Kombinatorika a grafy

Michal Vaner

2. ledna 2013

Obsah

Graf je uspořádaná dvojice $(V, E), V$ neprázdá, konečná, $E \subseteq \binom{V}{2}$. ***Rovinný graf*** je graf pro který existuje rovinné nakreslení. ***Elementární kružnice*** vzhledem ke kostře (V, K) je kružnice v grafu $(V, K \cup \{e\})$, kde $e \in E - K$.

$C(G)$ je vektorový prostor kružnic nad $GF(2)$ dimenze $|E| - |V| + k$, k je počet komponent. Elementární kružnice k libovolné kostře tvoří bázi $C(G)$.

Důkaz:
Elementární kružnice jsou lineárně nezávislé. Generují celý prostor $C(G)$. ***Laplacova matice*** grafu G je matice L_G. Na diagonále jsou stupně vrcholů, jiné jsou buď 0, pokud tam nevede hrana a -1, pokud hrana vede.

Věta:
Pokud vezmu laplacovu matici, škrtnu libovolný řádek a odpovídající sloupec a vezmu determinant, tak dostanu počet koster grafu G.

Matice incidence I_G je matice, řádky indexované vrcholy, sloupečky hranami a 1 je tam, když vrchol patří do odpovídající hrany.

Když vynásobím $I_G \times I_G^T$, tak dostávám matici sousednosti + matice mající na diagonále stupně.

Laplacova matice je $Deg_G - A$ – tedy stupně na diagonále mínus matice sousednosti.

Matice sousednosti orientovaného grafu – všechny hrany zorientuji a dám jim tudíž znaménko jedním směrem. Když tuto vynásobím, tak dostanu laplacovu matici.

Lemma:
Když $\vec{E}$ je libovolná orientace grafu G, pak $D_G \times D_G^T = L_G$.

Důkaz:
Kdekoliv začíná nebo končí nebo začíná hrana, tak se na diagonálu přičte 1. U ostatních musí vycházet -1, protože jeden konec je kladný a jeden záporný. Když tam není hrana, tak mi vyjde 0.

$L_G^* = D_G^* \times (D_G^*)^T$. (S vyškrtnutými řádky).

Determinant součinu dvou nečtvercových matic se dělá tak, že se vezmou všechny „největší“ podmatice a příslušným způsobem se vydeterminantí, to všechno se nakonec sečte.

Když si to rozmyslíme, jak je to s tím sčítáním, vyškrtnutým řádkem a výběrem sloupečků, vždy bereme $n-1$ hran. Determinantek je buď 0 (pokud to není kostra) a nebo ± 1, ale protože se násobí sám sebou, vždy se přičte jednička.

Pokud není kostra, pak není souvislý a je tam nulový sloupek. Opačně dokážu indukcí trháním vrcholů – dokážu, že můžu přeuspořádat na jedničky na diagonále a samé nuly nad diagonálou.

Multigraf je trojice $G = (V, E, \varphi)$, kde $\varphi : E \to V^2$.

Kontrakce hrany je sloučení dvou vrcholů dohromady na koncích jedné hrany. Značí se tečkou (v případě jednografů) nebo dvojtečkou (u multigrafů).

Věta:
Počet koster grafu G je 1, pokud $V = 1$, pokud je nesouvislý, tak nemá žádnou kostru, smyčky neovlivňují počet koster a když t je hrana, pak je počet koster v G roven počtu koster v G bez t a počet koster v G s t skontrahovaným.

1 Latinské čtverce a konečné projektivní roviny

Latinský čtverec je čtvercová matice je $L \in A^{n \times n}$, $|A| = n$, v každém řádku a každém sloupci se nachází permutace prvků z A.

Latinské čtverce L a L' jsou ***ortogonální*** ($L \perp L'$), pokud $\forall a, b \in A \exists i, j; L_{i,j} = a \wedge L'i, j = b$. Jako důsledek plyne, že je tam každá dvojice právě jednou.

Věta:
Nechť $L_1, L_2, \ldots, L_t$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce velikosti n, pak $t \leq n - 1$.

Důkaz:
Předpokládejme, že $A = \{1, 2, \ldots, n\}$

Lemma:
$L, L' \in A^{n \times n}, \pi : A \to A$ permutace. Pak $\pi(L)$ je čtverec po přejmenování symbolů. Potom $L \perp L' \Leftrightarrow \pi(L) \perp L'$.

Důkaz:
První a druhý čtverec nemusí mít stejnou abecedu, tedy přejmenování abecedy nehraje žádnou roli.

Můžu přerovnat první řádky tak, aby byly stejné. Tedy, v prvním sloupečku už nemůže být další jednička. A musí se lišit v těchto místech, protože stejné už jsou v minulém řádku.

Konečná projektivní rovina je množinový systém $(B, \mathcal{P}), \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Prvky množiny B se nazývají body a B je konečné. Prvky $\mathcal{P}$ se nazývají přímky. Musí splňovat následující podmínky:

- Každé dva body jsou obsaženy v některé přímce.

- $\forall P \neq Q \in \mathcal{P} : |P \cap Q| = 1.$
- Existují takové 4 body takové, že žádné 3 z nich neleží na jedné přímce.

Lemma:
$\forall$ konečnou projektivní rovinu $(B, \mathcal{P})$ existuje nějaké číslo $n; \forall P \in \mathcal{P}; |P| = n + 1, \forall x \in B; |\{P | x \in P\}| = n + 1; |B| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$.

Důkaz:
Každé dvě přímky mají stejný počet bodů. Mějme dvě přímky, ty se protínají v nějakém bodě, existuje nějaký další bod, který není ani v jedné. Z něj vedeme přímku bodem jedné přímky a dostaneme jiný bod na druhé přímce, který tomu odpovídá.

Nyní si vezmu jednu „základní“ přímku a z ní dva body, z každé pustím n přímek, musí se poprotínat na dalších n^2 bodů, dokáže se, že to je všechno.

Toto n nazývám ***řád***.

Věta:
$\exists$ konečná projektivní rovina řádu n, pokud $\exists n - 1$ navzájem ortogonálních latinských čtverců.

Představím si „šachovnici“ z minulého důkazu, každý čtverec popisuje jeden takový svazek ze zbylého vrcholu. Tímto udělám vzájemné mapování.

2 Vytvořující funkce

Mocninná řada je $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \ldots$, kde $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty.

Věta:
Nechť $(a_0, a_1, \ldots)$ je posloupnost reálných čísel. Nechť $\exists K \in \mathbb{R}^+; |a_n| \leq K^n$. Potom pro každé $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$ řada $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a $a(x)$ můžeme považovat za funkci proměnné x.

Tato funkce se nazývá ***vytvořující funkce***.

Potom n-tý koeficient této řady je $a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}$.

3 Hamiltonovská kružnice

Sled, který navštíví každý vrchol právě jednou, kromě jednoho, kde začne a skončí, se nazývá ***hamiltonovská kružnice***. Graf, který obsahuje hamiltonovskou kružnici se nazývá ***hamiltonovský***.

Nalezení (či jen ověření, že existuje) hamiltonovské kružnice je NP úplný problém.

Věta:
Jestliže pro každý jeho vrchol platí, že jeho stupeň $\geq \frac{n}{2}$, pak obsahu hamiltonovskou kružnici.

Věta:
Pokud pro každé dva vrcholy platí, že součet jejich stupňů je $\geq n$, pak má hamiltonovskou kružnici.

Věta:
Pokud pro každé dva vrcholy, které nejsou spojeny hranou platí, že součet jejich stupňů je alespoň n, pak má hamiltonovskou kružnici.

Důkaz:
Pro graf G zkonstruujeme chvátalův uzávěr $[G]$ takto: Jestli existují dva vrcholy, jejichž součet stupňů je větší roven než n a nejsou spojeny hranou. Pak takovou hranu přidám. Iteruji, dokud to jde.

Toto nezávisí na pořadí přidávání.

Graf G je hamiltonovský $\Leftrightarrow$ $[G]$ je hamiltonovský. Přímá implikace je zřejmá.

Nechť $G + \{u, v\}$ má hamiltonovskou kružnici. Buď $\{u, v\}$ do kružnice nepatří, pak není co řešit. Tedy tam patří.

Protože součet jejich stupňů je alespoň n, pak musí existovat dva sousední vrcholy, z nichž jeden je dosažitelný z u a druhý z v. Tedy přepojíme – začneme v u, dojdeme po původní kružnici do druhého vrcholu, z něj do v, do prvního vrcholu a do u.

Uzávěr tohoto grafu je úplný graf. Takový zjevně má hamiltonovskou kružnici.

Úloha obchodního cestujícího: to je nejkratší hamiltonovská kružnice.

4 Ramseovy věty

$\forall k \exists n$ takové, že graf G na n vrcholech obsahuje buď K_k nebo nezávislou množinu vrcholů na k vrcholech.

Ekvivalentní znění má jen k, l různé velikosti.

Důkaz:
Indukcí, rozkládání na o jedna menší v každém čísle.

