. řeš. zadané úlohy a pokračujeme SA, ale musíme dopočítat krit. řádek.

opt. řeš. $u \neq 0$ ⇒ neex. řeš. zadané úloh

c) $M = \{ x \mid Ax = b \}$

$x = x^+ - x^-$ $\qquad x_i^+ = \max \{0, x_i\} \geq 0$ $\qquad \forall i$

$\qquad\qquad\qquad x_i^- = \max \{0, -x_i \cancel{\quad}\} \geq 0$

$M' = \{ x^+, x^- \in \mathbb{R}^{2n} \mid Ax^+ - Ax^- = b,\ x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0 \}$

$\min_{M'} \{ c^T x^+ - c^T x^- \}$

<u>Přepis úlohy LP v rovnicovém tvaru</u>

předp. $h(A) = m$ ⇒ ∃ konečný počet reg. matic $A_i \subset A$

Vybereme (BÚNO) $A = (A_B, A_N)$, kde A_B je reg. matice $m \times m$

Potom $Ax = b$ píšeme $A_B x_B + A_N x_N = b$, kde $x = (x_B, x_N)$

Stejným způsobem rozdělíme $c = (c_B, c_N)$. Potom můžeme zadanou úlohu přepsat na tvar $\min_M (c_B^T x_B + c_N^T x_N)$.

$$M = \{ x_B, x_N \mid x_B = \underbrace{A_B^{-1} b} - \underbrace{A_B^{-1} A_N}\, x_N \geq 0,\ x_N \geq 0 \} \equiv$$

$$\equiv \{ x_B, x_N \mid (x_B =)\, d^0 - D x_N \geq 0,\ x_N \geq 0 \}$$

$$c_B (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N x_N = \underbrace{c_B^T A_B^{-1} b}_{c_0} + x_N (c_N - \underbrace{c_B A_B^{-1} A}_{z_N}$$

$$= c_0 + (c_N - z_N)^T x_N$$

$$\boxed{\begin{aligned} d^0 &= A_B^{-1} b \\ D &= A_B^{-1} A_N \end{aligned}}$$

Ak poznáme ľubovoľnú bázu B (t.j. ľubovoľné prípustné bázické riešenie), potom sa dá úloha prepísať na tvar:

$$\min_M \{ c_0 + (c_N - z_N)^T x_N \}$$

Pozn.: V SymMet je každá $A_B = E$ (↳ jednotková matice) $\Rightarrow A_B^{-1} = E$.

Def 5: x_B nazýváme vektorem bazických proměnných, x_N nazýváme vektorem nebazických proměnných.
$(x_B, x_N) = (d^0, 0)$ nazýváme bazickým řešením. Je-li $d^0 \geq 0$, pak mluvíme o přípustném bazickém řešení. Je-li $d^0 > 0$, pak jde o nedegenerované příp. baz. řeš.
Hodnota účelové funkce v příp. báz. řeš. je $cx = c_0$.

Tabulka SM — T

	c_B, x_B	c_N, x_N	
c_B x_B	$1 \; \ddots \; 1$	D	d^0
	$0 \; \dots \; 0$	$c_N - z_N$	$-c_0$

$m+1$ (řádky), $n+1$ (sloupce); poslední řádek — kriteriální řádek

1. V. SM: Jestliže v T platí $c_N - z_N \geq 0$, potom je příslušné příp. báz. řeš. $(d^0, 0)$ je optimální!

2. V. SM: Existuje-li v T sloupec k $c_k - z_k < 0$, $d_{ik} \leq 0$ $i \in B$, potom neex. řešení zadané úlohy.

3. V. SM: Nejsou-li splněny předpoklady 1. ani 2. V. SM, potom klíčový sloupec $\min_{j \in N \text{ (nebazické)}} (c_j - z_j) \equiv c_s - z_s$.
Klíčový řádek určíme jako $\min_{\substack{d_{is} > 0 \\ i \in B}} \left\{ \frac{d_{i0}}{d_{is}} \right\} \equiv \frac{d_{r0}}{d_{rs}}$ (pivot GE) a provedeme transformaci T s pivotem $d_{rs} > 0$. Dostaneme nové přípustné báz. řešení (x_B^1, x_N^1), $c^T x^1 \leq c^T x$, kde $x = (0, d_0)$

Pozn.: Blandovo pravidlo požaduje $\min_{\substack{j \in N \\ c_j - z_j < 0}} \{c_j - z_j\} \equiv c_r - z_r$ a

$$\min_{v \neq} \left\{ \frac{d_{v0}}{d_{vr}} = \min_{\substack{d_{ir} > 0 \\ i \in B}} \left\{ \frac{d_{i0}}{d_{ir}} \right\} \right\} \equiv d_{s0} / d_{sr}.$$

pre odstránenie cyklu — 1. prístup

Ak definujeme $s \equiv \min\{t \in N, c_t - z_t < 0\}$ (↳ najmenší index, pre stĺpec) a $r \equiv \min\{p \in R \mid \min_{d_{is} > 0} \left\{ \frac{d_{i0}}{d_{is}} \right\} = \left\{ \frac{d_{p0}}{d_{ps}} \right\} \}$ (↳ najmenší index),

potom pri aplikácii SM nemôže ~~prísť~~ dôjsť ku cyklu.

Definice 6: Množinu $M_{opt} = \{ x^0 \in M \mid \min_M c^T x = c^T x^0 \}$ nazýváme množinou všech opt. řeš. úlohy LP. (8)

Je-li $x^0 = (d^0, 0) \geq 0$ je opt. řeš. získané SM. Nechť $c_N - z_N \geq 0$ jsou hodnoty z poslední (optimální) tabulky. Označíme
$J = \{ j \in N \mid c_j - z_j > 0 \}$ a nechť c_0 je opt. hodnota cílové funkce. Pro $j \in N - J$ je $c_j - z_j = 0$.

Věta 1: Platí $M_{opt} = \{ x \in M \mid x_j = 0,\ j \in J \}$.

Důkaz: Pro $\forall x \in M$ platí $c^T x = c_0 + (c_N - z_N)^T x_N =$

$$= c_0 + \sum_{j \in J} (c_j - z_j) x_j + \sum_{j \notin J} \underbrace{(c_j - z_j)}_{=0} x_j =$$

Hledáme ta $x \in M$, která mají vlastnost $c^T x = c_0$

$$\Rightarrow c_0 + (c_N - z_N) x_N = c_0 + \sum_{j \in J} \underbrace{(c_j - z_j)}_{>0} \underbrace{x_j}_{\geq 0} = c_0 \Rightarrow x_j = 0 \quad j \in J \quad \boxed{X}$$

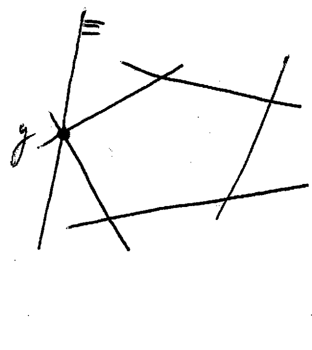
o Prakt ... za klíč. sloupec se vezme jeden s hodnotou $= 0$.
o $\Rightarrow$ Není-li řeš. jediné $\Rightarrow$ je jich nek. mnoho.

Degenerace, Cyklus. Vznik a odstranění!

Def 7: Říkáme, že u SM nastává degenerace, jestliže alespoň 1 příp. bar. řeš. je degenerované.

Je-li příp. baz. řeš. $(d_0, 0)$ degen. $\Rightarrow d_{i0} = 0$ alespoň pro 1 $i \in B$.
Je-li speciálně $i = r$, potom po tranf. tabulky $-c_0' = -c_0 - \frac{(c_s - z_s) \cdot d_{r0}}{d_{rs}}$
$= -c_0$

$\Rightarrow$ nemění se hodnota cílové funkce, t.j. $c^T x' = c^T x$
Mohlo by se stát, že $x^k \to x^{k+1} \to \ldots \to x^l \to x^k$, přičemž
$c^T x^k = c^T x^{k+1} = \ldots = c^T x^l = c^T x^k$. Nastal by tedy cyklus a SM by selhala.

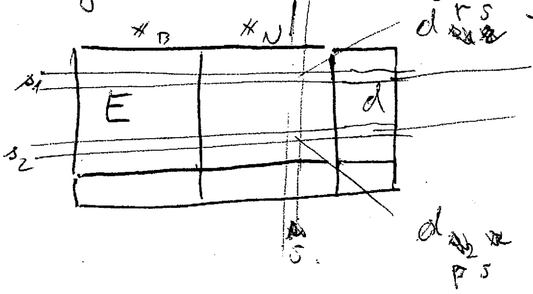


y lze vyjádřit 3-mi dvojicemi rovnic
$\equiv$ ten samý bod, ale jinak vyjádřený

Vznik degenerace

1) zadání ($b_i = 0$ alespoň pro 1 $i \in \{1, \dots, m\}$)

2) Nejednoznačnosti výběru klíč. řádku mezi $\left\{ \frac{d_{i0}}{d_{is}} \right\} = \frac{d_{r0}}{d_{rs}} \overset{*}{=} \frac{d_{p0}}{d_{ps}}$, $d_{is} > 0$, $i \in B$; r nebo p



$d_{rs} > 0$, d_{r0}, d_{p0}, d_{ps}

$$d'_{p0} = d_{p0} - \frac{d_{ps} \cdot d_{r0}}{d_{rs}}$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow} d'_{p0} = 0 \qquad (d_{p0}, \varepsilon)$$

vybereme r za index kl. řeš. a $d'_{p0} = 0 \Rightarrow$ degen. příp. báz. řeš.

Tvrzení 1: Při použití Blandova pravidla nenastane cyklus při výpočtu SM

ε-modifikovaná úloha LP

Def úlohu LP úlohu $\min_{M(\varepsilon)} c^T x$; $M(\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b + P(\varepsilon),\ x \geq 0,\ \varepsilon > 0 \}$ libovolné

Je-li $A = (E, A_N)$, potom poslední sloupeček tabulky bude tvaru

$b + (E A_N)\boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n) \Rightarrow$ d_0:

$$b_1 + \varepsilon + \sum_{m+1}^{n} a_{1j} \varepsilon^j$$

$$\vdots$$

$$b_m + \varepsilon^m + \sum_{m+1}^{n} a_{mj} \varepsilon^j$$

(o Myslím si $\varepsilon > 0$ tak, aby $\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} \varepsilon^j$ nepřevyšovali ε^m

$\Rightarrow$ ad1) nepřipadá v úvahu

ad2) při hledání klíč. ř. je vždy $\frac{d_{r0} + \varepsilon^r + \sum_{j \in N} d_{rj} \varepsilon^j}{d_{rs}} \neq \frac{d_{p0} + \varepsilon^p + \sum_{j \in N} d_{pj} \varepsilon^j}{d_{ps}}$

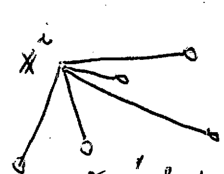
protože $\varepsilon^r \neq \varepsilon^p$, $r \neq p$

4.

14.03.2008

Pozn: SM je konečná (pokud nenastane cyklus) protože přípustných bazických řešení je konečný počet.

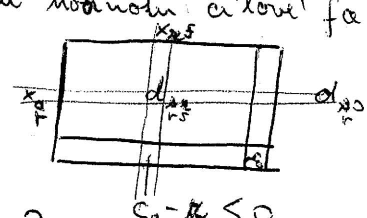
Výpočetní složitost u SM



x^i — přechod ne k některému ale k nejlepšímu sousedovi

1. Nejhorší počet kroků SM je $\binom{n}{m}$
2. Při přechodu od jedné S tabulky k druhé mění hodnotu cílové fa podle vzorce:

$$-c'_0 = -c_0 - \frac{(c_s - z_s)}{d_{rs}} d_{r0}$$



x_s, x_r, d_{rs}, d_{r0}, $c_s - z_s < 0$

Abychom měli nejmenší možný počet kroků, tak vybíráme index kl. sl. tak, že: $\min_{c_i - z_i < 0} \left\{ \frac{(c_i - z_i) d_{r0}}{d_{ri}} \right\} = \frac{(c_{s^*} - z_{s^*}) d_{r0}}{d_{rs^*}}$ s^* index kl. sl.

r závislé na i

Při $n = 50$; $m \leq n$ je # kroků při použití Bl. pravidla 95 & $\to$ 59

3. Pravděpodobnostní modely

- horní odhad # kroků: $P(m,n) \leq m^{\frac{1}{n-1}} (n+1)^4 \cdot \frac{2\pi}{5}\left(1+\frac{e\pi}{2}\right)$

4. Praktické problémy → # kroků nezávisí na n a je $\in \langle 2m, 3m \rangle$

5. Novější výzkumy $m < 50$, $n < 150$ je $P < \frac{3}{2} m$. (Platí též i pro m, n větší.)

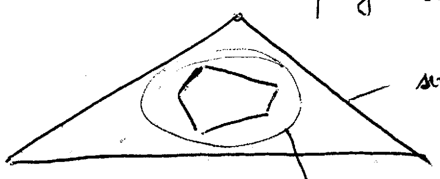
Algoritmy řeš. LP - úlohy:

1. Elipsoidová metoda (Chačian) 1979

elipsoid – na 1/2 & nový tam, kde je M
→ konec el obsahuje M a opt je střed

- polynomiální č.

2. Karmarkarova projektivní metoda 1984 → polynomiální



Princip duality

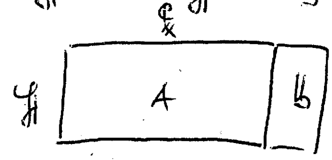
Def: Úlohu LP v normálním tvaru

$$(P)\ \max_{M_1} c^T x,\quad M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}\quad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$$

nazveme primární úlohou a úlohu v normálním tvaru

$$(D)\ \min_{M_2} b^T y,\quad M_2 = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$$

nazýváme duální úlohou LP.



Lemma 1: Je-li $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$ potom platí $c^T x \leq b^T y$, $\forall x \in M_1$, $y \in M_2$.

Dk: $M_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x: \quad Ax \leq b \ /y \quad x \geq 0$

$M_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists y: \quad A^T y \geq c \ /x \quad y \geq 0$

$\Rightarrow y^T A x \leq b^T y$, $x^T A^T y \geq x^T c$ $\Rightarrow$

$\hookrightarrow y^T A x \geq c^T x$

$\Rightarrow c x \leq b^T y$

Lemma 2: Je-li $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$, potom $\exists$ konečné $\sup c^T x$ na M_1 a konečné ~~sup~~ inf $b^T y$ na M_2.