Erdös-Szekezerova:
$\forall k \exists n$ že pro n bodů v obecné rovině, pak k z nich tvoří konvexní mnohoúhelník.

5 Souvislost

Hranový řez je množina hran, kterou když odebereme z grafu, tak se stane nesouvislý.

Obdobně funguje ***vrcholový řez***.

Hranová souvislost je minimum velikostí všech hranových řezů.

Vrcholová souvislost je minimum velikostí všech vrcholových řezů, případně $|V| - 1$ pro úplné grafy.

Pozorování:
Odebrání hrany buď nechá hranovou souvislost stejnou nebo sníží o 1.

Tvrzení:
Odebráni hrany může jen snížit vrcholovou souvislost.

Tvrzení:
Graf je (vrcholově) dvousouvislý, pokud ho lze získat postupným přidáváním uší na kružnici.

Důkaz:
Zprava doleva jasné.

Zleva doprava, vše musí být na nějaké kružnici a tu lze odebrat až k nejbližší společné části. **Ford-fülkersonova**:

Pro graf G a $t \in \mathbb{N}$ platí, že je hranově t souvislý, právě když pro každou dvojici vrcholů existuje t hranově disjunktních cest, které je spojují.

Důkaz:
Zprava doleva: Sporem.

Zleva doprava: Pomocí toků.

Mengerova:
Pro graf G a $t \in \mathbb{N}$ platí, že je vrcholově t souvislý, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy vede t vrcholově disjunktních cest (s výjimkou konců).

Důkaz:
Podobně, jako minulý.

6 Info k kombakra II

http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/$\tilde{}$kral/dm012.html

Učí Daniel Král'.

7 Párování v grafech

Perfektní párování je množina hran taková, že z každého vrcholu vede právě jedna hrana této množiny. ***Párování*** je množina taková, že z každého vrcholu vede nejvýše jedna hrana.

Tvrzení 1 *Pokud mohu najít množinu $S \subseteq V(G)$ takovou, že když ji odeberu, počet komponent s lichým počtem vrcholů (liché komponenty) je větší než $|S|$, potom G nemá perfektní párování.*

Důkaz:
Ten zbylý z každé liché komponenty musí být spárován s něčím z S. Když jich je více, nezbudou vrcholy.

☻

Věta 1 (Tutteova) *Pokud taková množina S neexistuje, graf G splňuje Tutteovu podmínku. Potom G má perfektní párování.*

Důkaz:
Doplněno ze skript Tomáše Vally

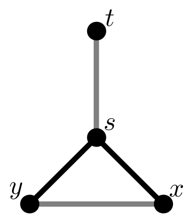
Důkaz bude sporem, tedy, G splňuje Tutteovu podmínku, ale nemá perfektní párování. Přidávání hran nemůže takové S vytvořit, nechť tedy G je maximální takový graf (vytvořený přidáváním hran). Úplný již má perfektní párování nebo nesplňuje podmínku.

Nechť U jsou vrcholy, jejichž stupeň je roven $n - 1$ (jsou spojeny se vším ostatním). U z grafu odebereme.

Rozebereme dva případy. První je, pokud všechny komponenty grafu $G \backslash U$ jsou úplné. V sudých komponentách najdeme párování jednoduše, lichých je méně než $|V(U)|$ a zbylý vrchol tedy můžeme vždy spojit s libovolným z U. Celkový počet vrcholů je sudý, tedy lze najít perfektní párování i ve zbytku U. Tedy graf má perfektní párování – tato možnost nastat dle předpokladu nemůže.

Nechť tedy nastane druhá možnost, že některá z komponent není úplná. Vyberme si tu, kde je více než 1 nenapárovaný vrchol. Taková musí existovat, každou, které nezbude žádný neničí párování, takové, které mají jeden se spojí s U a musí být liché. Dle předpokladu párování neexistuje, tedy máme nějakou takovou komponentu.

Tato komponenta není úplná, tedy musí existovat dva vrcholy, a, b, které nejsou spojené hranou. Mezi nimi vede alespoň jedna cesta, vezměme tedy tu nejkratší. Ta obsahuje ***třešničku*** – $K_{1,2}$. (Musí mít alespoň 2 hrany, tedy jsou tam vrcholy x, s, y, x a y nejsou spojené hranou, jinak by se cesta dala zkrátit). Neexistující hranu x, y nazveme e_1. $s \notin U$, proto není spojené s nějakým $t \in V(G)$ neexistující hranou e_2. Jak graf $G \cup e_1$ tak $G \cup o_2$ mají perfektní párování, M_1, resp. M_2 (jsou větší, tohle je největší, kde to nefunguje).



Obrázek 1: Třešnička

$e_1 \in M_1 \wedge e_2 \in M_2$, jinak by už G mělo perfektní párování. Nyní vezmeme $M := M_1 \div M_2$. V této množině jsou všechny komponenty buď samostatné vrcholy a nebo sudé kružnice střídající hrany z M_1 a M_2. Vezměme kružnici obsahující e_1 a nazvěme ji H.

Pokud $e_2 \notin H$, potom můžeme použít na kružnici H párování z $M2$ a na zbytek z M_1. Tím vzniklo perfektní párování.

Pokud $e_2 \in H$, potom je i $t \in H$. Vezměme si oblouky, které dostaneme po odebrání e_1 a e_2 Na ten, který obsahuje s můžeme použít párování M_2, na ten s t M_1, t je napárované, jeden z x, y také. Protože ten druhý je spojený s s, můžeme tuto hranu přidat do párování. Na zbytek grafu lze použít jak M_1, tak M_2. Složením opět dostaneme perfektní párování.

☻

Deficit $def(G)$ je maximum přes všechny $S \subseteq V$ z počet lichých komponent $-|S|$. $def(G) \geq 0$.

Důsledek 1 *Maximální párování grafu G pokrývá $n - def(G)$ vrcholů.*

Důkaz:
Určitě nepokryji alespoň $def(G)$ vrcholů, v případě toho S, které vytvořilo ono maximum.

Tedy potřebuji ukázat, že mi nezbude výše než tolik vrcholů. Vytvořím graf G', přidám $def(G)$ nových vrcholů a spojím je se všemi. G' má perfektní párování (deficit má 0, tedy splňuje Tutteovu podmínku). Poté stačí oříznout zpět na G, čímž ztratím maximálně $def(G)$ hran.

☻

Kubický graf je takový, který má každý stupeň 3.

Věta 2 (Petersonova) *Každý kubický graf bez mostů má perfektní párování.*

Důkaz:
Dokazuji pro G souvislý, kdyby nebyl, beru každou komponentu zvlášť.

Má sudý počet vrcholů (všechny mají lichý stupeň, součet stupňů je vždy sudý).

Nechť je tedy $S \neq \emptyset$. Počet hran vedoucích z S je maximálně $3 \cdot |S|$ $(deg\,(S))$.

Pokud mám lichou komponentu, z ní určitě vedou alespoň 3 hrany. Kdyby 0, tak není lichá. Kdyby 1, tak to byl most. Kdyby 2, tak stupeň této komponenty C je $|C| \cdot 3 - 2$. Protože $|C|$ je liché, tak i toto by vyšlo liché.

Všechny tyto tři hrany musí vést do S. Tedy pro více než $|S|$ lichých komponent není dostatek hran vedoucích z S.

☻

7.1 Maximální párování

Střídavá cesta je cesta, která začíná v nespárovaném vrcholu, poté přejde do spárovaného vrcholu, poté střídám hrany z párování a mimo něj a končí stejně, jako začíná, v nespárovaném vrcholu. Pokud najdu takovou cestu, lze párování zvětšit prohozením párovacích a nepárovacích hran.

Lemma 1 (Kritérium střídavé cesty) *Párování je maximální právě když neobsahuje střídavou cestu.*

Důkaz:
Když obsahuje, pak je zřejmé, že není maximální.

Předpokládejme, že M_1 není maximální. Tedy, $\exists M_2, |M_1| < |M_2|$. Vezmu symetrickou diferenci $M_1 \div M_2$. Když vezmu komponenty, tak to jsou buď samostatné vrcholy (vymlátily se stejné hrany), nebo jsou kružnice, které se střídají, poté mají stejně. Nebo to může být cesta, kde se střídají hrany prvního a druhého párování.

Pokud jsou na obou stranách hrany z M_2, pak je v M_1 střídavá cesta. Pokud mají různé konce, pak jich je stejně, pokud je na obou hrana z M_1, pak je více hran v M_1.

Kde jsou M_1 a M_2 stejné, tam nás to nezajímá, kde se liší, tam jsou v této diferenci. Protože je M_1 menší, musí nastat alespoň jeden případ střídavé cesty.

☻

Svědek neexistence je S, jejíž velikost je menší než počet lichých komponent.

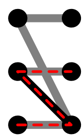
7.1.1 Algoritmy perfektního párování

Algoritmus 1 (Perfektní párování pro bipartitní grafy):

Předpokládejme, že mají stejně velké partity.

Začnu v některém nepokrytém vrcholu v partitě A. Pokud má nepokrytého souseda, pak jsem našel střídavou cestu délky 1.

Pokud ne, podívám se na sousedy mých sousedů v tomto párování a zjistím, jestli mají nepokrytého souseda. Pokud ano, mám střídavou cestu délky 3.



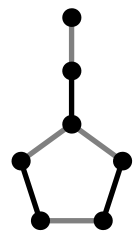
Obrázek 2: Cesta délky 3

Pokud mi dojdou vrcholy, pak si vezmu vrcholy na lichých hladinách (jsou v komponentě B, tedy nazvu je množinou B') a ty na sudých (A', včetně počátečního vrcholu). $|A'| = |B'| + 1$. Můžu tedy prohlásit B' za svědka neexistence (A' se nyní skládá jen ze samých izolovaných vrcholů, kdyby ne, tak jsem ještě pokračoval).

☺

Kružnice bude ***skorostřídavá***, pokud je lichá, má jeden nepokrytý vrchol a jinak se střídají párovací a nepárovací hrany. ***Květinka*** je skorostřídavá kuržnice, která má ale onen jeden vrchol připojený k střídavé cestě, která končí nepokrytým vrcholem. Z květinky lze prohozením „stonku“ udělat skorostřídavou kružnici.

Lemma 2 (O zkontrahované kružnici) *Nechť C je skorostřídavá kružnice. Potom graf G má střídavou cestu právě když G/C, který vznikne kontrakcí C, má střídavou cestu.*



Obrázek 3: Květinka

Důkaz:
Při kontrakci byla kružnice C nahrazena vrcholem w. Pokud po kontrakci máme střídavou cestu, pak je zajímavý jen případ, že cesta obsahuje w. Na jedné straně otočím cestu jen ke kružnici (ta část, která má hranu obsahující w), druhou stranu můžu propojit až k onomu nepokrytému vrcholu po kružnici a prohodit tam.

Pokud ta první část neexistuje, tak to nevadí.

☻

Algoritmus 2 (Perfektní párování pro obecné grafy):

Začnu v nepokrytých vrcholech, postupuji stejně, jako u bipartitních. Pokud nenajdu střídavou cestu, prohlásím za S liché hladiny.

Mohou nastat některé problémy:

- **Hrana v sudé hladině** – vznikne květinka nebo skoropokrytá kružnice.
- **Párovací hrana na liché hladině** – také květinka.

Květinky převedu na skorostřídavé kružnice, zkontrahuji, zkusím v menším.

Kroků, k nalezení alespoň jedné střídavé cesty je maximálně $O(n^2)$, protože při každém hledání můžu muset kontrahovat. Celkem můžu najít až n střídavých cest, tedy $O(n^3)$ – každý průběh to zlepší alespoň o 1 hranu nebo skončí.

☺

Algoritmus 3 (Maximální párování):

Stejný algoritmus, jen na nultou hladinu musím dát všechny nepokryté vrcholy. Může se mi stát, že by místo květinky vznikla střídavá cesta, což mi nevadí.

☺

8 Grafy na plochách

Rovina je dvourozměrný prostor. Plochy vyššího rodu lze získat:

- Vložením ucha – vyberu si v rovině 2 kruhy, ty vyříznu a propojím válcem (červí díra). Takto získaná plocha se značí S_k při vložení k uší. Všechny plochy získané vložením k uší jsou homomorfní (existuje spojité zobrazení z jedné do druhé a má spojitou inverzi). S_1 je torus, S_2 je dvojitý torus.
- Vložením překrouceného ucha – na jedné straně dám ten válec opačně (tedy ucho projde samo sebou, trochu jako v 4rozměrném prostoru). Značí se N_{2k}.
- Vložením křížítka – Vyberu si bod, kde se hrany mohou beztrestně křížit, ale nesmí zatáčet (ten bod tam prostě není). Značí se N_k. N_1 je projektivní rovina.

Plocha, která vznikne vložením k_1 uší, k_2 překřížených uší a k_3 křížítek se značí $N_{2k_1+2k_2+k_3}$ (pokud $k_2 + k_3 > 0$).

Dobré nakreslení grafu bude takové, že každá stěna je homomorfní disku.

Eulerův rod plochy g.

$$g(S_k) = 2k$$

$$g(N_k) = k$$

S_k mají vlastnost „orientovatelnost“, ty N_k jsou neorientovatelné. To říká, že když si vyberu směr hodinových ručiček, odejdu a vrátím se, tak bude stejný. Neorientovatelné to nemají.

Věta 3 (Zobecněná Eulerova formule) *Nechť graf G je dobře nakreslený na ploše Eulerova rodu g. Pak $n + f \geq m + 2 - g$ (f je počet stěn).*

Důkaz:
Indukcí. Začneme s $g = 0$. Pro rovinu je to již dokázané.

Pokud to vzniklo ušením, potom: kružnici můžu navléknout na ucho nebo překroucené ucho. V tom místě lze ucho „rozdělit“ a vložit tam kopii (na obě strany řezu). Tím to lze převést na graf s jednou plochou navíc ale o jedno ucho méně, lze přepočítat počty.

U křížítka lze všechno vytahat za cenu toho, že jednu vznikne stěna s dvojnásobnou délkou (vložím kružnici „okolo“ křížítka a vnitřek, i s křížítkem vyndám).

☻

Věta 4 (Heawoodova věta) *Heawoodovo číslo – max. barevnost grafu na rovině daného grafu je:*

$$H(g) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24g}}{2} \right\rfloor$$

Vezmeme graf G vnořený na ploše rodu g. Potom takový graf má nejvýše takovou barevnost.

Jednak, přidáním hran, pokud chybí, odhad nezhorším – nadělám rozdělení plochy na trojúhelníky. Poté osekám na K_n.

8.1 Plochy jako fundamentální mnohoúhelník

Když vezmu torus, přestřihnu a rozpářu, dostanu obdélník.

Něco podobného lze udělat s každou plochou. Když mám plochu S_k, tak dostanu $4k$-úhelník.

Pro N_k je to $2k$-úhelník.

Lze najít více fundamentálních mnohoúhelníků pro danou plochu.

8.2 Rovinnost

8.2.1 Třísouvislé grafy

Lemma 3 (O kontrahovatelné hraně) *Nechť G je vrcholově 3-souvislý graf takový, že $G \neq K_4$, pak G obsahuje hranu e tak, že G s kontrahovaným e je stále vrcholově 3-souvislý.*

Důkaz:
Pokud najdu takovou hranu, tak mám vybráno. Předpokládejme tedy, že tam není. Pak si jednu (x, y) náhodně vyberu a zkontrahuju.

Tedy je 2-souvislý, tedy obsahuje 2-řez. Nový vrchol xy je v něm obsažen (jinak by byl 2-řez i v originálu), tedy je tvořen $\{xy, z\}$. Tedy, pokud žádná „vhodná“ hrana neexistuje, pak pro každou hranu (v, w) existuje vrcholu u tak, že $\{u, v, w\}$ je 3-řez v původním grafu.

Pokud G je vrcholově 3-souvislý a nějaká množina $\{a, b, c\}$ tvoří vrcholový 3-řez, pak každý z vrcholů a, b, c má alespoň jednoho souseda v každé komponentě vzniklé odebráním těchto vrcholů (jinak by zbylé vrcholy tvořily vrcholový řez a tento by nebyl potřeba).

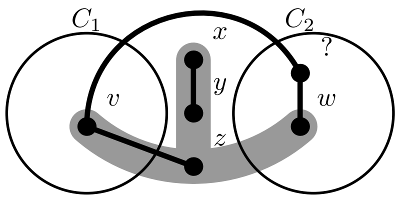
Zvolím x, y, z tak, aby nejmenší komponenta $G \setminus \{x, y, z\}$ byla co nejmenší. Vrchol z má souseda v této nejmenší komponentě, říkejme mu v. Pro hranu zv existuje vrchol w takový, že $\{z, v, w\}$ je vrcholovým 3-řezem.

Kde se může nacházet w:

- V nejmenší komponentě: To se nemůže stát, spor s minimalitou nejmenší komponenty. Když bych totiž odebral $\{v, w, z\}$, tak mi vznikne podkomponenta C_1, která neobsahuje $\{x, y, v, w, z\}$.
- V nějaké jiné (větší) komponentě.

Když odeberu v, z, pak je G stále ještě souvislý. Tedy C_1 stále je v celku, musí vést cesta buď do x nebo do y.

w je v jiné komponentě než C_1, v ní musí mít alespoň jednoho souseda (aby po odebrání $\{v, w, z\}$ mohla vzniknout ještě jiná komponenta). V této komponentě ale musí mít souseda i v. Spor s tím, že C_1 je samostatná komponenta.



Obrázek 4: Náhled na dělení

☻

Podrozdělení grafu vznikne tak, že nahradím všechny hrany cestami.

Kuratovského věta:
Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.

Důkaz:
Ani K_5 ani $K_{3,3}$ není rovinný graf, stačí použít Eulerovu formuli.