Dk: $\exists$ L1 ⇒ při pevné volbě $y^* \in M_2$, že platí $c^T x \leq b^T y^*$ $\forall x \in M_1$

$$\Rightarrow \exists m_1 = \sup_{M_1} c^T x$$

$\exists$ L2 ⇒ — " — $x^* \in M_1$, — " — $c^T x^* \leq b^T y$, $\forall y \in M_2$

$$\Rightarrow \exists m_2 = \inf_{M_2} b^T y$$

Lemma 3: Nechť $M_1 \neq \emptyset$ a $\exists m_1$ (resp $M_2 \neq \emptyset$ a $\exists m_2$), potom ex (12)

$y^0 \in M_2$ tak, že platí $b^T y^0 \leq m_1$.

(resp. $\exists x^0 \in M_1$, tž platí $c^T x^0 \geq m_2$).

Dk: (z Farkašovy V)

Věta: (Princip duality)

Je-li $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$, potom $\exists$ opt. řeš. x^0 úlohy (P) a opt. řeš y^0 úlohy (D) a platí $c^T x^0 = b^T y^0$.

Dk: z L2 $\Rightarrow \exists m_1, m_2 \overset{L3}{\Longrightarrow} \exists x^0 \in M_1 \Rightarrow c^T x^0 \geq m_2 \overset{L1}{\geq} m_1 \overset{L3}{\geq} b^T y^0 \overset{L1}{\geq} c^T x^0 \Rightarrow$

$$\Longrightarrow c^T x^0 = m_2 = m_1 = b^T y^0 \quad \boxtimes$$

Důsledky:

1) Má-li jedna z úloh (P) nebo (D) opt. řeš., pak ho má i druhá a platí rovnost funkčních hodnot v opt. ~~řeš.~~ bodech. (+ autoři Princip duality)
   (Má-li (P) opt. řeš $\Rightarrow M_1 \neq \emptyset$ $\exists m_1 \overset{L3}{\Rightarrow} \exists y^0 \in M_2$ a tedy $M_2 \neq \emptyset$ a jsou splněny předp. Principu duality)

2) Je-li $c^T x$ shora neomezená na M_1, potom je $M_2 = \emptyset$.
   (Je-li $b^T y$ zdola neomezená na M_2, potom je $M_1 = \emptyset$)

3) Souvislost opt. řešení:
   Je-li x^0 opt. řeš. úlohy (P) $\Rightarrow Ax^0 \leq b$, $x^0 \geq 0$. Označme $a_i^T x^0 = b_i$, $i \in I_1$ (i-tý řádek A)
   $a_i^T x^0 < b_i$ $i \notin I_1$, $x_j^0 = 0$ $j \in J_1$, $x_j^0 > 0$ $j \notin J_2$.

   Potom $M_{opt}(D) = \{ y^0 \in M_2 \mid y_j^0 = 0 \; j \notin I_1, \; y^0 a_j^T = c_j \; j \notin J_1 \}$

$$(\text{z L1 a PD} \Rightarrow c^T x^0 = y^{0T} A x^0 = b^T y^0 \Rightarrow (c - y^{0T} A) x^0 = 0 =$$

$$= \sum_{j \in J_1} (c_j - y^0 a_j^T) \underset{0}{x_j^0} + \sum_{j \notin J_1} \underset{\leq 0}{(c_j - y^0 a_j^T)} \underset{>0}{x_j^0} = 0$$

$$\Rightarrow c_j = y^0 a_j^T \quad j \in J_1$$

$$y^{0T}(Ax^0 - b) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i \in I_1} y_i^0 \underset{=0}{(a_i^T x^0 - b_i)} + \sum_{i \notin I_1} \underset{\geq 0}{y_i^0} \underset{<0}{(a_i^T x^0 - b_i)}$$

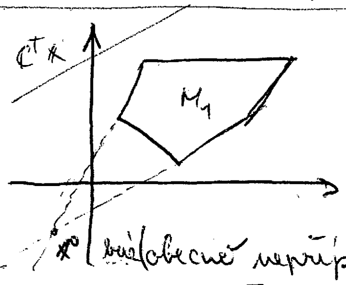
$$\Rightarrow y_i^0 = 0 \quad i \notin I_1)$$

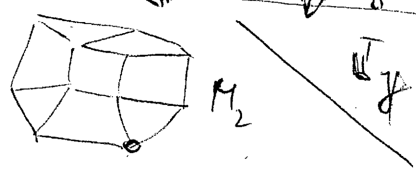
4) Rovnost $c^T x = b^T y$ platí právě v optimálních bodech.

„$\Leftarrow$": (PD $\Rightarrow$ je-li x^0, y^0 opt. řeš. (P), (D) $\Rightarrow$ $c^T x^0 = b^T y$ · L1

„$\Rightarrow$": Předp., že x^0 není opt. řeš. (P) $\Rightarrow$ $c^T x^0 < c^T x^{opt} \le b^T y^0$

a podle předp. platí $c^T x^0 = b^T y^0$ $\longrightarrow$ vyjde tedy spor.)





x^0 báz. (obecně nepřípustné) řešení (P)

$$\underline{c^T x^0 = b^T y^0}$$

y^0 též (obecně nepřípustné) řešení (D)

$$\underline{y^0 \in M_2}$$

⋮

$$c^T x^i = b^T y^i, \quad y^i \in M_2 \quad \forall i$$

⋮

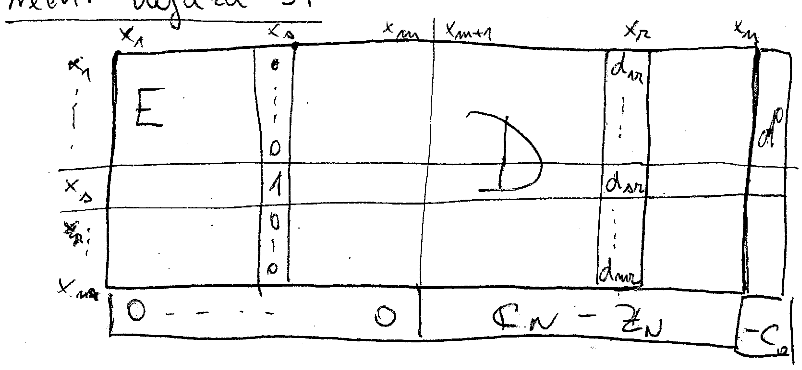
$$c^T x^k = b^T y^k, \quad x^k \in M_1 \quad \Rightarrow \text{opt}$$

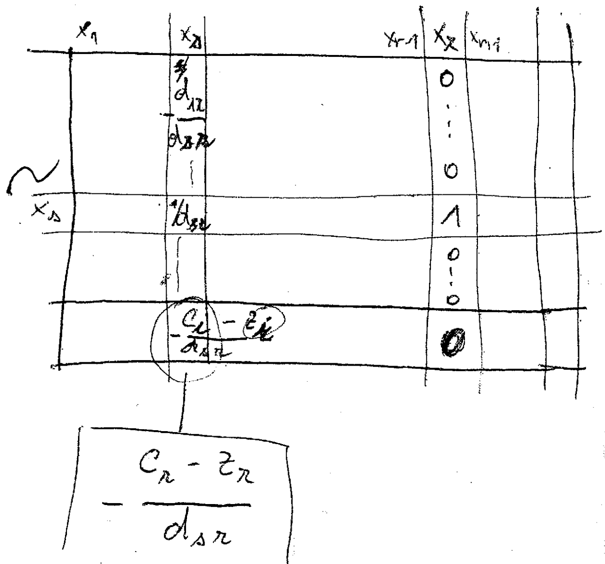
! na y^i M_2 běží simplex !

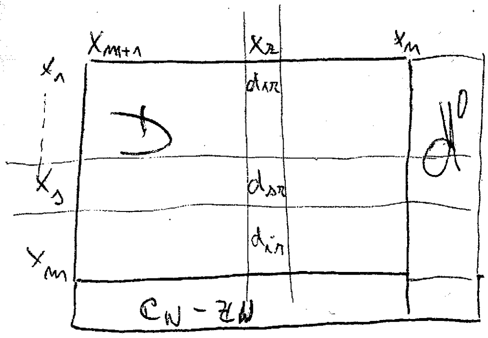
(5) 21.03.2008

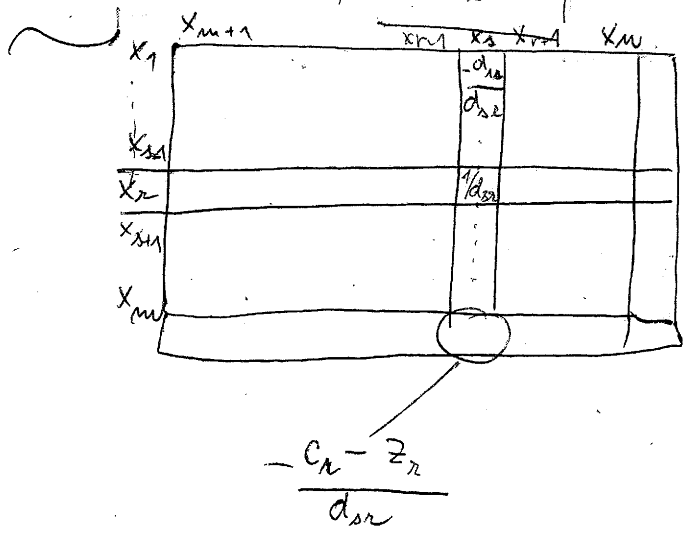
(Zbavení se I_m:

Nechť nějaká ST









Pravidlo: Nejprve transf. klíčový sloupec tak, že na místě pivota je jeho převrácená hodnota a ostatní prvky kl. sloupce dělíme (-pivotem). Ostatní prvky tabulky se transformují obvyklým způsobem. (13)

Duální simplexová metoda:

Mějme (P) $\max\limits_{M_1} c^T x$, $M_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \}$ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $b \in \mathbb{R}^m$

duální

dále (D) $\min\limits_{M_2} b^T y$; $M_2 = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \ge c,\ y \ge 0 \}$

Sestavme ekvivalentní úlohy:

(P') $\max\limits_{M_1'} c^T x$; $M_1' = \{ (x, x') \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + x' = b;\ x, x' \ge 0;\ x' = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \}$

nejsou duální

(D') $\min\limits_{M_2'} b^T y$; $M_2' = \{ (y, y') \in \mathbb{R}^{m+n} \mid A^T y - y' = c;\ y, y' \ge 0;\ y' = (y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) \}$

Předpoklad: $c \le 0$ (není nutný, ale ulehčí)

Výchozí bazické řešení úloh (P') a (D'):

$(x^0, x'^0)^0$: $x^0 = 0$; $x'^0 = b$ → je bazické, nemusí být přípustné

$(y^0, y'^0)^0$: $y^0 = 0$; $y'^0 = -c \ge 0$ → přípustné bazické řeš. a $b^T y^0 = 0$

Výchozí tabulka duální s.m.:

$$\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & y_{m+1} & \cdots & y_{m+n} & \\
 & & x_1 & \cdots & x_n & \\
\hline
y_1 & x_{n+1} & & & & \\
\vdots & \vdots & & A & & b \\
y_m & x_{n+m} & & & & \\
\hline
 & & & -c & & 0
\end{array}$$

y' nad sloupci, x' u řádků.

obojí v jedné tabulce

← revidovaná SM (bez jedn. matice) Po riadkoch (P'). Po stĺpcoch (D').

k-tý krok:

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & & (y, y')_{B_d} & \\
 & & (x, x')_N & \\
\hline
(y, y')_{N_d} & (x, x')_B & D & d_0 \\
\hline
 & & d^T \ge 0 & d_{00}
\end{array}$$

Tj.:
- přípustné bazické řešení úlohy (D'): $(y, y')_{B_d} = d_0 \ge 0$; $(y, y')_{N_d} = 0$
- bazické řešení úlohy (P'): $(x, x')_B = d_0$; $(x, x')_N = 0$

Obe dávajú rovnakú hodnotu cieľových funkcií d_{00}.

1. Věta DSM:

Platí-li v k-tém kroku DSM $d^0 \geq 0$, potom $(x, x')_B = d^0$, $(x, x')_N = 0$ je opt. řeš. úlohy (P') s hodnotou účelové funkce d_{00} a příslušná část (x_B, x_N) je opt. řeš. úlohy (P) s opt. hodnotou účelové fce d_{00}.

Dále $(y, y')_{B_d} = \bar{d}^0$, $(y, y')_{N_d} = 0$ je opt. řeš. úlohy (D'), přičemž příslušná část (y_{B_d}, y_{N_d}) je opt. řeš. úlohy (D) s opt. hodnotou účelové funkce d_{00}.

Dk: Protože $[(x, x')_B, (x, x')_N] \in M_1'$ a

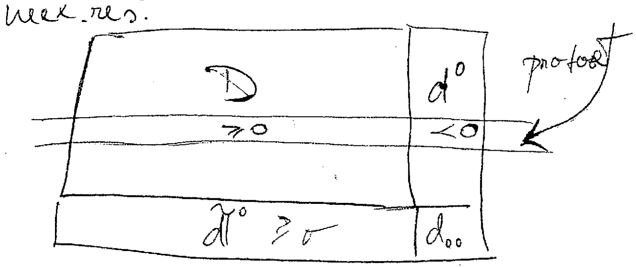
$$[(y, y')_{B_d}, (y, y')_{N_d}] \in M_2' \quad (\text{vždy})$$

$$\overset{\text{ekviv}}{\Longrightarrow} (x_B, x_N) \in M_1 \;\&\; (y_{B_d}, y_{N_d}) \in M_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ protože $c^T x = b^T y = d_{00}$ (podle důsledku PD)
optimalita x resp. y pro úlohu (P) resp. (D)

---

neex. řeš.



$A^T y - y' = c$

$y' = -c + A^T y$

U obyč. SM bolo: $x_B = b - A x_N$

2. Věta DSM:

Existuje-li index $s \in B$ tak, že $d_s^0 < 0$ a $d_{sj} \geq 0$, $j \in N$. Potom neexistuje řeš. úloh (P), (D).

Dk: s-tý řádek posl. tabulky zapíšeme

$$x_s \,(\text{resp } x_s') = \underbrace{d_s^0}_{<0} - \sum_{j \in N} \underbrace{d_{sj}}_{\geq 0} \underbrace{(x, x')_j}_{\geq 0} < 0,$$

ale M_1' má $(x_s, x_s') \geq 0 \Rightarrow M_1' = \emptyset \overset{\text{ekviv}}{\Longrightarrow} M_1 = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ neex. řeš. (P) $\overset{PD}{\Longrightarrow}$ neex. řeš. (D)

3. Věta DSM:

Nechť nejsou splněny předpoklady 1. ani 2. VDSM.