Ani jejich podrozdělení nemohou být rovinná, proto ani G, který je obsahuje, nemůže být rovinný.

Tedy, ještě je třeba dokázat, že když to neobsahují, tak musí být rovinné. Indukcí dle počtu vrcholů:

- Není souvislý: rozdělím.

- Má vrcholový 1-řez. Nakreslím někam tento vrchol a zbytky připojím, křížit se zajisté nemusí. U rovinného grafu můžu prohlásit libovolnou stěnu jako vnější (lze promítnout na kouli, pootočit a promítnout zpět).
- Má vrcholový 2-řez. Tvořen vrcholy v a w. Předpokládám, že je to hrana. Kdyby ne, přidám si tu hranu. Jediné, co mi může nastat je, že vznikne zakázaný graf. Nemohou být v různých komponentách (Každá komponenta zvlášť by měla 1-řez). Tedy musí být v jedné komponentě, ale když bych hranu nepřidal, pak ji mohu obejít skrz jinou komponentu, tedy podrozdělení bylo i v původním grafu.

  Postup tedy obdobný jako 1-řezu, jen někdy slepuji do „vnitřního“ oka/stěny jiné komponenty.
- Má vrcholový 3-řez. Když je to K_4, tak ten lze nakreslit do roviny. Pokud ne, můžu některou hranu zkontrahovat a aplikuji indukci (určitě tam některá hrana je, tedy je tam některá, kterou smím zkontrahovat). Kontrakce mi zakázaný minor nevyrobí.

  Graf bez zkontrahovaného vrcholu je 2-souvislý, hranice každé stěny je kružnice (původně byl max. 3-souvislý, jinak měl K_5. Pak potřebuji dokreslit ještě původní (x, y). x si umístím tam, kam patří. Když mi y vyjde do jedné nové stěny, tak je všechno v pořádku. Když se mi to ale nestane, tak mohu najít některý zakázaný graf.
- Má více-řez. V takovém případě obsahuje podrozdělení K_5.

☻

Věta 5 (Tutteova o generování 3-souvislých grafů) *Každý vrcholově 3-souvislý graf lze získat z K_4 nahrazováním vrcholů hranami při zachování minimálního stupně 3 a všechny takto získané grafy jsou vrcholově 3-souvislé.*

Důkaz:
To, že lze každý získat – půjdu opačně a postupně kontrahuji hrany. Tedy to jde i tímto směrem.

Kdybych mohl vyrobit něco, co není vrcholově 3-souvislé, pak obsahuje 2-řez. Pokud ten 2-řez neobsahuje ani jeden z vrcholů, pak byl i v tom původním. Kdyby obsahoval jen (v, w), pak by vw byl řez původního grafu.

Pokud tedy je v řezu jeden vrchol a druhý ne, pak ten druhý musí být ve své komponentě sám (jinak by byl 2-řez v původním grafu) a v tom případě nemá stupeň alespoň 3 (nemá ve své komponentě dostatek sousedů).

☻

9 Barevnost

Maximální barevnost je maximální stupeň $\Delta + 1$. Každý vrchol má max. tolik sousedů, jedna ještě zbyde.

Věta 6 (Brooksova) *Pokud G je souvislý a není lichá kružnice ani k_n, pak je jeho barevnost max. maximální stupeň.*

Důkaz:

- G není Δ-regulární. $\exists$ vrchol v stupně $< \Delta$. Vezmu kostru, zakořením v nějakém v, projdu v post-orderu a očísluji, jak procházím. Podle těchto čísel barvím. Při barvení vrcholu různých od v. Každý má neobarveného souseda – otce ve stromě. Proto má ještě některou barvu volnou. Nakonec obarvím v, protože má malý stupeň.
- Je Δ-regulární. Vezmu některý vrchol v a udělám to, co minule. Může se mi stát, že nemůžu obarvit vrchol v. Všichni sousedé v mají různé barvy (nazveme je $v_1, \ldots, v_n$).

  Pokud některý nemůžu přebarvit, pak mezi nimi musí existovat cesta, kde se střídají jejich barvy. Každý vrchol na této cestě musí vidět všech $\Delta - 1$ barev, jinak můžu přebarvit.

  Když mám dvě takové cesty, tak se protínají jen v $\{v_i\}$, protože kdyby se protínaly ve více místech, tak je tam vrchol, který má příliš mnoho stejně barevných sousedů, tedy by nemohl vidět všech $\Delta - 1$ barev.

  Pokud jsou všechny vrcholy v_i sousední, pak můj graf byl úplný, tedy předpokládám, že ne všechny jsou sousední. Nechť jsou to v_1 a v_2. Na této cestě prohodím barvy 1 a 3. Cesta $c_{2,3}$ tím nebyla ovlivněn. Tím jsem vytvořil dva vrcholy barvy 3 (v_1 a v_3), proto můžu rozšířit na v.

☻

9.1 Hranová barevnost

Hranová barevnost grafu G je nejmenší počet barev $\chi'(G)$ takový, že hrany G lze obarvit tak, aby žádné dvě sousední hrany (u stejného vrcholu) neměly stejnou barvu.

Věta 7 (Vizingova) *Když G je bez násobných hran, tak je $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Důkaz:
Uvažme G nejmenší protipříklad. Vezmu si vrchol v. Ten má sousedy $v_1, v_2, \ldots$. Podívám se na graf G bez hrany (v, v_1) a označím ho za G^-. Ten má hranové obarvení pomocí $\Delta(G)+1$ barev (G^- je menší, tedy na něm to platí). Vezmu si barvu, kterou nemá žádná hrana u vrcholu v ($deg(v) \leq \Delta(G)-1$) a označím ji A. Kdyby se tato barva nevyskytovala ani u v_1, pak je vyhráno. Nechť se tam tedy A vyskytuje, ale nevyskytuje se tam barva C_1. Ta ovšem nechybí u v. Tedy vede hrana do v_2 a má tuto barvu, tam se vyskytuje A a C_1, ale nevyskytuje se tam C_2. Obdobně musí vést hrana do v_3 a mít barvu A, C_1, C_2, tam ale chybí C_3 a tak dále.

Ale toto se musí někde zastavit (nemám nekonečně mnoho barev). Tam tedy musí chybět nějaká barva buď A (mohu přebarvit tuto hranu) nebo nějaké C_i pro předchozí i.

Začnu posouvat, aby k v_i vedla barva C_i, až dojdu do vrcholu $v_{i'}$ (ten uprostřed, kde je stejná chybějící barva jako u posledního). Když se mi někde stane, že mi chybí barva A, je vyhráno.

Nechť tedy nechybí A a má ji některá z jeho hran. Ta hrana vede do dalšího vrcholu v někde polovině, kde nechybí $C_i = C_j$. Když se trefí sama do sebe, tak to nejde (C_i tu není, jinde by musela být dvakrát). Nemůže skončit uprostřed grafu (mohl bych to přebarvit).

Dojde tedy do vrcholu v.

Když posunu všechno, kromě posledního vrcholu, můžu udělat to samé.

A taková cesta nemůže existovat v obou případech, protože to musí být stejná cesta. Musí tedy jednou skončit v v_i a zároveň v $v_{i'+1}$, to ale nemůže nastat kvůli barvám.

☻

9.1.1 Klasifikace grafů

Máme vizigovu třídu 1 a 2, kde 1 jsou grafy, kde $\chi'(G) = \Delta(G)$, třída 2 jsou grafy, kde $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Např. kubický graf bez mostů, který je Vizigovy třídy 2 se nazývá ***snark***.

Neexistence rovinného snarku je ekvivalentní s větou o 4 barvách.

Poznámka 1 *Pro každý graf G s m hranami platí, že:*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Důkaz:
Nechť G je graf barevnosti k s co nejméně hranami, který nesplňuje tvrzení. $\delta(G) \geq k-1$ jinak uvaž vrchol stupně $\leq k-2$ a $\chi(G\backslash w) = k \Rightarrow G\backslash w$ také nesplňuje tvrzení a měl jsem vzít $G\backslash w$.

$$m \geq n \cdot \frac{k-1}{2} \geq k \cdot \frac{k-1}{2}$$

Pak stačí dosadit do rovnice a zjistit, že takový graf má alespoň tolik hran, jako je popsáno na začátku.

☻

10 Polynomy v grafech

Například, mám-li K_n a barvím mu vrcholy pomocí k barev, tak na to mám $P_{k_n}(k)$ možností.

P_n, potom počet obarvení je $k \cdot (k-1)^{n-1}$, což je opět polynom v k.

Stejně tak můžu mít strom na n vrcholech, barvit pomocí odtrhávání listů.

Tutteho polynom je polynom ve dvou proměnných $T_G(x, y)$.

Nechť G je multigraf (povolené smyčky a násobné hrany). Potom je Tutteho polynom definován následovně:

Vyberu si libovolnou hranu e grafu G.

Pokud je hrana:

- most
$$T_G(x, y) = x \cdot T_{G-e}(x, y)$$
- smyčka
$$T_G(x, y) = y \cdot T_{G-e}(x, y)$$
- ostatní
$$T_G(x, y) = T_{G-e}(x, y) + T_{G|e}(x, y)$$
(Součet grafu bez hrany a s kontrahovanou hranou)

Pokud graf nemá hrany, je jeho Tutteho polynom roven 1.

Věta 8 *Nechť G je graf. Pak Tutteho polynom grafu G je roven následujícímu výrazu:*

$$T_G(x,y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{k(F)-k(E)} \cdot (y-1)^{|F|-|V|+k(F)}$$

kde $k(E)$ je počet komponent grafu (V, E).

Důkaz:
Indukcí podle počtu hran. Pokud nemá žádné hrany, pak sčítám přes jednu množinu, vyjde mi 1.

G má most. Rozdělím sumu na ty, které hranu obsahují a ty které ne.

$$\sum_{e \in F} (x-1)^{\cdots} \cdot (y-1)^{\cdots} + \sum_{e \notin F} (x-1)^{\cdots} \cdot (y-1)^{\cdots}$$

Druhá část bude $(x-1) \cdot T_{G-e}(x,y)$ – po rozepsání. Ta první část je $T_{G-e}(x,y)$. Pak už stačí sečíst.

G má smyčku.

Rozdělím na dvě části:

$$\sum_{e \in F} (x-1)^{\cdots} \cdot (y-1)^{\cdots} + \sum_{e \notin F} (x-1)^{\cdots} \cdot (y-1)^{\cdots}$$

Podívám se na $G - e$. První exponent se nemění, mění se druhá část, která je o jedničku menší.

Druhá část grafu se zcela nemění. Tedy, výsledek je:

$$(y-1) \cdot T_{G-e}(x,y) + T_{G-e}(x,y)$$

Není ani smyčka, ani most. Opět rozepíšu, podívám se, jak vypadá graf se zkontrahovanou hranou a s utrženou hranou.

☻

Speciální případy:

- $T_G(1,1)$ je počet koster.
- $T_G(2,1)$ je počet acyklických podgrafů.
- $T_G(1,2)$ počet podgrafů se stejným počtem komponent.

Uvažme polynom 5 proměnných $U(x, y, \alpha, \sigma, \tau)$ definován:

- $x \cdot U_{G-e}(\dots)$ pokud je e most.
- $y \cdot U_{G-e}(\dots)$ když je e smyčka.
- $\sigma \cdot U_{G-e}(\dots) + \tau \cdot U_{G|e}(\dots)$ jinak.
- $\alpha^{|V|}$ pokud je bez hran.

Věta 9 *Tento lze získat z tutteova polynomu jako:*

$$U(x, y, \alpha, \sigma, \tau) = \alpha^k \cdot \sigma^n \cdot \tau^r \cdot T_G\left(\frac{\alpha \cdot x}{\tau}, \frac{y}{\sigma}\right)$$

Kde:

- *k je počet komponent*
- $n = |E| - |V| + k$
- $r = |V| - k$

Důkaz:
Pokud nemá žádné hrany, tak je to zřejmé. Pak rozebrání případů.

TODO: rozepsat?

☻

Aplikace:
Lze spočítat počet obarvení z barvami.

$$\begin{aligned} x &= \frac{z-1}{z} \\ y &= 0 \\ \sigma &= 1 \\ \tau &= -1 \\ \alpha &= z \end{aligned}$$

Tedy, lze spočítat jako:

$$z^k \cdot (-1)^r \cdot T_G(1-z, 0)$$

11 Burnsidova věta

Například máme krychli, které chceme obarvit stěny. Zajímá nás počet obarvení, která na sebe nejdou převést rotacemi krychle. Zavedeme si grupu Γ, což jsou permutace odpovídající rotacím. X je množina obarvení. Potom $x \in X$ je ***orbita*** definovaná jako:

$$[x] = \{y; \exists \alpha \in \Gamma; \alpha \cdot x = y\}$$

Tedy množina „stejných“ zobrazení.

Máme funkci $w : X \to \mathbb{R}$ a w je konstantní na orbitách. Tedy $w\left([x]\right) = w\left(x\right)$.

Nyní si nastavím $w(*) = 1$ a chci spočítat $\sum_{O \text{ orbita}} w(O)$.

Pro všechny $\alpha \in \Gamma$:

- $F(\alpha) = \{x | \alpha \cdot x = x\}$ – pevné body permutace α.
- $\Gamma(x) = \{\alpha \in \Gamma, \alpha \cdot x = x\}$ – pevné permutace obarvení x.
- $\Gamma(x, y) = \{\alpha \in \Gamma, \alpha \cdot x = y\}$

Pozorování:
$\Gamma(x, y) = \alpha_0 \cdot \Gamma(x)$ pro nějakou $\alpha_0 \in \Gamma$. Když zvolíme $\alpha_0 \in \Gamma(x, y)$. Tedy doleva je jasné, opačná je: $\beta \in \Gamma(x, y), \alpha_0^{-1}\beta \in \Gamma(x), \alpha_0 \cdot \left(\alpha_0^{-1} \cdot \beta\right) = \beta$.

Lemma 4 *Burnsidovo*

$$|\Gamma| \cdot \sum_{O \text{ orbita}} w(O) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{x \in F(\alpha)} w(x)$$

Důsledek 2 *Počet orbit je:*

$$\frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{\alpha \in \Gamma} |F\left(\alpha\right)|$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{x \in F(\alpha)} w\left(x\right) \\ = & \sum_{x \in X} \sum_{\gamma \in \Gamma(x)} w(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{O \text{ orbita}} \sum_{x\in O} \sum_{\gamma\in\Gamma(x)} w(x) \\
&= \sum_{O} w(x) \cdot \sum_{x\in O} \sum_{\gamma\in\Gamma(x)} 1
\end{aligned}
$$

Protože $|\Gamma(x)| = |\Gamma(y)| = |\Gamma(x,y)| = |\Gamma(y,x)|$ (viz předchozí lemma a prohazování role x a y), proto se předchozí rovná:

$$\sum_{O} w(O) \cdot |O| \cdot |\Gamma(x_i)|$$

kde x_i je libovolný prvek dané orbity.

$$|\Gamma| = |O| \cdot |\Gamma(x_i)|$$

Tedy to jsou všechny prvky, na které můžu x_i zobrazit. Tedy:

$$\Gamma = \dot{\bigcup_{x\in O}} \Gamma(x,z) = |O| \cdot |\Gamma(x)|$$

☻

Věta 10 (Pólyova enumerace) *Nechť D je množina barvení v objektu. R je množina barev. Obarvení je potom funkce $f : D \to R$, tedy $f \in R^D$. Γ je grupa permutací na D. Γ^* je grupa permutací na R^D. Pokud mám $\alpha \in \Gamma$, potom existuje nějaký $\alpha^* \in \Gamma^*$ takový, že $(\alpha^* f)(d) = f(\alpha(d))$.*

Cyklický index $Z(\Gamma; a_1, a_2, \ldots, a_d)$ je polynom:

$$\frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{k} a_k^{jk^{(\alpha)}}$$

$jk^{(\alpha)}$ je počet cyklů α délky k.

Definujeme váhovou funkci $w : R \to \mathbb{R}$.

$$w(f) = \Pi_{a\in D} w\left(f\left(a\right)\right)$$

Orbita O^* vůči Γ^*, w je konstantní na O^*.

$$S = \sum_{O^* \text{ orbita}} w(O^*)$$

$$
\begin{aligned}
& |\Gamma| \cdot \sum_{O^*} w(O^*) \\
= & \sum_{\alpha\in\Gamma} \sum_{f\in F(\alpha^*)} w(f) \\
= & \sum_{\alpha\in\Gamma} \sum_{r_i\in R} \Pi_{i=1}^{m} w(r_i)^{\xi_i} \\
= & \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{i=1}^{l} \left(\sum_{r\in R} w(r)^{\xi_i} \right) \\
= & \sum_{\alpha\in\Gamma} \Pi_{k=1}^{d} \left(\sum_{r\in R} w(r)^k \right)^{jk^{(\alpha)}}
\end{aligned}
$$

12 Samoopravné kódy

Máme zprávu v, což je řetězec n bitů. Při přenosu může dojít k chybě.

Předpokládáme, že pravděpodobnost, že vznikne více k chyb je podstatně menší, než že nastane nejvýše k chyb.

Vezmeme v, transformujeme na w, přeneseme, dorazí w'. Poté chceme získat transformací opět v.

Možnost duplikovat jednotlivé bity.

12.1 Hammingovy kódy

Např. pro řetězec bitů $abcd$ by poslal $abcdefg$, kde $e = a + b + c \pmod 2$, $f = a + b + d \pmod 2$, $g = a + c + d \pmod 2$.

Abeceda S je nějaká konečná množina symbolů (např. $S = \{0, 1\}$). ***Slovo*** je libovolný řetězec písmen abecedy S, tedy prvek S^n. ***Kód*** délky n nad abecedou S je libovolná $C \subseteq S^n$.