Označme

$$\min\{i\in B \mid d_i^0<0\} \equiv s \leftarrow \text{index řádku}$$

$$\min_r\left(\min_{j\in N \,/\, d_{sj}<0}\left\{\frac{\tilde d_j^0}{|d_{sj}|}\right\} \equiv \frac{\tilde d_r^0}{|d_{sr}|}\right) \equiv \frac{\tilde d_r^0}{|d_{sr}|}\ r\leftarrow\text{index sloupce}$$

po transformaci tabulky (s dodatečným pravidlem vyjadřujícím, že E chybí) dostaneme přípustné báz. řeš. $(y,y')^*$ úlohy (D') a obecné báz. řeš. $(x,x')^*$ úlohy (P') přičemž hodnota účelových funkcí v těchto báz. řešeních je $d_{00}^* = d_{00} - \dfrac{\tilde d_r^0\cdot d_s^0}{d_{sr}}$

a platí $d_{00}^*\le d_{00}$. Nenastává-li degenerace platí $d_{00}^*<d_{00}$.

Dk: $\boxed{d_{sr}<0}$

$(y,y')^*$: $\tilde d_j^{0*} = \underset{\ge 0}{\tilde d_j^0} - \dfrac{d_{sj}\cdot\tilde d_r^0}{d_{sr}}$

chceme ukázat, že je přípustné báz. řešení, t.j. že $\tilde d_0^* \ge 0$.

$\boxed{j\in N_d\setminus r}$

pokud $d_{sj}\ge 0 \Rightarrow \tilde d_j^{0*}\ge 0$

pokud $d_{sj}<0 \Rightarrow$ podle def. indexu r

$$\frac{\tilde d_j^0}{\underset{<0}{|d_{sj}|}} \ge \frac{\tilde d_r^0}{\underset{<0}{|d_{sr}|}} \Rightarrow \frac{\tilde d_j^0}{d_{sj}} \le \frac{\tilde d_r^0}{d_{sr}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde d_j^0 \ge \frac{\tilde d_r^0\cdot d_{sj}}{d_{sr}} \Rightarrow \tilde d_j^{0*}\ge 0$$

$$\tilde d_r^{0*} = \frac{\overset{\ge 0}{\tilde d_r^0}}{\underset{\ge 0}{-d_{sr}}} \ge 0$$

Dohromady je $(y,y')^*\in M_2'$.

Podle transf. vzorce je $d_{00}^* = d_{00} - \dfrac{\overbrace{\tilde d_r^0}^{\ge 0}\cdot\overbrace{d_s^0}^{<0}}{\underset{<0}{d_{sr}}} \le d_{00}$.

Poznámka:

Pokud nenastává degenerace v každém kroku $(\tilde d^0>0) \Rightarrow \tilde d_r^0>0 \Rightarrow d_{00}^*<d_{00}$ ☒

Metoda je konečná – máme kon. mnoho příp. báz. řeš. a používáme Blandovo pravidlo

Pozn: Duální SM se dá užít i bez předpokladu $C^T\le 0$

Kdy určitě použít DSM?

max $c^T x$; $M = \{ x \mid Ax \leq b ; x \geq 0 \}$

$c < 0$; $\boxed{b < 0}$

$$Ax + x' - \underset{\text{umělé}}{u} = b$$

(6)

28.03.2008

Celočíselné programování

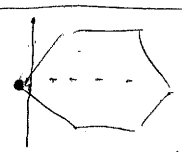
Definice 1: Úlohu $\max_{x \in M} f(x)$, kde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0 \ (j = 1, \dots, m), x_\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\} \}$$

$g_j(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\forall j$ nazýváme obecnou úlohou celočíselného programování.

Je-li $C = \{1, \dots, n\}$, potom mluvíme o čisté úloze, a je-li $C \subsetneq \{1, \dots, n\}$ o smíšené úloze.

Metody:
1, sečných nadrovin (metody řezu)
2, Kombinatorické – Branch and Bound
3) Přibližné metody
4) Speciální metody pro spec. problémy || často se opak. úlohy

1)  Gomory !

Definice 2: Úlohu (1) $\max_{M_C} c^T x$; $c \in \mathbb{R}^n$,

$$M_C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b ; x \geq 0, x_\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in C, C \subseteq \{1, \dots, n\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \}$$

nazýváme úlohou lineárního čistého (pokud $C = \{1, \dots, m+n\}$) nebo smíšeného (pokud $C \subsetneq \{1, \dots, m+n\}$) celočíselného programování.

Poznámka: Nerovnosti $Ax \leq b$ nahrazujeme $Ax + x' = b$, $x' \geq 0$, $x' = (x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$.

Definice 3: Úlohu (2) $\max_M c^T x$, kde $M = \{ x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}$ nazýváme spojitou úlohou přiřazenou k (1).

Poznámka: Budeme řešit ekvivalentní úlohu k (2)

(2') $\max_{M'} c^T x$, $M' = \{ (x, x') \in \mathbb{R}^{m+n} \mid Ax + x' = b, \ x, x' \geq 0 \}$

Myšlenka 1. Gomoryho alg:

Řeší čistou úlohu lin. celoč. prg.

Nechť v r-tém kroku alg. máme opt. řeš. $(x^{*}, x'^{*})^{r}$ úlohy $(2')$.

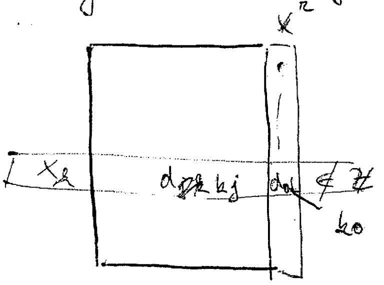
Jestliže $(x^{*}, x'^{*})^{*} \in M_C'$ potom je x^{*} opt. řeš. (1).

Jestliže $(x, x')^{*} \notin M_C'$, zavedeme řez množiny M'.

Nechť $x_k^r \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}\ M' \Rightarrow x_k = x_k^r - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j$, kde d_{kj} a $x_k^r = d_{0k}$

jsou hodnoty z poslední tabulky (k-tý řádek).



Zavedeme-li označení pro $s \in \mathbb{R}$ $s = [s] + \boxed{s}$,

potom $[s]$ nejbližší nižší celé číslo k s

a $\boxed{s}$ je zbytek. ~~tedy~~

Tedy $0 \le \boxed{s} < 1$, a dále $x_k = [d_{k0}] + \boxed{d_{k0}}$

$$- \sum [d_{kj}] x_j - \sum \boxed{d_{kj}} x_j$$

Věta 1: Množ. $R = \{ (x, x') \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j=0} \boxed{d_{kj}} x_j = 0 \}$

je sečnou nadrovinou s vlastností: $\leftarrow$ H^+ uzávěr

$(x, x')^r \in H^-$, $M_C' \subset \overline{H}^+$, kde

$$H^- = \{ (x, x') \in \mathbb{R}^{m+n} \mid -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j < 0 \},$$

$$\overline{H}^+ = \{ \text{———— " ————} \geq 0 \}.$$

Dk: Pro $(x, x')^r$ platí $(x, x')^r_B = d_{0k}$, $(x, x^r)_N = 0$

Tedy po dosazení $(x, x')^r$:

$$- \boxed{d_{0k}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} \cdot 0 < 0 \Rightarrow (x, x')^r \in H^-$$

Zvolíme lib. $(x, x') \in M_C' \Rightarrow$ pro k-tou rovnici

$$x_k = d_{0k} - \sum_{j\in N} d_{kj} x_j = [d_{0k}] + \boxed{d_{0k}} - \sum_{j \in N} \underbrace{[d_{kj}]}_{\in \mathbb{Z}} x_j - \sum \boxed{d_{kj}} \underbrace{x_j}_{\in \mathbb{Z}}$$

čistá $\Longrightarrow \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{-\boxed{d_{0k}} + \sum_{j\in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{-x_k + [d_{0k}] - \sum_{j\in N} [d_{kj}] x_j}_{\in \mathbb{Z}}$$

Pokračujeme dále řešením spojité úlohy $\max_{M' \cap \bar{H}^+} c^T x$

- když všechna $d_{kj} \in \mathbb{Z}$ (ale $d_{k0} \notin \mathbb{Z}$) $\Rightarrow$ množina řeš. $= \emptyset$

Pro důkaz konečnosti 1. Gomoryho alg budeme předp. $c^T x \in \mathbb{Z}$, $x \in M$,
(• $c \in \mathbb{Q}$ se převede vynásobením do $\mathbb{Z}$)
dále M je omezená,
dále budeme pracovat s lexikograficky optimálním (l-optimálním) jednoznačně
řešením jednotlivých úloh $\max_{M' \cap \bar{H}_1^+ \cap \dots \cap \bar{H}_n^+} c^T x$

Poslední předp. je $M_c \neq \emptyset$

$x = (0, \dots, 0, \underline{1}, -100$

Lexikografie:

Definice 4: $x \in \mathbb{R}^n$ nazveme l-kladný, jestliže platí $x_k > 0$,
$k = \min\{ i = 1, \dots, n \mid x_i \neq 0 \}$; ozn. $x \succ 0$.
x je l-nezáporný, jestliže je $x = 0$ nebo $x \succ 0$.

Def 5: Říkáme, že x je l-větší než y ($x, y \in \mathbb{R}^n$) jestliže $x - y \succ 0$.

Ozn: $c^T x \equiv x_0$; $x \in M'$ a tedy $(x, x') \in M''$
Přečíslujeme proměnné tak, aby x_1 byla nejdůležitější z x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$,
pak $x_2, \dots$

Věta: Je-li M omezená a $M_{opt} \neq \emptyset$, potom $\exists$ l-opt řeš. úlohy $\max_M c^T x$.

Dk: Víme $M_{opt} = \{ x \in M \mid x_j = 0 ;\ j \in J_0 \}$,
$J_0 = \{ j \in N \mid c_j - z_j < 0 \}$
hodnoty posl. tabulky

a $M_{opt} \neq \emptyset$, omezená $\Rightarrow$ je konvexním polyedrem.
Je-li $M_{opt} \neq \{x^{opt}\}$, potom pro $x \in M_{opt}$ řešíme úlohu
$\max_{M_{opt}} x_1$. To ex. a ozn. ho M^1_{opt}.

Pokud $M^1_{opt} = \{ x^{opt} \}$, potom je l-opt. řeš., v opačném případě řešíme $\max\limits_{M^1_{opt}} x_2$ atd $\longrightarrow$ končí $\Leftrightarrow$ kon # proměnn (19)

duální simplex

Poznámka:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & \text{nebazické} & \\
x_0 & -c & 0 \\
\hline
x_1 & & \\
\vdots & -E & 0 \\
x_n & & \\
\hline
\vdots & A & b \\
x_{m+n} & & \\
\end{array}$$

Výchozí tabulka:

$x' = b$ bazické proměnné

$x = 0$ nebazické –||–

$x' = b - A x$

$x = 0 - (-x)$ ..... Id

$c^T x = 0 - (-c^T x)$

$\boxed{\text{Předp } c < 0.}$

(7) 04.04.2008

l-metoda (lexikografická duální metoda)

Řešíme úlohu $\max\limits_{M'} c^T x$, $M' = \{ (x, x') \in \mathbb{R}^{m+n} \mid Ax + x' = b,\ x, x' \geq 0 \}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. $\quad x' = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$

Výchozí l-tabulka:

$$\begin{array}{c|ccc|c|}
 & R_1 & \cdots & R_N & R_0 \\
\hline
c^T x \equiv x_0 & & -c & & 0 \\
\hline
x_1 & & & & \\
\vdots & & -E & & 0 \\
x_n & & & & \\
\hline
x_{n+1} & & & & \\
\vdots & & A & & b \\
x_{n+m} & & & & \\
\hline
\end{array}$$

$x = 0 - (-x)$

pozn.: l-tabulka se liší od tabulky DSM jen přehozením ~~tak.~~ posl. řádku na 1. řádek a přidáním $x = 0 - (-x)$ budou platit 1. a 2. věta DSM.

Ozn. sloupce l-tabulky jako R_j, $j \in N$ a posl. sl. jako R_0.

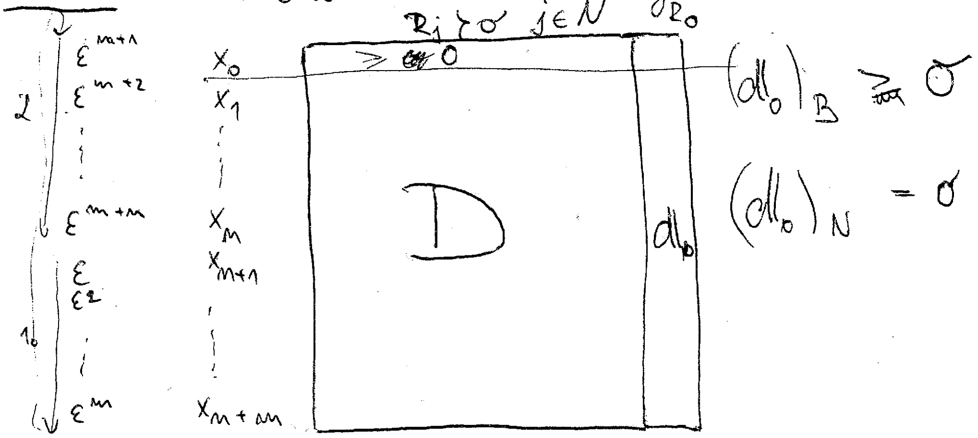
Def: L-tabulku nazýváme <u>l-normální</u>, pokud platí, že $R_j \succ 0$, $j \in N$.

nebazická

Pozn: Výchozí l-tabulka je vzhledem k předp. $c \leq \sigma$ l-normální.

Věta*: Přípustné nedegenerované baz. řešení je l-optimální právě tehdy, je-li jemu příslušná l-tabulka l-normální.

Důkaz: V obecném kroku l-metody máme tabulku



ε metoda odstranění degenerace (cyklus) $\varepsilon > 0$

Podle 1. V DSM máme opt. řeš. zadané úlohy.
Další opt. řešení (pokud existují) dostaneme tabulky s pivotem kladným.
Pro libovolný pivot $d_{sr} > 0$ by po transf. tabulky platilo

$$R_0' = R_0 - \frac{R_r \cdot d_{s0}^{\geq 0}}{d_{sr}^{> 0}}$$

a) Je-li l-tabulka l-normální $\Rightarrow R_0' \prec R_0 \Rightarrow$ l-opt řeš $(x_0, x) = d_0$

b) Je-li $(x_0, x) = d_0$ l-opt. řeš, pak každé jiné opt. řeš. získáme

$$R_0' = R_0 - \frac{R_r \cdot d_{s0}^{\geq 0}}{d_{sr} > 0} \prec R_0 \Rightarrow R_r \succ \sigma \quad \text{pro lib. } r \quad \square$$

---

1. věta l-metody: Je-li v l-tabulce $d_0 = (d_0)_B > 0$, $(d_0)_N = \sigma$ a tabulka je l-normální, potom jsme získali l-opt. řešení zadané úlohy.