Např. pro 4-bitové řetězce je hammingův kód 16 7-bitových slov.

Hammingova vzdálenost $d(u, v) = |\{i \in 1, 2, \ldots, n; u_i \neq v_i\}|$. ***Minimální vzdálenost kódu*** C $d(C) = \min\{d(u, v), u, v \in C, u \neq v\}$.

Čím větší vzdálenost, tím spolehlivější kód, na druhou stranu, čím více slov, tím více informací lze poslat.

Kód C opravuje t chyb, pokud pro $\forall u \in S^n; \exists$ nejvýše jedno $u, d(u, w) \leq t$.

Pozorování 1 *Kód C opravuje t chyb* $\Leftrightarrow d(C) \geq 2t + 1$.

Tvrzení 2 *Hammingův kód opravuje* 1 *chybu. Např. Golayovy, CD, DVD...*

Souvisí s PCP větou.

12.2 Lineární kódy

Nechť S_i je konečné těleso (třeba $\mathbb{Z}_2$). $C \subseteq S^n$ je lineární kód, pokud C je vektorový podprostor S^n. Ke každému kódu existuje báze – generující matice kódu – P.

Jiný pohled říká, že C je řešení soustavy lineárních rovnic.

Zobecněný hammingův kód, kde abeceda $S = \mathbb{Z}_2$ a parametr $l \geq 2$ ($l = 3$ je hammingův kód). Matice P má l řádek a sloupce má všechny možné nenulové vektory z $\{0,1\}^l$.

Tvrzení 3 *Zobecněný hammingův kód C je $d(C) \geq 3$, tedy opravuje 1 chybu.*

Důkaz:
$d(u,v) = d(u+w, v+w)$. Tedy $d(u,v) = d(u-v, 0)$. Tedy $d(C) = \min\{d(w,0); w \in C; w \neq 0\}$.
Z toho to už jde spočítat.

☻

Asymptoticky dobrý soubor kódů splňuje podmínky:

- Dá se zakódovat libovolně velký vstup.
- Vzdálenosti v nekonečnu jdou k něčemu většímu než jedna.
- Hustota je větší než nula.

Věta 11 (Gilbert,Varshamov) *Existují asymptoticky dobré soubory kódů.*

Důkaz:
Pomocí hladového algoritmu: Vstupem je abeceda, délka a d minimální vzdálenost.

Vždy vybere slovo, označí příliš blízká jako nepoužitelná a pokračuje.

Vzdálenost je dostatečná.

☻

13 Extremální kombinatorika

Lemma 5 (o slunečnici) *Mějme stejně velké množiny $S_1, \ldots, S_k$, které nazvu **slunečnicí**, pokud existuje nějaká množina Y taková, že $\forall i,j; S_i \cap S_j = Y$.*

Pokud máme systém S různých s prvkových množin a $|S| > s! \cdot (k-1)^s$, potom existuje $S' \subseteq S$ takové, že S' je slunečnice a $|S'| = k$.

Důkaz:
Indukcí podle s. Pokud $s = 1$, potom každých k jednoprvkových různých množin tvoří slunečnici. Dle předpokladu $|S| > 1! \cdot (k-1)^1, |S| \geq k$.

Nechť je $s > 1$. Nechť S je systém více než $s! \cdot (k-1)^s$ s-prvkových množin. Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_l$ je největší možný podsystém navzájem různých množin. Pokud $l \geq k$, pak je hotovo.

Dále tedy předpokládáme, že $l < k$. Potom existuje prvek $x \in \bigcup B_i$, který je ve více než $(s-1)! \cdot (k-1)^{s-1}$ množinách z S.

Nechť $\overline{S} = \{X \in S, x \in X\}$. Poté vezmu všechny množiny, ze kterých tento prvek vyhodím. Tím získám systém $(s-1)$ prvkových množin, je jich dostatek (viz níže), dle indukčního předpokladu to pro tento systém platí. Nakonec k nim opět tento prvek vrátím a mám stále slunečnici.

Nyní je třeba zařídit, aby byla množina $\overline{S}$ dostatečně veliká. Mějme všechny dvojice (x, A), kde $x \in A, A \in S$. $|\{(x, A)\}| > s! \cdot (k-1)^s$. Pokud by tomu nebylo, mohu některou množinu přidat mezi tyto disjunktní. Možných volem x je $l \cdot s$. Tedy existuje nějaké k, které je ve více než $\frac{s! \cdot (k-1)^s}{s \cdot (k-1)} = (s-1)! \cdot (k-1)^{s-1}$ množinách.

☻

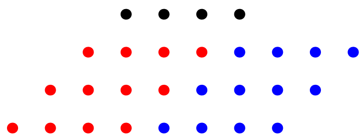
Lemma 6 *Erdös-Ko-Rado Nechť k a n jsou přirozená čísla, $2k \leq n$. Nechť f je systém k-prvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$ takový, že $\forall A, B \in f; A \cap B \neq \emptyset$. Pak $|f| \leq \binom{n-1}{k-1}$.*

Poznámka 2 *Je to optimální. Všechny množiny obsahují jeden pevný prvek. V takovém případě bude velikost přesně takové.*

Poznámka 3 *Kdyby $2k > n$, potom lze zvolit takové množiny, že $|f| = \binom{n}{k} > \binom{n-1}{k-1}$ (ve většině případů – až na patologické případy).*

Důkaz:
Vezmu permutaci π čísel $1, \ldots, n$. Množinu $X \in f$ nazvu π-konzistentní, jestliže $X = \{\pi(i), \pi(i+1), \ldots, \pi(i+k-1)\}$. π-konzistentních množin v f je nejvýše k.

Pokud tam není žádná, pak je hotovo. Pokud nějaká je, tak se všechny musí protínat se všemi. Takových by bylo až $2 \cdot (k-1)$ – každá by mohla v některém místě začínat nebo končit. Ale v každé dvojici (jedna začínající a jedna končící) může být nejvýše jedna, protože tyto dvě by se neprotly. Na druhém konci se protnout nemohou, protože jsou množiny jen k prvků dlouhé.



Obrázek 5: Červená a modrá množina se neprotne

Počítáme všechny dvojice (π, X), X je π-konzistentní. Určitě jich nemůže být více než $k \cdot n!$. (je $n!$ permutací).

Dále můžu mít $n \cdot k!(n-k)!$ permutací, se kterými je množina konzistentní. Proto po vydělení je celkový počet maximálně $\binom{n-1}{k-1}$.

☻

14 Minory

Graf H je ***minorem*** G, pokud existují podmnožiny disjunktní $V_1, \ldots, V_k \subseteq V(G)$, každý $G[V]$ je souvislý a platí, že pokud $(v_1, v_2) \in E(H) \Rightarrow \exists$ hrana mezi nějakými vrcholy V_1 a nějakým z V_2

Alternativní definice je taková, že H jde získat posloupností vynecháváním hran, izolovaných vrcholů a kontrakcemi hran.

Věta 12 (Kuratovského s minory) *Kuratovského věta platí i s minory, nejen s podrozděleními.*

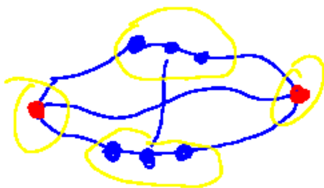
Hypotéza 1 (Hadwidgerova hypotéza) *Pokud $\chi(G) \geq k \Rightarrow G$ obsahuje K_k jako minor.*

Pro malé případy to platí, lze vyzkoušet.

Pro $k = 4$ to můžeme dokázat obměnou implikace.

Lemma 7 *Nechť G je hranově maximální graf bez minoru K_4 na alespoň 3 vrcholech. Pak G lze vytvořit z trojúhelníků lepením za hrany (eg. je to 2-strom).*

Důkaz:
Předpokládejme, že je 3-souvislý. Mám dva vrcholy, mezi nimi musí vézt alespoň 3 vrcholově disjunktní cesty, alespoň 2 z toho tedy mají vrcholy. Ty původní vrcholy můžu zahodit a stále to je souvislé. Potom ale musí obsahovat minor K_4.

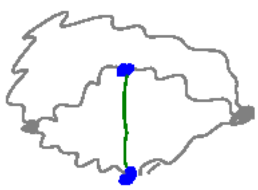


Kdyby nebyl souvislý, tak mezi komponenty můžu přidat hranu a tím určitě nemůžu vytvořit minor K_4.

Kdyby nebyl 2-souvislý, tak by existoval vrchol, který po utržení rozpadne tuto věc na dvě části. Ten má v každé komponentě alespoň jednoho souseda, můžu mezi ně přidat hranu. Ale to to taky nemůže vytvořit K_4.

Obsahuje tedy 2-řez. Když jsou spojeny hranou, tak ho rozložím na dva, který jsou hranově maximální bez minoru K_4. Hurá, indukce (oba jsou 2-stromy, postavím jeden, dostavím k němu druhý).