Dk: Plyne z 1. věty DSM a Věty *

2. věta l-metody: Ex-li v l-tabulce řádek s tak, že $d_{s0} < 0$, $d_{sj} \geq 0$, $j \in N$, potom neex. řešení zadané úlohy.

Dk: plyne z 2. věty DSM

3. věta l-metody: Nejsou-li splněny předpoklady 1. ani 2. věty této, potom $s \underset{def}{=} \min\{ i = 1, \dots, m+n \mid d_{i0} < 0 \}$,

$$l \text{ def}: \quad \underset{\substack{j \in N \\ d_{sj} < 0}}{\text{lex.}\min} \left\{ \frac{R_j}{|d_{sj}|} \right\} \equiv \frac{R_l}{|d_{sl}|}$$

jednoznačně urč. díky lex-E matice

a provedeme transformaci l-tabulky s pivotem $d_{sl} < 0$. Dostaneme opět l-normální tabulku.

Dk: $R_l' = \dfrac{\overset{\succ 0}{R_l}}{\underset{> 0}{-d_{sl}}} \succ 0$

$j \in N \setminus \{l\}$: $R_j' = \overset{\succ 0}{R_j} - \dfrac{\overset{\succ 0}{R_l} \cdot d_{sj}}{\underset{< 0}{d_{sl}}}$

$d_{sj} \geq 0 \Rightarrow R_j' \succ 0$

$d_{sj} < 0 \Rightarrow$ Podle def $l \Rightarrow \dfrac{R_l}{|d_{sl}|} \prec \dfrac{R_j}{|d_{sj}|}$

$\Rightarrow \dfrac{R_l}{d_{sl}} \succ \dfrac{R_j}{d_{sj}} \Rightarrow R_j \succ \dfrac{R_l}{d_{sl}} \cdot d_{sj}$

$\Rightarrow R_j' \succ 0 \Rightarrow$ opět l-normální tabulka.

Dále $R_0' = R_0 - \dfrac{\overset{\succ 0}{R_l} \cdot \overset{< 0}{d_{0s}}}{\underset{< 0}{d_{sl}}} \prec R_0$. □

Pozn: Jediný rozdíl oproti DSM je, že klíč. řádek nahradíme

$$\overset{s}{\boxed{0 \dots 0 \; -1 \; 0 \dots 0 \mid 0}} \to R_s$$

Pozn: l-metoda je konečná, protože bázických řešení je pouze konečný počet a nemůžeme se vracet vzhledem k $R_0' \prec R_0$.

Alg $\Rightarrow$

1. Gomoryho alg.:

Řeší čistou úlohu

$$\max_{M'_c} c^T x, \quad M'_c = \{ (x, x') \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + x' = b,\ x, x' \geq 0,\ x_1, \dots, x_{n+m} \in \mathbb{Z} \}$$

Předp.:
1) $c^T x = x_0 \in \cancel{\mathbb{R}} \mathbb{Z}$;
2) M je omezená;
3) v žádném kroku nenastává degenerace;
4) $c < 0$

---

1. krok: l-metodou řešíme úlohu

$$\max_{M'} c^T x$$

r-tý krok: l-metodou řešíme úlohu

$$(r) \quad \max_{M' \cap \overline{H_1^+} \cap \overline{H_2^+} \cap \dots \cap \overline{H_{r-1}^+}} c^T x$$

(a) nemá řeš. úlohy $(r) \Rightarrow M' \cap \overline{H_1^+} \cap \dots \cap \overline{H_{r-1}^+} = \emptyset \Rightarrow M'_c = \emptyset$, konec.

(b) $\exists$ l-opt. řeš. $(x, x')^{opt} \in M'_c \Rightarrow$ máme opt. řeš. zadané úlohy.

(c) $\exists$ l-opt. řeš. $(x, x')^{opt} \notin M'_c$

ozn.: $k \equiv \min \{ i \in \{0, 1, \dots, m+n\} \mid d_{i0} \notin \mathbb{Z} \}$

z posl. tabulky vybereme k-tý řádek

X_k	d_{kj}	d_{k0}

a utvoříme řez.

$$\overbrace{-d_{k0} + \sum_{j \in N} d_{kj} x_j}^{-x_{n+m+r+1}} \geq 0 \qquad \overline{H_r^+}$$

což přepíšeme na tvar

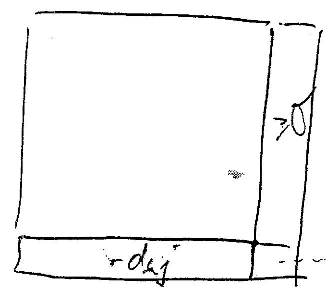
$$x_{n+m+r+1} = -d_{k0} + \sum_{j \in N} d_{kj} x_j$$

a k poslední tabulce přidáme řádek jako poslední

$X_{n+m+r+1}$	$-d_{kj}$	$-d_{k0}$

a řešíme tedy úlohu

$$\max_{M' \cap \overline{H_1^+} \cap \dots \cap \overline{H_{r-1}^+} \cap \overline{H_{r}^+}} c^T x \qquad l\text{-metodou}$$



Zřejmě posl. řádek je klíčový

Po jedné transf. tabulky ~~můžeme~~ přidaný posl. řádek vyhodit $\Rightarrow r := r+1 \longrightarrow r$-tý krok.

Pozn: Za uvedených předp. je 1. Gomoriho alg. konečný.

8.

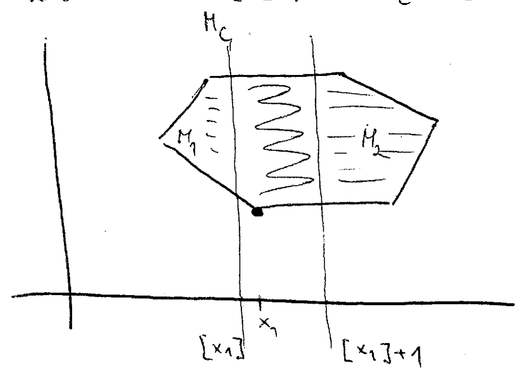
11. 04. 2008

Komb. metod CLP

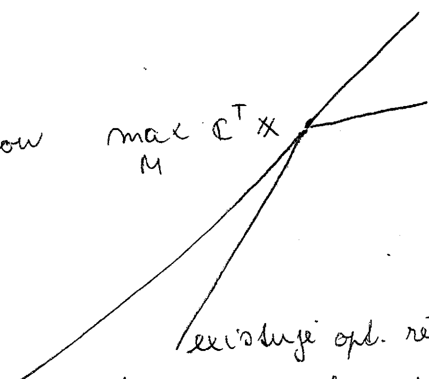
Metoda Branch & Bound Landa a Doiga

Řešíme $\max c^T x$ $\quad M_C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ x_\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\} \}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad h(A) = m$



1. krok – řešíme úlohu spojitou $\max_M c^T x$



neex. řeš. $M = \emptyset \Rightarrow M_C = \emptyset$ konec

neex. řeš., protože $c^T x$ shora neomezená na M $\Rightarrow$ nelze tuto metodu použít $\Rightarrow$ Předpokládáme M omezená.

existuje opt. řeš. $x^* \in M_C \Rightarrow$ máme řeš.

ex. $x^{opt} \notin M_C$, pak jdeme na krok 2.

2. krok určíme $k = \min \{ \alpha \in C \mid x_\alpha^{opt} \notin \mathbb{Z} \}$

definujme $M_1 = \{ x \in M \mid x_k \leq [x_k^{opt}] \}$

$M_2 = \{ x \in M \mid x_k \geq [x_k^{opt}] + 1 \}$

konvexní polyedry o přidání 1 lineární nerovnosti

Řešíme 2 úlohy (a) $\max_{M_1} c^T x$; (b) $\max_{M_2} c^T x$.

ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$\boxed{11.4.2008}$

ZO 1

24.

METÓDA BRANCH AND BOUND LANDA A DOIGA

Riešme $\max_{M_C} c^T x$, $M_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0, x_\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\}\}$,

$1 \leq m \leq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $h(A) = m$.

1. krok: Riešme úlohu spojitú $\max_M c^T x$

- neexistuje riešenie, lebo $M = \emptyset \Rightarrow M_C = \emptyset \Rightarrow$ koniec
- neexistuje riešenie, pretože $c^T x$ zhora neobmedzená na $M \Rightarrow$ $\Rightarrow$ nemožno túto metódu použiť $\Rightarrow$ Budeme predpokladať, že M je obm.
- existuje $x^{opt} \in M_C \Rightarrow$ máme riešenie zadanej úlohy. Koniec
- existuje $x^{opt} \notin M_C$, potom ideme na krok 2.

2. krok:

Určíme $k = \min\{\alpha \in C \mid x_\alpha^{opt} \notin \mathbb{Z}\}$

~~Definovaná~~ Určíme $M_1 = \{x \in M \mid x_k \leq [x_\alpha^{opt}]\}$

$M_2 = \{x \in M \mid x_k \geq [x_\alpha^{opt}] + 1\}$

konvexné polyédry

Riešme 2 úlohy: ⓐ $\max_{M_1} c^T x$, ⓑ $\max_{M_2} c^T x$

a) $M_1 = \emptyset$
α) $M_2 = \emptyset \Rightarrow M_C = \emptyset \Rightarrow$ neexistuje riešenie. Koniec.
β) $\exists x^2$ opt. riešenie ⓑ s vlastnosťou $x^2 \in M_C \Rightarrow x^2$ je opt. Koniec
γ) $\exists x^2 \notin M_C$. Potom delíme M_2. $M = M_2$ a krok 2.

b) $\exists x^1$ opt. riešenie úlohy ⓐ
$x^1 \in M_C$
α) $M_2 = \emptyset \Rightarrow x^1$ je opt. Koniec
β) $\exists x^2 \in M_C$. Ak $c^T x^1 \geq c^T x^2 \Rightarrow x^1$ je opt. Koniec
Inak x^2 je opt. Koniec
γ) $\exists x^2 \notin M_C$. Ak $c^T x^1 \geq c^T x^2 \Rightarrow x^1$ je opt. Koniec
Ak $c^T x^1 < c^T x^2$, potom uložíme
$x^1, c^T x^1$ a delíme M_2. $M = M_2$ a kr. 2.

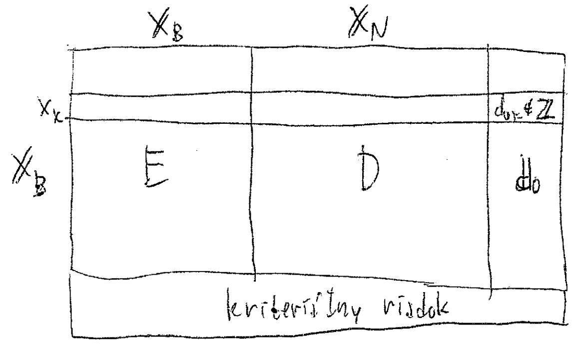
c) $\exists x^1$ úlohy ⓐ ~~x~~
$x^1 \notin M_C$
α) $M_2 = \emptyset \Rightarrow M = M_1$ a krok 2.
β) $\exists x^2 \in M_C$, $c^T x^1 \leq c^T x^2 \Rightarrow x^2$ je opt. Koniec
$c^T x^1 > c^T x^2 \Rightarrow$ uložíme $x^2, c^T x^2$, $M = M_1 \Rightarrow$ 2. krok

γ) $\exists x^2 \notin M_C$, postupne $M = M_1$, $M = M_2$ a 2. krok.

Odporúča sa použiť, ak $|C| = 2, 3$. Inak ak $C = \{1, \dots, n\}$, potom je lepšie použiť metódu sečných nadrovín.

Pozn:

x_0^{opt}:



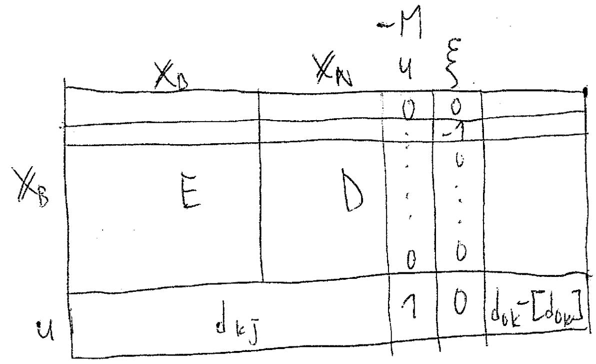
$x_k^{opt} = d_{0k} \notin \mathbb{Z}$

k-ty riadok: $x_k = d_{0k} - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j$

$$\left.\begin{array}{l} x_k = d_{0k} - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j \\ x_k + \xi = [d_{0k}] \end{array}\right\} \Rightarrow \xi = \underbrace{[d_{0k}] - d_{0k}}_{<0} + \sum_{j \in N} d_{kj} x_j$$

Miesto tohto riadku pridáme k poslednej tabuľke

$$u = -[d_{0k}] + d_{0k} - \xi - \sum_N d_{kj} x_j$$



PARAMETRICKÉ PROGRAMOVANIE

Definícia:

Všeobecnou úlohou parametrického programovania rozumieme:

(1) $\min\limits_{x \in M(\nu)} F(x, \lambda)$, kde $F(x, \lambda): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}$, $M(\nu) \subset \mathbb{R}^n$ pre každom pevnom $\nu \in \mathbb{R}^m$

$\lambda \in \mathbb{R}^t$, $\nu \in \mathbb{R}^m$

ní

Hodnoty λ, ν nazývame parametre.

20 2 25.

Definícia 1:

Oborom riešiteľnosti úlohy param. prog. (1) rozumieme $\mathcal{A}_{\lambda,\nu} = \{(\lambda,\nu) \in \mathbb{R}^{l+m} \mid (1) \text{ má rieš.}\}$

Definícia 2:

Ak je x^0 optimálne riešenie úlohy (1) pri pevnej voľbe ~~[illegible]~~ λ^0, ν^0, potom oborom stability riešenia x^0 rozumieme

$$\mathcal{A}^0_{\lambda\nu} = \{(\lambda,\nu) \in \mathbb{R}^{l+m} \mid \min_{x \in M(\nu)} F(x,\lambda) = F_\nu(x^0,\lambda)\}.$$

Definícia 3:

Funkciou riešiteľnosti úlohy (1) rozumieme

$$\varphi(\lambda,\nu) \equiv \min_{x \in M(\nu)} F(x,\lambda), \quad (\lambda,\nu) \in \mathcal{A}_{\lambda\nu}.$$

Delenie: I 1) jednoparametrické úlohy
2) viacparametrické úlohy

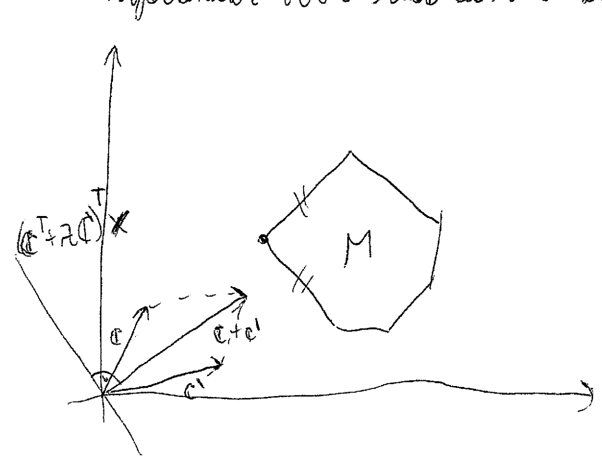
II 1) lineárne úlohy
2) ~~[illegible]~~ nelineárne úlohy

ÚLOHA LINEÁRNEHO JEDNOPARAMETRICKÉHO PROGRAMOVANIA S PARAMETROM V CIEĽOVEJ FUNKCII

(2) $\min_M (c + \lambda c')^T x, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ c, c' \in \mathbb{R}^n, \ M = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

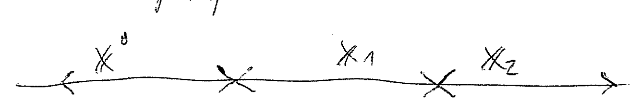
$M \neq \emptyset, \ 1 \leq m < n, \ \mathrm{rank}(A) = m$

Myšlienka: obor riešiteľnosti sa rozloží pomocou oborov stability.



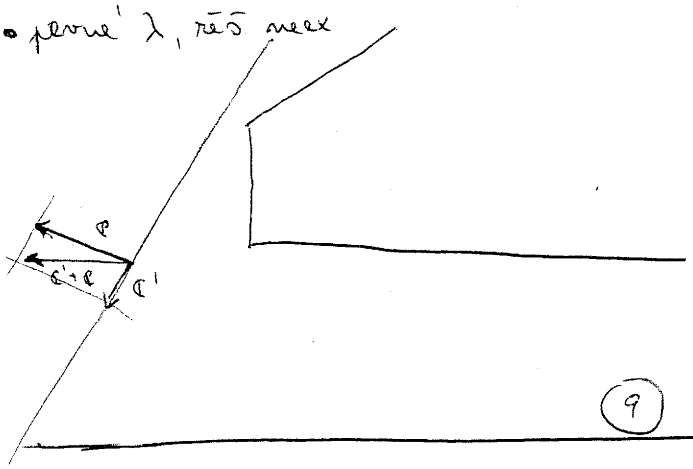
$\lambda = 1$ (dáme) - pevné

a môžeme $(c + \lambda c')^T x$ otáčať do dotahu na rovnobežky s priľahlými hranami



a tím dostáváme všechny obory stability a vš. přípustné λ. (26.)

• pevné λ, řeš. neex



(9)

1. Věta L1PP

Jestliže pro pevné $\lambda_0 \in R$ ex. opt. řešení x^1 úlohy (2), potom $\exists \underline{\lambda_1}, \overline{\lambda_1}, \underline{\lambda_1} \le \overline{\lambda_1}$ tak, že

1) pro $\lambda \in \langle \underline{\lambda_1}, \overline{\lambda_1} \rangle$ zůstává opt. řeš. úlohy (2) stále x^1

2) $\lambda_0 \in \langle \underline{\lambda_1}, \overline{\lambda_1} \rangle$

3) není-li x^1 degenerované, potom jsme získali obor stability řešení příslušný x^1

Důkaz:

Pro pevné λ_0 máme úlohu LP a tu řešíme SM. Poslední tabulka:

	$c_B - \lambda_0 c_B'$ x_B	$c_N - \lambda_0 c_N'$ x_N		
x_B	E	D	d_0	≥ 0
	0			

$$(c_N + \lambda_0 c_N') - (c_B + \lambda_0 c_B')^T D \ge 0$$

Podle 1.V. SM $\Rightarrow$ pro $\{\lambda \mid (c_N - \lambda c_N') - (c_B - \lambda c_B')^T D \ge 0\}$ je toto řešení baz. příp. $(d_0, 0)$ optimální.

Po úpravě $\underbrace{c_N - c_B^T D}_{\mu} + \lambda \big(\underbrace{c_N' - c_B'^T D}_{\nu}\big) = \mu + \lambda \nu$.

Označme:
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \{\alpha \in N \mid \nu_\alpha > 0\} \\ I_2 &= \{\alpha \in N \mid \nu_\alpha < 0\} \\ I_3 &= \{\alpha \in N \mid \nu_\alpha = 0\} \end{aligned}\right\} I_1 \cup I_2 \cup I_3 = N$$

$\Rightarrow$ pro $\alpha \in I_1 \Rightarrow \lambda \geq -\frac{\mu_\alpha}{v_\alpha}$

pro $\alpha \in I_2 \Rightarrow \lambda \leq -\frac{\mu_\alpha}{v_\alpha}$ $\quad \Rightarrow \lambda \in \left\langle \sup_{\alpha \in I_1} \left\{-\frac{\mu_\alpha}{v_\alpha}\right\} ; \inf_{\alpha \in I_2} \left\{-\frac{\mu_\alpha}{v_\alpha}\right\} \right\rangle$

$\underline{\lambda_1} = \sup_{\alpha \in I_1} \left\{-\frac{\mu_\alpha}{v_\alpha}\right\} \qquad \overline{\lambda_1} = \inf \left\{-\frac{\mu_\alpha}{v_\alpha}\right\}$

∘ ostatní zřejmé

<u>Poznámka:</u> V případě degenerace x^1 dostaneme pouze část oboru stability. K důkazu se ε-modifikovaná úloha.

<u>Úmluva:</u> Předp. nadále, že při výpočtu SM nikdy nenastane degenerace.

<u>Důsledek 1:</u> Obory stability jsou konvexní uzavřené množiny a je jich pouze konečný počet.

($\langle \underline{\lambda_i}, \overline{\lambda_i} \rangle$ jsou jednoznačně přiřazeny vrcholům $x^i \in M$, kterých je pouze konečný počet)

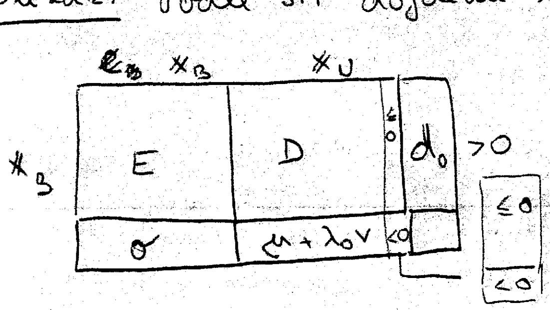
$\langle \underline{\lambda_i}, \overline{\lambda_i} \rangle$ jsou $\nwarrow$ uzavřené úsečky, uzavřené polopřímky, $\mathbb{R}$

<u>2. Věta L1PP:</u>

Jestliže pro pevné $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ neex. řešení úlohy (2) a $M \neq \emptyset$, potom $\exists$ ∞ otevřený interval J tak, že:

1) pro $\xi \in J$ neex. řešení úlohy (2).
2) $\lambda_0 \in J$.

<u>Důkaz:</u> Podle SM dojdeme k tabulce:



2 Věta SM $\Rightarrow \exists j \in N$ tak, že

$\mu_j + \lambda_0 v_j < 0 \quad d_{ij} \leq 0, \ i \in B$

Protože $\{d_{ij}\}, \ i \in B$ nezávisí na λ

$\Rightarrow \{\lambda \mid \mu_j + \lambda v_j < 0\}$ pro tato neex. řešení příslušné úlohy (plyne z 2. věty SM)

Nastane 1 z násl. možností:

a) $v_j > 0 \Rightarrow \lambda < -\frac{\mu_j}{v_j} \Rightarrow J = \left(-\infty, -\frac{\mu_j}{v_j}\right)$

b) $v_j < 0 \Rightarrow \lambda > -\frac{\mu_j}{v_j} \Rightarrow J = \left(-\frac{\mu_j}{v_j}; \infty\right)$

c) $v_j = 0 \Rightarrow \mu_j < 0 \Rightarrow J = \mathbb{R}$

∇ není to nutně ten největší možný interval

Důsledek 2:

Obor řešitelnosti úlohy (2) $\mathcal{A} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (2) \text{ má řešení}\}$ je konvexní a uzavřená mn., pro kterou platí $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in P} \langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle$, kde P je množina indexů vrcholů M.

Důkaz:

"$\Rightarrow$": Zvolme $\lambda \in \mathcal{A}$ pevně $\xRightarrow{1.LP}$ musí opt. řeš. nastat v aspoň 1 vrcholu $M \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists i \mid \lambda \in \langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i \in P} \langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle$

"$\Leftarrow$": Zvolme $\lambda \in \bigcup_{i \in P} \langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle \Rightarrow \exists i \mid \lambda \in \langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle$ přičemž opt. řeš. je x^i tj. řešení (2) existuje $\Rightarrow \lambda \in \mathcal{A}$.

Konvexnost:

Zvolme $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{A}$, def $\lambda_3 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$.

Kdyby $\lambda_3 \notin \mathcal{A} \Rightarrow$ pro λ_3 $\nexists$ opt. řeš. (2) $\xRightarrow{2VL1PP} \exists J \infty$ otevřený interval, kde řešení také neex. Potom ale λ_1 nebo λ_2 do J patří a to je spor.

Uzavřenost: Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

3V. L1PP: Nech x^1 je optimálne riešenie z oboru stability $\langle \underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1 \rangle$.

Jestliže $\overline{\lambda}_1$ z 1VL1PP je konečné, potom pro $\lambda > \overline{\lambda}_1$ nastane jedna z možností:

a) pro $\lambda > \overline{\lambda}_1$ neex. opt. řešení (2)

b) $\exists x^2$ sousední vrchol M k vrcholu x^1 a k němu $\langle \underline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_2 \rangle$ tak, že pro $\lambda \in \langle \underline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_2 \rangle$ zůstává opt. řeš x^2 a navíc platí $\overline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_2$.

Pozn: analogická věta platí i obráceně pro $\underline{\lambda}_1$.

Def: Funkce $\varphi(\lambda) = \min_M (c - \lambda c')^T x$, $\lambda \in \mathcal{A}$ se nazývá fcí řešitelnosti (2).

4.Věta L1PP: Funkce $\varphi(\lambda)$ je na $\mathcal{A}$ po částech lineární, spojitá a konkávní!

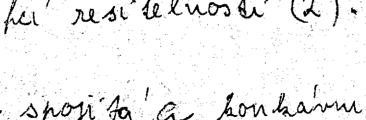
Důkaz: Nad každým $\langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle$ platí $\varphi(\lambda) = (c - \lambda c')^T x^i \quad \forall i$ — lineární!

Protože $\mathcal{A} = \bigcup \langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle$ a podle 3VL1PP je $\overline{\lambda}_i = \underline{\lambda}_{i+1} \ \forall i \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi$ je po částech lineární a spojitá nad $\mathcal{A}$.

Konkávnost:

zvolme $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{A}$ a $\lambda_3 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2$ $\quad \alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$

$$\varphi(\lambda_3) = \min_M \left(((\alpha+\beta)c + (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)c')^T x \right) \geq \alpha \cdot \min_M (c + \lambda_1 c')^T x +$$
$$+ \beta \min_M (c + \lambda_2 c')^T x = \alpha \varphi(\lambda_1) + \beta \varphi(\lambda_2).$$



Poznámka: Pokud $\lambda \in I$, kde I je pevný omezený uzavřený interval, potom
$\min_{M \times I} (c + \lambda c')^T x$ existuje a dostaneme λ^{opt}, x^{opt}.

$I = \langle \lambda^0, \lambda^{00} \rangle$: $\left.\begin{array}{l} \min_M (c + \lambda^0 c')^T x \\ \min_M (c + \lambda^{00} c')^T x \end{array}\right\}$ menší z funkčních hodnot je optimální

Pozor! : Ku úlohe lineárneho parametrického programovania neexistuje duálna úloha.

Nelineární programování – základy (konvexní, zobecněně konvexní)

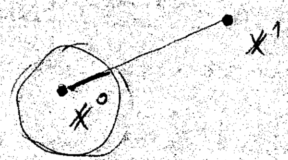
Věta 1: Množina $M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \dots, m \}$, $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexní, je konvexní.

Dk: $x^1, x^2 \in M$, $x^3 = \alpha x^1 + \beta x^2$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$

$$\forall j \quad g_j(x^3) = g_j(\alpha x^1 + \beta x^2) \leq \alpha g_j(x^1) + \beta g_j(x^2) \leq 0 \Rightarrow x^3 \in M$$

Věta 2: Každé lokální minimum konvexní funkce je minimum globální. Platí v $\mathbb{R}^m$ nebo lib. konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$.

Důkaz: Nechť x^0 je lok. min. $\Rightarrow \exists \mathcal{O}(x^0, \varepsilon)$ tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x^0, \varepsilon) \cap M$ platí $f(x) \geq f(x^0)$.



Pro důkaz sporem předp., že $\exists x^1 \in M$ tak, že $f(x^1) < f(x^0)$.

Z konvexity $M \Rightarrow x = \alpha x^1 + \beta x^0 \in M$ $\quad \alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$.

Z konvexity $f \Rightarrow f(x) \leq \alpha f(x^1) + \beta f(x^0) < (\alpha + \beta) f(x^0)$ pro $\alpha, \beta > 0$. $\lightning$

Pro $x = \alpha x^1 + \beta x^0$, $x \in \mathcal{O}(x^0, \varepsilon)$ ale platí $f(x) \geq f(x^0)$

25.04.2008

(10)

Lemma: (L) Funkce $F(x)$, která má 1. parc. derivace na otevřené konvexní mn. M je konvexní $\Leftrightarrow$ platí:

$$F(x^2) - F(x^1) \geq \underbrace{\nabla F(x^1)}_{\text{gradient}}{}^T (x^2 - x^1), \quad \forall x^1, x^2 \in M.$$

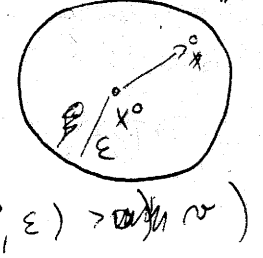
Věta 3: Je-li $f(x) \in C^2$ na otevřené konvexní množině M, potom je konvexní na $M \Leftrightarrow \nabla^2 f(x) = H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$ je pozitivně semidefinitní.