Když tedy nejsou spojeny, tak tam přidám hranu. Vznikl mi minor (musí, jsem hranově maximální), tak to vypadá takto:



V tom případě tam ale byla ještě jedna komponenta, neboť šedivý kus je souvislý, nebyl by to 2-řez. Ta další komponenta musí být připojena na oba modré vrcholy, proto místo zelené přidané hrany můžu projít tamtudy.

☻

Nyní, předpokládejme, že graf neobsahuje K_4 jako minor ale je alespoň 4 barevný. Uděláme ho hranově maximální (přidávání hran barevnost nesnižuje).

Protože ale jde ulepit z trojúhelníků, tak to jde obarvit 3 barvami (kdykoliv přilepím nový trojúhelník, tak má nový vrchol jen 2 sousedy, tedy má volnou barvu).

Pro pětku to plyne z věty o 4 barvách, šestka už je slavný výsledek.

Graf G je ***chordální***, pokud neobsahuje indukovanou kružnici na alespoň 4 vrcholech.

Tvrzení 4 *Nechť G je chordální (souvislý, ne úplný) a V je minimální (co do inkluze) řez. Potom $G[V]$ je úplný graf.*

Důkaz:
Viz georep. Kdyby chyběla hrana, najdu nejkratší cesty mezi nespojenými vrcholy v rámci každé komponenty, dohromady to tvoří kružnici bez chordy.

☻

Věta 13 *Graf G je chordální $\Leftrightarrow$ je průnikový graf podstromů ve stromě.*

Důkaz:
Viz georep.

☻

Lemma 8 (Hellyho vlastnost) *Nechť $T_1, \ldots, T_k$ jsou podstromy stromu T a každé dva mají neprázdný průnik. Pak všechny mají neprázdný průnik.*

Stromová šířka $tw(G)$ je takové nejmenší k takové, že existuje chordální G' takový, že $G \subseteq G'$ a velikost kliky $w(G') = k + 1$.

Věta 14 *Nechť $\mathcal{G}$ je vlastní třída grafů uzavřená na minory. Pak existuje c takové, že $\forall G \in \mathcal{G}$, $|E(G)| \leq c \cdot |V(G)|$.*

Věta 15 (Cornellova) *Nechť P je problém popsatelný pomocí monadické lokigy druhého řádu a nechť $\mathcal{G}$ je třída grafů omezené stromové šířky. Potom existuje lineární algoritmus, který rozhoduje problém P na této třídě.*

Důkaz:
Máme MSOL formuli s $x_1, \ldots, x_k$ a $X_1, \ldots, X_l$. Máme rovnosti, nerovnosti, provšechnítka, existítka, inkluzítka. Hrany reprezentujeme jako dvojici.

Na každém uzlu si pamatujeme u formule:

- U proměnné že buď byla, že teprve bude a nebo pokud je, tak jaká.
- U množiny její průnik s aktuálním uzlem.

Toto je konstantně omezené. Jde to updatovat v konstantním čase při přidání vrcholu, při odebrání, při slití stromečků.

Uděláme hezký stromový rozklad, vrcholy jen druhu (z algograph, drobně se liší oproti tomu přednášenému):

- Listy jsou jednoprvkové.
- Jeden vrchol přibývá, má jednoho syna.
- Jeden vrchol ubývá, má jednoho syna.
- Vrcholy jsou stejné, má právě dva syny.

Procházíme odspodu. Na každém máme množinu všech přiřazení, co ještě připadají v úvahu.

Při odebrání vrcholu jen přechází do „už bylo“ (některé se tím mohou sloučit), při přidání se zkusí přidat do proměnných „teprve bude“ ten nový vrchol, tím se nagenerují nové, zkusí se, jestli ještě mohou platit, pokud ano, nechají se. U slévání musíme křížit přiřazení. Z dvojice přežije, pokud max. v jednom synovi je „už byl“, v druhém „bude“ (nebo oba teprve „budou“), nebo se přiřazení rovná.

V kořeni musí být něco, co platí a už nemá žádné „bude“.

Je potřeba najít lineárně velkou dekompozici, to ale jde v lineárním čase.

☻

Pozorování 2 *Třída grafů stromové šířky $\leq k$ je vlastní třída uzavřená na minory.*

Důkaz:
Mazat hrany a vrcholy je v pohodě. Kontrakce taky jdou.

☻

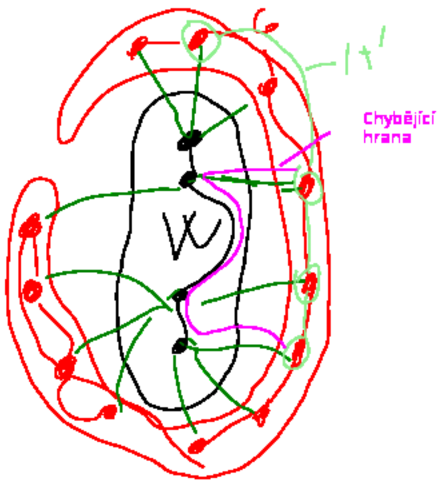
Věta 16 *Pro každé k existuje algoritmus běžící v lineárním čase, který pro graf G buď vrátí, že má moc velkou stromovou šířku, nebo nalezne hezký stromový rozklad dané šířky.*

Věta 17 (Maderova) $\forall n \exists \delta$ *takové, že každý graf s minimálním stupněm δ obsahuje podrozdělení grafu K_n.*

Důkaz:
Uděláme silnější tvrzení. Nechť H je souvislý s m hranami a G je graf s minimálním stupněm 2^m, pak G obsahuje podrozdělení H.

Indukcí. Začneme H je strom. Potom $2^m \geq n$. Najdu dokonce jako podgraf, vždycky mám ještě dostatek sousedů, ze kterých brát, můžu prostě hladově.

Dále máme H souvislý, není strom. Tedy $\exists e$ takové, že $H := H \backslash E$ je stále souvislý. Dále BÚNO G je souvislý. Uvažme největší množinu vrcholů W takovou, že $G[W]$ je souvislý a $|E(G/W)| \geq 2^{m-1} \cdot |V(G/W)|$. Můžu si za W zvolit jeden vrchol, proto takové W určitě existuje. Nechť G' je podgraf G indukovaný vrcholy w takovými, že $w \notin W$ a w má sousedy v W (okolí množiny W). Tvrdíme, že minimální stupeň G' je alespoň 2^{m-1}.



Takové W' obsahuje dle indukce H', ale chybí tam jedna hrana. Tu nahradím cestou skrz v W, to je podrozdělení této hrany.

Nyní dokazujeme, že minimální stupeň v G' je alespoň 2^{m-1}. Sporem, vezmeme vrchol v, který má málo sousedů, tedy nejvýše $2^{m-1}-1$. Vrazím takový vrchol do W. Tam má dostatek sousedů (protože jich má málo tady). Od něj ztratím málo hran, protože tady jich má málo. Upočítá se, že W nebylo nejmenší.

☻

Důsledek 3 *Nechť $\mathcal{G}$ je vlastní třída grafů uzavřená na minory. Potom existuje c_0 takové, že barevnost této třídy je nejvýše c_0.*

Důkaz:
Neobsahuje úplné grafy libovolné velikosti, existuje tedy nějaké n_0 takové,

že K_{n_0} není součást $\mathcal{G}$ a tedy ani podrozdělení a minimální stupně jsou méně než δ_0, obarvíme.

☻

Důsledek 4 *Nechť $\mathcal{G}$ je vlastní třída grafů uzavřená na minory. Pak existuje konstanta d_0 taková, že počet hran je nejvýše $d_0 \cdot n$.*

Graf G je k-spojovaný, pokud pro každé vrcholy $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ existuje vrcholově disjunktní cesta mezi každou dvojicí u_i, v_i.

Věta 18 *$\forall k \exists l$ takové, že každý l-souvislý graf je k-spojovaný.*

Důkaz:

Vezmu $l := \delta + 2k = 2^{\binom{3k}{2}+2k}$. Odstraním všech $2k$ vrcholů u_i, v_i. Ten bytek obsahuje podrozdělení K_{3k}, je $2k$-souvislý. Z toho lze odvodit, že existuje $2k$ disjunktních cest z každého odebraného vrcholu do toho K_{3k}.

Vezmu takové, aby mimo to podrozdělení bylo co nejméně hran. Musím najít disjunktní cesty ze všech $2k$ vrcholů do tohoto K_{3k} a to tak, aby se jich moc nepotkalo na jedné podrozdělené hraně.

Vezmu takové cesty, co mají co nejméně hran mimo to podrozdělení. ***TODO: Uspořit nějak to, že nemají nic společného.***

☻

Číslo $t(n, l)$ je počet hran úplného balancovaného l-partitního grafu na n vrcholech.

Věta 19 (Turanova) *Pokud G je graf na n vrcholech s alespoň $t(n, l) + 1$ hranami, pak G obsahuje K_{l+1} jako podgraf.*

Důkaz:

Indukce podle n. Pokud je $n \leq l$, to má $\binom{n}{2}$ hran, to obsahuje úplňák (každý vrchol musí být samostatná partita).