Dk: Taylorova věta: $f(x^2) = f(x^1) + \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1) + \frac{1}{2} (x^2 - x^1)^T \nabla^2 f((x^1) + \Theta(x^2 - x^1))(x^2 - x^1)$ (1)

1) $f(x)$ je konvexní $\overset{L}{\Rightarrow} f(x^2) \geq f(x^1) + \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (x^2 - x^1) \nabla^2 f(x^2 + \Theta(x^2 - x^1))(x^2 - x^1) \geq 0$ (2)

Pro důkaz sporem, předp., že $\nabla^2 f(x)$ není poz. semidefinitní na $M \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x^0 \in M$, $v \neq 0$ tak, že $v^T \nabla^2 f(x^0) v < 0$.



Protože 2. parc. derivace jsou spojité $\Rightarrow \exists \mathcal{O}(x^0, \varepsilon) \subset M$ tak, že $v^T \nabla^2 f(x) v < 0$, $\forall x \in \mathcal{O}(x^0, \varepsilon)$.

v $\mathcal{O}(x^0, \varepsilon)$ $\exists \tilde{x}$ tak, že $v = \rho(\tilde{x} - x^0)$, $\rho > 0$ (dim $\mathcal{O}(x^0, \varepsilon) > v$)

Potom ③ $\Rightarrow \rho^2(\tilde{x}-x^0)^T \nabla^2 f(x)(\tilde{x}-x^0) < 0$, což je spor s ②.

Protože pro lib. $\Theta \in (0,1)$ je $x \geq x^0 + \Theta(\tilde{x}-x^0) \in O(x^0;\varepsilon) \Rightarrow (\tilde{x}-x^0)^T \nabla^2 f(x^0 + \Theta(x^2-x^1))$

2) $\nabla^2 f(x)$ poz. semidefinitní $x \in M \Rightarrow$ pro lib. $x^1, x^2 \in M$

$(x^2-x^1)^T$

?

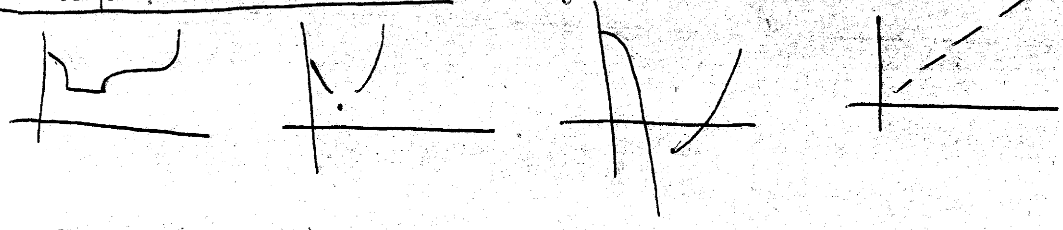
Zobecněné konvexní funkce

I. Zachováváme konvexní def. obor.

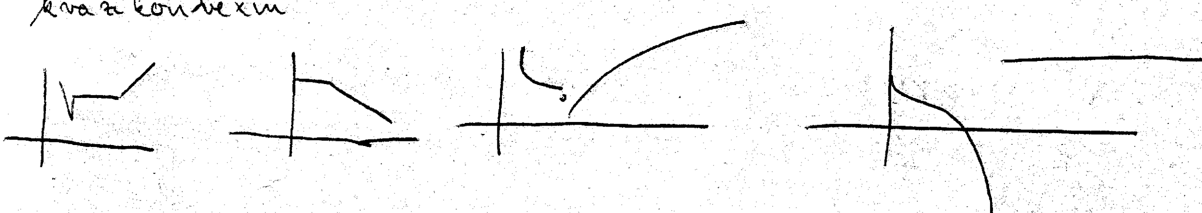
Definice 2: Funkci $f(x)$ definovanou na konvexní množině M nazýváme **kvazikonvexní**, jestliže pro lib. $x^1, x^2 \in M$ a $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí $f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\}$.

Funkce $f(x)$ je explicitně kvazikonvexní na M, je-li zde kvazikonvexní a dále platí pro lib. $x^1, x^2 \in M$ a $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $f(x^1) \neq f(x^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) < \max\{f(x^1), f(x^2)\}$.

Př: expl. kvazikonvexní $\Rightarrow$ když je úsečka $\parallel x$ je minimální



kvazikonvexní



Věta 4: Platí na konvexní mn. M, že f je konvexní $\Rightarrow f$ expl. kvazikonvexní $\Rightarrow f$ kvazikonvexní.

Dk: $\forall x^1, x^2 \in M$ $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ $\xRightarrow{\text{konvexita}}$ $f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \leq$
$\leq \lambda_1 \max\{f(x^1), f(x^2)\} + \lambda_2 \max\{f(x^1), f(x^2)\} = \max\{f(x^1), f(x^2)\}$

expl $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ & $f(x^1) \neq f(x^2) \Rightarrow <$

expl. kvazikonvexní $\Rightarrow$ kvazikonvexní

<u>Věta 5:</u> Funkce $f(x)$ def. na konvex. mn. M je kvazikonvexní $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí, že $A_\alpha = \{x \in M \mid f(x) \le \alpha\}$ je konvexní.

<u>Dk:</u> 1) f kvazikonvexní. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x^1, x^2 \in \cancel{M} A_\alpha$ lib. a utvořme $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$

$\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. ? $x \in A_\alpha$

Protože M je konvexní $\Rightarrow$ $x \in M$

$f(x) \le \max(f(x^1), f(x^2)) \le \alpha \Rightarrow A_\alpha$ je konvexní.

2) A_α je konvexní $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. ~~Zvolíme~~

Zvolíme $x^1, x^2 \in M$, $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a def $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$.

$\max\{f(x^1), f(x^2)\} = \alpha^0$.

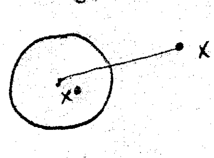
Platí $f(x^1) \le \alpha_0$, $f(x^2) \le \alpha_0$ $\rightarrow$ $x^1, x^2 \in A_{\alpha_0}$ - konvexní $\Rightarrow x \in A_{\alpha_0}$

$\Rightarrow x \in M$ & $f(x) \le \alpha_0 = \max\{f(x^1); f(x^2)\} \Rightarrow$ kvazikonvexita f

<u>Důsledek:</u> Množina $L = \{x \in M \mid f_i(x) \le b_i \ (i = 1, \dots, m)\}$, kde M je konvexní, $b_i \in \mathbb{R}$, f_i kvazikonvexní na M $\forall i$, je konvexní.

<u>Věta 6:</u> Každé lok. minimum expl. kvazikonvexní fce $f(x)$ v $\mathbb{R}^n$ je absolutní.

<u>Dk:</u>



Uvažujme x^0 jako lok. min $f(x)$ v $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \exists \mathcal{O}(x^0, \varepsilon)$ tak, že pro $\forall x \in \mathcal{O}(x^0, \varepsilon)$ platí $f(x) \ge f(x^0)$.

Pro spor předp., že x^0 není ~~glob~~ ~~opt~~ abs. min. $f \Rightarrow \exists x^1$: $f(x^1) < f(x^0)$

$\xRightarrow[\text{kvazikonv}]{\text{expl.}}$ pro $\forall x = \lambda_1 x^0 + \lambda_2 x^1$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$f(x) < f(x^0) = \max\{f(x^1), f(x^0)\}$. Pro $x \in \mathcal{O}(x^0, \varepsilon)$ ↯

<u>Poznámka:</u> f je kvazikonkávní $\Leftrightarrow$ $-f$ je kvazikonvexní.
expl — " — $\Leftrightarrow$ expl — " —

$\Rightarrow f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \ge \min\{f(x^1); f(x^2)\}$

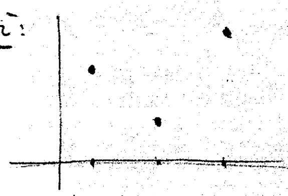
II. M nemusí být konvexní, ale požadujeme diferencovatelnost funkce.

Def 3: Funkci $f(x)$ definovanou v $x^0 \in M$ nazýváme lok. pseudokonvexní, jestliže je v x^0 diferencovatelná a

$$f(x) \leq f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) \leq 0$$

$$f(x) < f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) < 0 \quad , \quad x \in M$$

Př:



Funkce $f(x)$ je pseudokonvexní na M, je-li lokálně pseudokonvexní pro $\forall x \in M$.

Def 4: Pro obecnou fci, která je v x^0 diferencovatelná, nazýváme x^0 účinným minimem $f(x)$ na M, jestliže platí $(x-x^0)^T \nabla f(x^0) \geq 0 \ \forall x \in M$.

Věta 7: Každé účinné minimum pseudokonvexní funkce je minimem absolutním.

Dk: x^0 účinné min $\Rightarrow (x - x^0)^T \nabla f(x^0) \geq 0 \quad , \quad x \in M$

Pro spor předp, že není abs. $\Rightarrow \exists x^1 \in M$ tž $f(x^1) < f(x^0) \xrightarrow{\text{pseudokonvex}}$

$\Rightarrow (x^1 - x^0)^T \nabla f(x^0) < 0 \Rightarrow$ ↯

Důsledek: Každý stacionární bod tj x, pro které platí $\nabla f(x) = 0$ je abs. min. pseudokonvexní funkce.

Věta 8: Je-li M konvexní, potom pro diferencovatelnou funkci f na M platí: konvexní $\Rightarrow$ pseudokonvexní $\Rightarrow$ expl. kvazikonvexní $\Rightarrow$ kvazikonv.

Dk: Podle lemmatu (L): pro konv. fci $\exists \ f(x^2) - f(x^1) \geq \nabla f(x^1)(x^2 - x^1)$

$$\Rightarrow f(x^2) \underset{<}{\leq} f(x^1) \Rightarrow \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1) \underset{<}{\leq} 0$$

Poznámka: Funkce $f(x)$ je pseudokonkávní, je-li $-f(x)$ pseudokonvexní.

Funkce $f(x)$ je pseudolineární, je-li současně pseudokonkávní a pseudokonvexní.

Pro pseudokonkávní

$$f(x) \underset{>}{\geq} f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) \underset{>}{\geq} 0$$

Pro pseudolineární

$$f(x) < f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) < 0$$
$$f(x) = f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) = 0$$
$$f(x) > f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) \geq 0$$

11 02.05.2008

(1) $\min_M f(x)$; $M = \{x \in N \mid g(x) \leq \sigma\}$ kde f, g_i - konvexní na $N \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní množina ; $i = 1, \dots, m$

Úloha (1) je úlohou konvexního programování.

Předp. nyní, že f a g_i jsou spojitě diferencovatelné na N.
(myslíme N otevřenou v $\mathbb{R}^n$) $M \neq \emptyset \Rightarrow x^T \nabla f(x^2)$ zdola omezené na M

Kuhn - Tuckerovy podmínky

Def. Lagrangeovu fci přiřazenou úloze (1).

$$\phi(x, \mu) = f(x) + \mu^T g(x) \quad ; \quad \mu \geq \sigma, \quad x \in N$$

Definice: Říkáme, že (x^0, μ^0) splňuje Kuhn-Tuckerovy podmínky (je K-T stacionární) jestliže platí:

(a) $\mu^0 \geq \sigma$, $x^0 \in N$

b) $\nabla_\mu \phi(x^0, \mu^0) \leq \sigma$

c) $\nabla_x \phi(x^0, \mu^0) = \sigma$

d) $\nabla_\mu \phi(x^0, \mu^0)^T \mu^0 = 0$

Přepis K-T p. a jejich geom. interpretace:

z b) $\Rightarrow$ $g(x^0) \leq 0 \overset{a)}{\Rightarrow} x^0 \in M$

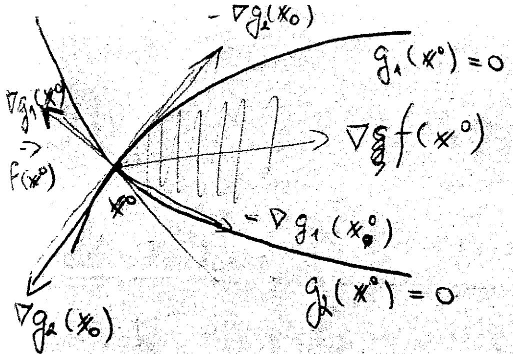
z d) $\Rightarrow$ $\underset{\leq 0}{g(x^0)^T}\ \underset{\geq 0}{\mu^0} = 0 \overset{a),b)}{\Longrightarrow}$ alespoň 1 složka $g_i(x^0), \mu_i$ je $= 0$ pro $\forall i = 1, \dots, m$

Tato podm. se nazývá podmínkou komplementarity.

z c) $\Rightarrow$ $\nabla f(x^0) + \mu^{0T} g(x^0) = \sigma$

Označím $J = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(x^0) = 0\}$ Tato množina je mn. indexů aktivních podmínek v x^0.

Potom z c) $\Rightarrow$ $\nabla f(x^0) = -\sum_{i \in J} \mu_i \nabla g_i(x^0)$ $\quad (\mu_i^0 \underset{d)}{=} 0 \quad i \notin J)$



$\Rightarrow$ opt. je v x^0

<u>Věta:</u> Jestliže f a g_i, $i=1,\dots,m$ jsou konvexní a spojitě diferencovatelné na konvexní mn. M. A jestliže (x^0, μ^0) je K-T stacionární bod, potom x^0 je opt. řešení úlohy (1).

Důkaz: platí podle předp.

$$f(x)-f(x^0) \geq \nabla f(x^0)^T(x-x^0) \qquad \forall x\in M \quad (\forall x\in N)$$

$$g_i(x)-g_i(x^0) \geq \nabla g_i(x^0)^T(x-x^0) \qquad \forall x\in M \quad \forall i=1,\dots,m$$

$$x^0\in M, \quad \nabla f(x^0) = -\mu^{0T}\nabla g(x^0)$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x^0) \geq -\mu^{0T}\nabla g(x^0)(x-x^0) \geq -\mu^{0T}(g(x)-g(x^0)) =$$

$$= -\mu^{0T} g(x) + \mu^{0T}\underbrace{g(x^0)}_{=0} = -\underbrace{\mu^{0T}}_{\geq 0}\underbrace{g(x)}_{\leq 0} \geq 0 \qquad \forall x\in M$$

<u>$f(x)\geq f(x^0)$, $\forall x\in M \Rightarrow$</u> x^0 je opt. řeš. (1)

Pozn.: Převádíme tedy řešení optimalizační úlohy na řešení soustavy rovnic a nerovností (tj. K-T podmínky).
Speciálně ve kvadratickém programování $\xrightarrow{\text{derivace}}$ lineární!

<u>Dualita</u>

Lagrangeova dualita

pro lin. prog. normální dualita

<u>Definice:</u> K úloze (1) def. duální úlohu

$$(2) \quad \max_K \phi(x,\mu) \; ; \; K=\{x\in N, \mu\geq 0 \mid \nabla_x \phi(x,\mu)=0\}$$

<u>Slabá věta o dualitě:</u> Nechť f a g_i jsou konvexní, spojitě diferencovatelné na konvexní mn. N.

Potom platí $\inf_M f \geq \sup_K \phi(x,\mu)$.

<u>Dk:</u> Je-li $M=\emptyset$ nebo $K=\emptyset \Rightarrow$ tvrzení jistě platí!

Nechť $M\neq\emptyset$, $x^1\in M$ lib.; $K\neq\emptyset$, $(x^2,\mu^2)\in K$ lib.

Předp. $\Rightarrow$ $f(x^1)-f(x^2) \geq \nabla f(x^2)^T(x^1-x^2)$

$$g_i(x^1) - g_i(x^2) \geq \nabla g_i(x^2)^T (x^1 - x^2) \quad \forall i \quad / \cdot u_i^2$$

$$x^1 \in M \Rightarrow x^1 \in N,\ g(x^1) \leq 0 \quad / \cdot u^2$$

$$(x^2, u^2) \in K \Rightarrow \cancel{(x^2, u^2) \in N}\ x^2 \in N,\ u^2 \geq 0$$

$$\nabla f(x^2) + u^{2^T} \nabla g(x^2) = 0 \quad / \cdot (x^1 - x^2)$$

$$\Rightarrow \underline{f(x^1) - f(x^2)} \geq - u^{2^T} \nabla g(x^2)(x^1 - x^2) \geq - u^{2^T}\left(g(x^1) - g(x^2)\right) =$$

$$= \underbrace{- u^{2^T} \overbrace{g(x^1)}^{\leq 0}}_{\geq 0} + u^{2^T} g(x^2) \geq \underline{u^{2^T} g(x^2)}$$

$$f(x^1) \geq f(x^2) + u^{2^T} g(x^2) = \phi(x^2, u^2) \qquad \boxtimes$$

- Platí i silná věta o dualitě.

Metody řešení úloh nelineárního programování

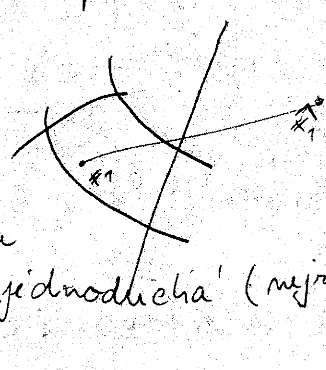
I. metody pro nalezení volného extrému ($\min_{\mathbb{R}^n} f(x)$) ← newtonovské, gradientní, kvazinewtonovské

Zemkeho metoda (Polak)

Využívají se u penalizačních a bariérových metod, (kdy převádíme úlohu na vázaný extrém na posloupnost úloh na volný extrém)

II. metody přípustných směrů (nejčastější)

- vyjdeme z lib. $x^1 \in M$. (= největší problém – najít výchozí příp. řeš.)
1) hledáme přípustný směr
2) hledáme délku kroku.



- Franka a Wolfa || Zoutendijkova
- vhodné pro případ, když M je jednoduchá (nejraději konvexní polyedr) s obecnou funkcí $f(x)$.

III metody sečných nadrovin Veinotten
- vhodné pro jednoduchou účelovou fci f (lineární) s obecnou M
- najdeme výchozí konvexní polyedr (nebo aspoň konvexní mn.) Z_1 tak, aby $Z_1 \supset M$. Hledáme $\min_{Z_1} f(x)$. Opt. řeš. $\bar{x}^1$. Je-li $\bar{x}^1 \in M$ jsme hotovi.

Jinak najdeme sečnou nadrovinu, která oddělí $\bar{x}^1$ od M

Dostaneme $Z_2 \equiv Z_1 \cap \{x \mid a^T x \leq b\}$ a řeš. $\min_{Z_2} f(x)$

Dostaneme $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \dots \supset M$.

IV. Metody využívající K-T. p.

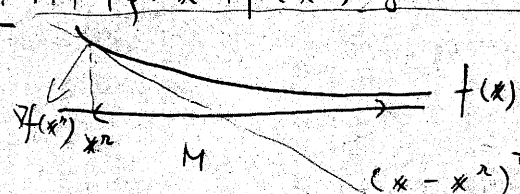
- Vhodné pro řešení kvadratického progr.

V. Spec. metody pro spec. problémy

Metoda Franka a Wolfa

$\min\limits_M f(x)$; $M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, f pseudokonvexní na M.

Předp: $M \neq \emptyset$, $\Rightarrow x^T \nabla f(x^r)$ je zdola omezená na M ~~na~~ pro $\forall x^r \in M$ (je splněno, když M omezená)



$\underline{x^r \text{ const}}$

$(x - x^r)^T \nabla f(x^r) \sim \min x^T \cdot \nabla f(x^r) \equiv \hat{x}^{r\,T}_{*} \cdot \nabla f(x^r)$

směr: $\hat{x}^r - x^r$

$$\min_{0 \le \lambda \le 1} f(x^r + \lambda(\hat{x}^r - x^r))$$

$\underline{\lambda = 1} \rightarrow x^{r+1}$ na hranici M

$\underline{\lambda < 1} \rightarrow x^{r+1}$ je bod obrazu.

Alg: 1) Řeš úlohu LP $\min\limits_M 0$. Pokud je $M \neq \emptyset$ dostaneme $x^1 \in M$ výchozí. $r = 1$

2) máme $x^r \in M$. Řeš úlohu $\min\limits_M x^T \nabla f(x^r)$ SM. Najdeme $\hat{x}^r$ opt. řeš. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) \le 0$, $x \in M$.

1V. F.W: Platí-li $(\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) = 0$, potom je x^r opt. řeš. zadané úlohy.

Dk: Protože $x^r \in M \Rightarrow (\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) \le 0$

z $(\underbrace{\hat{x}^r - x}_{x^r - x^r})^T \nabla f(x^r) \le 0 \Rightarrow \underbrace{(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r)}_{=0} + (x^r - x)^T \nabla f(x^r) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^r - x)^T \nabla f(x^r) \le 0 \quad \forall x \in M$

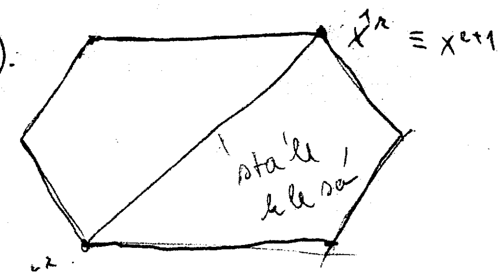
z pseudokonvexity

$f(x) < f(x^r) \Rightarrow \nabla f(x^r)^T (x - x^r) < 0$, $x \in M$

$\Rightarrow \underline{f(x) \ge f(x^r),\ x \in M}$

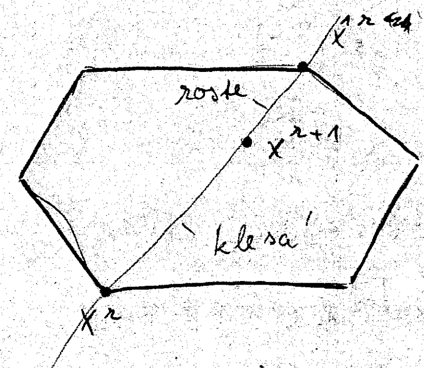
(12) 30.05.2008

2.V. F.W: Jestliže platí $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r) < 0$ a $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(\hat{x}^r) \le 0$, potom $x^{r+1} = \hat{x}^r$ a $f(x^{r+1}) < f(x^r)$.



3.V. FW: Jestliže platí $(\hat{x}^r - x^r)\cdot\nabla f(x^r) < 0$ a $\{(\hat{x}^r - x^r)\cdot\nabla f(\hat{x}^r) > 0$,
potom položíme $x^{r+1} = x^r + \lambda_r(\hat{x}^r - x^r)$, $f(x^{r+1}) < f(x^r)$,
kde λ_r je řešením rovnice $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r + \lambda(\hat{x}^r - x^r)) = 0$

$\left(\equiv \min\limits_{\langle 0,1\rangle} f(x^r + \lambda(\hat{x}^r - x^r)\right)$



4.V.: $\{x^r\}$ má alespoň 1 hromadný bod x^*, který je opt. řeš. zadané úlohy. (když platí V1 & V2 } - ty zaručují konečnost)

Více kriteriální programování (vektorová optimalizace)

(1) $\max\limits_M f(x)$, $M = \{x \mid g(x) \leq 0\}$, kde $f_i(x)$, $g_j(x)$ $(i = 1,\dots,s)$ $(j = 1,\dots,m)$ jsou reálné funkce def. v $\mathbb{R}^n$.

a) ideální řeš. – $\max\limits_M f_i(x) = f_i(x^*)$ $\forall i$

b) dominantní řeš. – $\exists i_0 \in \{1,\dots,s\}$ tak, že řešit (1) znamená řešit $\max\limits_M f_{i_0}(x)$.

c) eficientní řeš.

Def: Prvek $x^* \in M$ nazveme <u>eficientním řeš.</u> úlohy (1), jestliže $\nexists x \in M$ tak, aby platilo $f(x) \gneq f(x^*)$.

Množinu všech eficientních řešení označíme $\mathcal{E}$.

Def: Prvek $x^* \in M$ nazveme vlastním eficientním řešením úlohy (1), jestliže $\forall i \in \{1,\dots,s\}$ a $\forall x \in M$ pro které platí $f_i(x) > f_i(x^*)$ $\exists \beta > 0$ | $\exists k \in \{1,\dots,s\}$ tak, že $f_k(x) < f_k(x^*)$,

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{f_k(x^*) - f_k(x)} \leq \beta$$

d) kompromisní řeš. $f(x) \longrightarrow F(x)$ přiřadíme skalární fci

ad c): (převést na sk. ekvivalent)

Parametrický sk. ekvivalent je

$$\max_M \lambda^T f(x) \quad , \quad \lambda \in \Lambda \equiv \{\lambda \in R^{s} \mid \lambda \geq \sigma\}$$

Ozn.-li $M_{opt}(\lambda) - \{ x^0 \in M \mid \max_M \lambda^T f(x) = \lambda^T f(x^0) \}$ pro $\lambda \in \Lambda$

potom platí věta:

Věta: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{opt}(\lambda) \subset \mathcal{E}$.

Dk: Nechť $x^0 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{opt}(\lambda) \Rightarrow \exists \lambda^0 \geq \sigma$ tak, že $x^0 \in M_{opt}(\lambda^0)$

$\Rightarrow \lambda^{0T} f(x) \leq \lambda^{0T} f(x^0) \quad , \quad \forall x \in M$

Pro dk sporem předp., že $x^0 \notin \mathcal{E} \Rightarrow \exists \bar{x} \in M$ tak, že $f(\bar{x}) > f(x^0)$

$\xRightarrow{\lambda^0 > \sigma} \lambda^{0T} f(\bar{x}) > \lambda^{0T} f(x^0)$ ↯

Poznámka

1) Platí-li, že f_i, g_j jsou lineární, pak jde o lineární vícekriteriální opt.

2) Platí-li, že f_i - konkávní a g_j - konvexní, pak jde o konvexní ví~~ceparametrick~~ kriteriální opt.

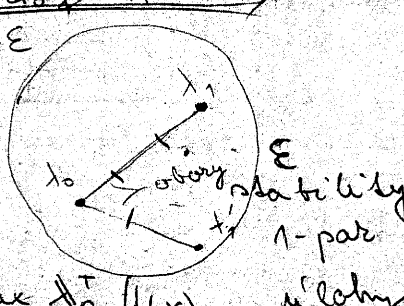
Tvrzení: Pro lin. vícekrit. prog. platí $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{opt}(\lambda) = \mathcal{E}$ a $\mathcal{E}$ je rovna množině sl. efic. řeš.

Pro konvexní vícekrit. prog. platí $\bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda > \sigma}} M_{opt}(\lambda) \subset \mathcal{E} \subset \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \setminus \{\sigma\} \\ \lambda \geq \sigma}} M_{opt}(\lambda)$

1. Alg. dialogu

$\lambda_0, \lambda_1 > 0$ (zvolí buď uživ. ∥ ~~[illegible]~~ ...), $x^0, x_1 \in \mathcal{E}$

Řešíme úlohu 1-param. $\left.\begin{array}{l} x^0 \in M_{opt}(\lambda_0) \\ x^1 \in M_{opt}(\lambda_1) \end{array}\right\}$



(*) $\max\limits_{x \in M} (\lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda_0))^T f(x)$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$

~~tak~~ tak, že najdeme řeš. pro $t = 0$ tj $\max \lambda_0^T f(x)$ úlohy $\equiv \lambda_0^T f(x^0)$ a obor stability $x^0 \to t_1 > 0$. Hodnoty $f(x^0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0))$ zváží uživatel a rozhodne se:

α) pokračujeme v řeš (*) pro $t > t_1$.

β) změníme λ_1 a řešíme (*)

γ) vrátíme se k předchozímu t_i

δ) změníme λ_0, λ_1

ω) uživatel je spokojen – konec

2. Alg. dialogu

- nejprve se aplikuje 1. alg dialogu $\quad f_i(x^*) \quad (i \in K)$

Def množinu $K \subset \{1, \dots, s\}$, kde chce zlepšit ~~fun~~ hodnoty a $\mu_i > 0$ o kolik chce alespoň zlepšit tyto hodnoty.

Definujme $M(K, \mu) = \{ x \in M \mid f_i(x) \geq f_i(x^*) + \mu_i,\ i \in K \}$

Ozn $\tilde{K} = \{1, \dots, s\} \setminus K$.

Řešíme úlohu

$$\max_{M(K,\mu)} \sum_{i \in \tilde{K}} \lambda_i f_i(x) \qquad \text{1. alg. dialogu.}$$

α) uživ je spokojen

β) může změnit K nebo μ_i

ad d):

1) informace o preferencích uživatele nedostaneme

- Metoda globální cílové funkce

$$\max_{x \in M} f_i(x) = f_i^* > 0 \quad \forall i$$

$$\min_{M} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*} \right)^p \right\} \qquad p = 1, 2$$

$\Rightarrow$ kompromisní řeš. & dá se dokázat, že je eficientní

2) informace o preferencích dostaneme před začátkem výpočtu

- Metoda funkce užitku

$$\max_{M} \sum_{i=1}^{s} w_i f_i(x) \quad , \quad w_i > 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{s} w_i = 1$$

∇ nesouměřitelné fce dělají problém.

3) informace o preferencích dostaneme během výpočtu

- f_1 —— f_i – porovnávání 2 funkcí

∇f_1 —— $-\nabla f_i \quad \forall i$ $\Rightarrow$ převod na fci užitku

– nelze dok. eficientní

4) informace o p. až po ukončení výpočtu

- zkusíme λ_1 a řeš. $\max_{M} \lambda_1^T f(x)$

λ_2

⋮

ad d):

1) informace o preferencích uživatele nedostaneme

• <u>Metoda globální cílové funkce</u>

$$\max_{x \in M} f_i(x) = f_i^* > 0 \quad \forall i$$

$$\min_{M} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*} \right)^p \right\} \qquad p = 1, 2$$

⇒ kompromisní řeš. & dá se dokázat, že je eficientní

2) informace o preferencích dostaneme před začátkem výpočtu

• <u>Metoda funkce užitku</u>

$$\max_{M} \sum_{i=1}^{s} w_i f_i(x) \quad , \ w_i > 0 \ , \ \sum_{i=1}^{s} w_i = 1$$

∇ nesouměřitelné fce dělají problém.

3) informace o preferencích dostaneme během výpočtu

• f_1 —— f_i — porovnávání 2 funkcí

∇f_1 —— $-\nabla f_i \quad \forall i$ → převod na fci užitku

— nelze dok. eficientní

4) informace o p. až po ukončení výpočtu

• zkusíme λ_1 a řeš. $\max\limits_{M} \lambda_1^T f(x)$

λ_2

⋮

16.05.2008

<u>Dynamické programování</u> – diskrétní

<u>Systém</u> – předmět našeho zkoumání. Ten zkoumáme v čas. intervalu $\langle t', t'' \rangle$.

<u>Stav</u> – všechny potřebné informace o systému v čas. okamžiku $\in \langle t', t'' \rangle$.

Známe-li dělení $\langle t_1, t'' \rangle$ takto dané $t_1^1 \equiv t' < t^2 < \dots < t^N \equiv t''$, kde $N > 1$, potom stav systému v t^i se musí dát vyjádřit uspořádanou n-ticí reálných čísel $x^i \in \mathbb{R}^n$. Množina všech přípustných stavů $X \subset \mathbb{R}^n$.

Stav systému se může měnit pouze v časových okamžicích t^i na základě rozhodnutí – $u^i \in \mathbb{R}^m$ (usp m-tice reálných č.). Mn. všech možných rozhodnutí označím $U \subset \mathbb{R}^m$.

Změna je dána tzv. stavovou transformací $x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$

Dělení:

① máme zadán poč. stav x^1.

② máme zadán koncový stav x^{N+1}.

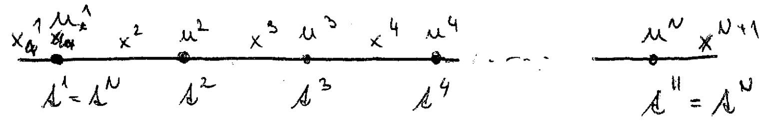
③ máme zadán poč. stav x^1 a tak i koncový stav x^{N+1}

④ máme zadánu $X^1 \subset X$ a bereme $x^1 \in X^1$

⑤ —"— $X^{N+1} \subset X$ a bereme $x^{N+1} \in X^{N+1}$ } (4+5) obě

⑥ neznáme N a současně musíme najít nejmenší N, při kterém je úloha řešitelná nebo pro které dostávám nejlepší hodnotu cílové funkce.

ad ①:



Def: Říkáme, že v časovém int $\langle t', t'' \rangle$ probíhá "diskrétní rozhodovací deterministický proces, jestliže:

a) máme dáno dělení $\langle t', t'' \rangle$ $t' \equiv t^1_1 < \dots < t^N \equiv t''$, $N > 1$

b) x^1 je daný počáteční stav

c) stav se může změnit jen v t^i a podle stavové (transf) funkce
$x^{i+1} = T_i(x^i, u^i)$ $\forall i = 1, \dots, N$ (x^{N+1} závisí pouze na stavu x^i a provedeném rozhodnutí u^i)

Def: Posl $u^1, \dots, u^N$ s vlastností $u^i \in \mathcal{U}$, $x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \in X$, $i = 1, \dots, N$, $x^1 \in X$, nazýváme přípustnou strategií.

Množinu všech příp strategií (přiřazených danému systému a rozh. diskr. det. procesu) značíme $P_N(x^1) = \{(u^1, \dots, u^N) \mid u^i \in \mathcal{U}, x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \in X, i = 1, \dots, N, x^1 \in X\}$

Pozn: Dáno N, $x^1 \in X$, ale vždy můžeme počítat úlohu pro $\forall x^1 \in X$ a v některých příp i pro $\forall N$.

Abychom měli úlohu diskr. det. dyn. prg. musí cílová funkce, kterou přiřadíme rozhodovacímu procesu splňovat:

(1) $f_1(x^1, u^1), f_2(x^1, x^2, u^1, u^2), \dots, f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N)$

(2) markovská vlastnost: $\forall N$

$$f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N) = \phi\left(f_{N-1}(x^1, \dots, x^{N-1}, u^1, \dots, u^{N-1}), \varphi(x^N, u^N)\right)$$

Př: $f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x^i, u^i)$

$$\prod_{i=1}^{N} g_i(x^i, u^i)$$

$$\min_{i=1,\dots,N} \{ g_1(x^1, u^1), \dots, g_N(x^N, u^N) \}$$

Def: Úlohou DDDP rozumíme úlohu:

$$\max f_N(x^1,\dots,x^N,u^1,\dots,u^N)$$
$$\{u^1,\dots,u^N\}\in P_N(x^1)$$

! **Pozn:** Položíme $f(x^1,\dots,x^N,u^1,\dots,u^N)\equiv\sum_{i=1}^{N} g_i(x^i,u^i)$

Věta: Jsou-li $g_i(x^i,u^i)$ dané reálné funkce $T_i(x^i,u^i)$ dané zobrazení definované pro $\forall i=1,\dots,N^*$, $N^*>1$, $x^i\in X$, $u^i\in\mathcal{U}$ a jestliže pro dané $x^1\in X$ platí $x^{i+1}=T_i(x^i,u^i)$ $\forall i=1,\dots,N$ a ozn-li

$$\max_{P_N(x^1)}\sum_{i=1}^{N} g_i(x^i,u^i)=F_N(x^1),\quad 1\le N\le N^*,$$

$$\max_{P_{N-1}(x^2)}\sum g_i(x^i,u^i)=F_{N-1}(x^2),\quad 2\le N\le N^*,$$

kde $P_{N-1}(x^2)=\{(u^2,\dots,u^N)\mid u^i\in\mathcal{U},\ x^{i+1}=T_i(x^i,u^i)\in X,\ i=2..N,\ x^2\in X\}$,

potom platí
$$F_N(x^1)=\max_{u^1\in\mathcal{U}(x^1)}\{g_1(x^1,u^1)+F_{N-1}(x^2)\}=\max_{u^1\in\mathcal{U}(x^1)}\{g_1(x^1,u^1)+F_{N-1}(T_1(x^1,u^1))\},$$

kde $N=1..N^*$, $F_0(x)=0$ $\forall x\in X$, $\mathcal{U}(x^1)=\{u^1\in\mathcal{U}\mid x^2=T_1(x^1,u^1)\in X\}$

Algoritmus:

1) pro každé $x^N\in X$ počítáme $F_1(x^N)=\max_{u^N\in\mathcal{U}(x^N)} g_N(x^N,u^N)\equiv g_N(x^N,u^{*N})$, $\mathcal{U}(x^N)=\{u^N\in\mathcal{U}\mid x^{N+1}\in X\}$

2) pro každé $x^{N-1}\in X$ počítáme $F_2(x^{N-1})=\max g_{N-1}(x^{N-1},u^{N-1})+F_1(x^N)=$
$$=\max_{\mathcal{U}(x^{N-1})}\{g_{N-1}(x^{N-1},u^{N-1})+F_1(T_{N-1}(x^{N-1},u^{N-1}))\}\equiv g_{N-1}(x^{N-1},u^{*N-1})+F_1(T_{N-1}(x^{N-1},u^{*N-1}))$$

X	$F_1(x^N)$	u^{*N}	$F_2(x^{N-1})$	u^{*N-1}
⋮				
(x_N)				
⋮				

$N-1$: Pro každé $x^2\in X$ počítáme $F_{N-1}(x^2)\equiv\max_{u^2\in\mathcal{U}(x^2)}\{g_2(x^2,u^2)+F_{N-2}(\underbrace{x^3}_{T_2(\dots)})\}$

N: Pro každé $x^1\in X$ počítáme $F_N(x^1)\equiv\max_{\mathcal{U}(x^1)}\{g_1(x^1,u^1)+F_{N-1}(x^2)\}$

KONEČNÉ MATICOVÉ HRY DVOCH HRÁČOV S NULOVÝM SÚČTOM

Máme dvoch hráčov:

1. hráč má k dispozícii $i \in \{1, \dots, n\}$ stratégií pre danú hru
2. — ‖ — $j \in \{1, \dots, m\}$ — ‖ —

Hru budú hrať N-krát ($N \in \mathbb{N}$, $N \gg 0$).

Ak zvolí 1. hráč stratégiu i a 2. hráč stratégiu j, potom 1. hráč získa hodnotu a_{ij}, ktorú 2. hráč stratí. ($a_{ij} < 0$ pripadá v úvahu)

$\forall i, \forall j \Rightarrow$ daná $A = (a_{ij})_{i,j}$

Definícia:

Množinu $\{\{1,2\}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, A\}$ nazývame konečná maticová hra dvoch hráčov s nulovým súčtom.

Ak hrá 1. hráč stále jednu stratégiu (hovoríme o čistej stratégii) a hráč 2 tiež, je hra nezaujímavá. Označme x_i pravdepodobnosť, že 1. hráč použije stratégiu i a y_j pravdepodobnosť, že 2. hráč použije stratégiu j.

Označme $[X] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1^T x = 1, x \geq 0\}$

$[Y] = \{y \in \mathbb{R}^m \mid 1^T y = 1, y \geq 0\}$

Pravdepodobnosť, že sa stretnú i a j stratégie, je $x_i y_j$.

Po N hrách je zisk $N \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$ a teda zisk $\sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = x^T A y$

Definícia:

Množinu $\{\{1,2\}, [X], [Y], x^T A y\}$ nazývame zmiešaným rozšírením maticovej hry, pričom $x^T A y$ nazývame cenu hry.

Hľadáme $x^* \in [X]$ a $y^* \in [Y]$, aby $x^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A y$, $x \in [X]$, $y \in [Y]$.

1. hráč maximalizuje $x^T A y$ a 2. hráč ju minimalizuje.

Definícia:

Stratégie x^* a y^* nazývame optimálnymi stratégiami a $x^{*T} A y^*$ optimálnou cenou hry.

Veta 1:

Ak sú x^*, y^* a $\tilde{x}, \tilde{y}$ dve rôzne dvojice optimálnych stratégií, potom

$$x^{*T} A y^* = \tilde{x}^T A \tilde{y}.$$

Dôkaz 1:

$$\tilde{x}, \tilde{y} \text{ - opt.} \overset{def.}{\Rightarrow} x^{*T} A \tilde{y} \le \tilde{x}^T A \tilde{y} \le \tilde{x}^T A y^* \le x^{*T} A y^* \le x^{*T} A \tilde{y}$$

x^*, y^* - opt.

Lemma:

Ak je $J = (1)_{n \times m}$ $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ a $\alpha \equiv 1 - \min_{i,j} a_{ij}$, potom $\bar{A} \equiv A + \alpha J > 0$.

Dôkaz:

Pre ľubovoľné $\forall i \forall j$ $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + \alpha \ge \min_{i,j} a_{ij} + \alpha = 1 \Rightarrow \bar{A} > 0$.

Veta 2:

Ak sú x^0 a y^0 optimálne riešenia úloh LP (primárna, duálna)

(P) $\min_M \mathbb{1}^T x$ $\quad M = \{x \mid \bar{A}^T x \ge \mathbb{1}, x \ge 0\}$

(D) $\max_N \mathbb{1}^T y$ $\quad N = \{y \mid \bar{A} y \le \mathbb{1}, y \ge 0\}$

Potom $x^* \equiv \dfrac{x^0}{\mathbb{1}^T x^0}$, $y^* = \dfrac{y^0}{\mathbb{1}^T y^0}$ sú optimálne stratégie

a $x^{*T} A y^*$ je optimálna cena hry.

Dôkaz:

nulový vektor

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pretože } o \in N \Rightarrow N \neq \emptyset. \\ \text{Pretože } \bar{A} > 0 \Rightarrow N \text{ je obmedzené} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(D) má riešenie } y^0.$$

Z princípu duality $\Rightarrow$ (P) má riešenie x^0 a platí $\mathbb{1}^T x^0 = \mathbb{1}^T y^0$.

Z definície x^* a $y^* \Rightarrow x^* \in [X]$, $y^* \in [Y]$.

Zvoľme ľubovoľné $x \in [X] \Rightarrow x \ge 0$, $\mathbb{1}^T x = 1$

a ľubovoľné $y \in [Y] \Rightarrow y \ge 0$, $\mathbb{1}^T y = 1$

Pre y^0 platí $\bar{A}y^0 \le 1 / x \Rightarrow x^T\bar{A}y^0 \le 1^T x = 1 \Rightarrow x^T\bar{A}y^* \le \frac{1}{1^T y^0}$.

Pre x^0 platí $\bar{A}^T x^0 = x^{0T}\bar{A} \ge 1 / y \Rightarrow x^{0T}\bar{A}y \ge 1^T y = 1 / \frac{1}{1^T x^0}$.

$$\Big\} \Rightarrow x^{*T}\bar{A}y \ge \frac{1}{1^T x^0} = \frac{1}{1^T y^0} \ge x^T\bar{A}y^* \quad \forall x \in [X],\ y \in [Y]$$

Po dosadení:

$$x^{*T}(A + \alpha I)y \ge x^T(A + \alpha I)y^*$$

$$x^{*T}Ay + \alpha \ge x^T A y^* + \alpha \qquad \forall x, \forall y$$

Teda špeciálne:

$$\left.\begin{array}{l} x^{*T}Ay \ge x^{*T}Ay^* \\ x^{*T}Ay^* \ge x^T A y^* \end{array}\right\} \Rightarrow x^T A y^* \le x^{*T}Ay^* \le x^{*T}Ay \quad \forall x, \forall y \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dôkaz hotový.

<u>Dôsledok:</u>

Vždy existuje optimálna stratégia konečnej maticovej hry dvoch hráčov s nulovým súčtom.

Teória hier

- antagonické – úpravi majú opačné
- neantagonické

- kooperatívne
- nekooperatívne