Nechť $n \geq l + 1$, G má alespoň $t(n, l) + 1$ a neobsahuje K_{l+1}. BÚNO přidání libovolné hrany vytvoří K_{l+1}, tedy obsahuje K_l. Utrhneme toto K_l, ale vyjde nám, že má alespoň $t(n - l, l) + 1$ hran. To se uindukuje.

☻

15 Semeredi regularity lemma

Mám bipartirtitní graf H s partitami $A, B, |A| = |B|$. Potom je ***ϵ-regulární*** pokud platí, že $\forall A' \subseteq A; B' \subseteq B, |A'| \geq e \cdot |A|, |B'| \geq e \cdot |B|$. Potom $\left|\frac{e(A',B')}{|A'||B'|} - \frac{e(A,B)}{|A||B|}\right| \leq \epsilon$. To e je počet hran mezi dvěma množinami.

Věta 20 (Szemeredi regularity lemma)

$\forall \epsilon, m_0 \exists M_0, n_0; \forall G, |V(G)| = n \geq n_0 \exists$ rozklad na $V_0, V_1, \ldots, V_m, m_0 \leq m \leq M_0$

Takové, že:

- $|V_0| \leq \epsilon \cdot n$
- $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_m|$
- *Nejvýše $\epsilon \cdot m^2$ dvojic $V_i, V_j, 1 \leq i < j \leq m$ není ϵ-regulárních*

Lemma 9 (Removal lemma for triangles) $\forall \epsilon_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall G$ *platí alespoň jedno z následujících:*

- *G obsahuje $\delta_0 \cdot n^3$ podgrafů izomorfních s K_3.*
- *$\exists F \subseteq E(G)$ takové, že $G \backslash F$ neobsahuje trojúhelník a $|F| \leq \epsilon_0 \cdot n^2$.*

Pozorování 3 *Nechť A, B je ϵ-regulární bipartitní graf a jeho hustota je d. Potom A obsahuje alespoň $(1 - \epsilon) \cdot |A|$ vrcholů stupně alespoň $(d - e) \cdot |B|$.*

Důkaz:
Sporem, předpokládejme, že máme hodně takových malých vrcholů. Zvolím $B' := B, |A'| \geq \epsilon \cdot |A|$ (A' jsou ty malé vrcholy).

☻

Důkaz:
Nastavím, že $\epsilon := \epsilon_0/20$ a $m_0 := 20/\epsilon_0$ a dám to do 20. Vypadne M_0, n_0. Poté nastavím $\delta_0 := \left\{\frac{1}{n_0^3}, x\right\}$. ($x$ se spočítá).

Udělám regularity graf (každá část má vrchol, je hrana, pokud tam je alespoň tolik, jako je hustota hran a je ϵ-regulární. Stačí dokazovat pro vrcholy s alespoň n_0 vrcholy (jinak bud mám jeden trojúhelník, nebo ne).

Uděláme H regulární graf pro G s rozkladem z 20 a hustotu $\rho := \frac{\epsilon_0}{2}$. Pokud H neobsahuje trojúhelník, pak do množiny F dáme hrany, kde jeden vrchol je v V_0 (odpadní), hrany uvnitř rozkladových tříd, hrany spojující dvojice, co nejsou ϵ-regulární a hrany mezi řídkými dvojicemi. To zajistí, že hrany jsou jen tam, kde hrany máme teď, takže teď už žádné trojúhelníky nemáme.

Hran ve $V_0 = \epsilon \cdot n^2$. Uvnitř jedné je to $m \cdot \frac{n}{m}^2 \leq \frac{n^2}{m_0} = \frac{\epsilon_0 \cdot n^2}{20}$. Stejně bude i odhad pro neregulární dvojice. Těch málo hustých je $\leq n^2 \rho \frac{n}{m}^2 \leq \frac{\rho \cdot n^2}{2}$. To je dostatečně málo.

Pokud H má trojúhelník, zafixujme si ho. Každá dvojice je ϵ-regulární a počet hran mezi nimi je alespoň $\rho \cdot V_i \cdot V_j$.

Vezmeme podmnožinu $W \subseteq V_i$ takovou, že každý vrchol má alespoň $\rho \cdot |V_j|$ sousedů ve V_j a taktéž s V_k. $|W| \geq (1-2\epsilon) \cdot |V_i|$. Upočítá se, že ty kousky ve V_j, V_k jsou alespoň $\epsilon \cdot |V_j|$ a $\epsilon \cdot |V_k|$, toto jsou podmnožiny ϵ-regulární dvojice, najde se tam dostatek hran.

Vyjde že máme alespoň $(1-2\epsilon)\epsilon^3 |V_i||V_j||V_k|$. Odhadneme velikosti V a dosadíme do x.

☻

Věta 21 (Szemerédiho)

$$\forall \epsilon \exists n_0 \forall X \subseteq 1 \ldots n_0; |X| \geq n_0 \cdot \epsilon \exists x, y, z; x + y = z$$

Věta 22 *Mějme danou hustotu hran d, máme k barev. Kolik nejvýše různých obarvení je možné najít na grafu G s hustotou d? Hledáme tedy limitně, kolik je n-tá odmocnina z počtu obarvení.*

Toto je $\beta(d,k) = e^{\delta(d,k)}$, kde $\delta = \sum \alpha_A \ln |A|$.

Důkaz:
Rozdělíme na množiny indexované neprázdnými podmnožinami barev, nacpeme úplňák, pokud jsou indexy disjunktní. Takže si můžu u každého vrcholu vybrat libovolnou barvu z indexu. Chceme mít relativní velikosti α_i množin, což jsou nezáporné a dohromady dají 1, $\sum \alpha_i \cdot \alpha_j \geq d$. Chci maximalizovat $\prod n \cdot \alpha_i$ (to odpovídá oné n-té mocnině, které se zbavujeme). Tím máme dolní odhad.

Na druhou stranu stačí najít správné α, abych dokázal, že není nejlepší. Vezmeme nekonečnou posloupnost rostoucích grafů.

Vyberu si dominantní typ, vezmu si ty barvy, co se objevují často.

`TODO: Hmm, tady to chybí`

☻

Příklad 1:

Máme graf H. Kolik musí mít graf na n vrcholech, aby obsahoval H jako podgraf? Budeme předpokládat, že H není strom (asi jen nezajímavé).

Určitě můžu vzít $\chi(H)-1$ partitní úplný graf, ten ho neobsahuje, takže nestačí $t(n, \chi(H)-1)$

☺

Věta 23 (Erdös-Stown) *$\forall H \forall \gamma \exists n_0 \forall G; n = |V(G)| \geq n_0, |E(G)| \geq t(n, \chi(H) - 1) + \gamma n^2$, potom G obsahuje H.*

Důkaz:
Vezmu $d := \frac{\gamma}{2}$.

Dále potřebuji, aby $(d-\epsilon)^{\Delta} - \Delta\epsilon \geq \frac{1}{2}d^{\Delta}$, kde Δ je max. stupeň v H. Zvolíme ϵ tak, aby to platilo a bylo menší, než d.

Zvolíme m tak, aby $2\gamma - \epsilon^2 - 4\epsilon - d - \frac{1}{m} > 0$ a $m \geq \chi(H)$.

Potom na to pustíme Semerediho Regularity Lemma a vrátí M a $n_{0,s}$. Potom dáme $n_0 \geq \frac{2M \cdot |V(H)|}{d^{\Delta}(1-\epsilon)}$ a zároveň $n_0 \geq n_{0,s}$.

Dále máme ϵ regulární rozdělení na $V_0, V_1, \ldots, V_n$ tak, že $m \leq n \leq M_0, |V_0| \leq \epsilon \cdot n, |V_1| = \ldots = |V_n|$. Uděláme regularity graf s hraniční hustotou d.

Buď obsahuje $K_{\chi(H)}$ nebo má nejvýše $t(m, \chi(H)-1)$ hran (a podle Turanovy věty nastává alespoň jedna možnost).

H má vrcholy $w_1, \ldots, w_k$, uvážíme jeho obarvení. Jako kandidátskou množinu vrcholu w_i barvy c zvolíme V_c (kde to $K_{\chi(H)}$ je na prvních $\chi(H)$ V vrcholech). Té budu říkat Y_i.

Dále budeme postupně určovat vrcholy z kandidátských množin. Budeme mít invariant, že Y_i pro neurčený vrchol w_i bude alespoň $(d-\epsilon)^l \cdot |V_i|$, kde l je počet již zafixovaných sousedů.

Druhý invariant je, že pokud mám dva vrcholy určené, tak pokud byly v H hranou, tak jsou i nyní.

Pokud w_i je zafixovaný a w_j není zafixovaný, potom Y_j obsahuje jen sousedy w_i.

Na začátku to triviálně platí.

Nechť jsou $w_1, \ldots, w_\kappa$ zafixované, fixuji $w_{\kappa+1}$. Velikost $Y_{\kappa+1}$ je alespoň $(d-\epsilon)^{\Delta} \cdot |V_1|$. Nemohu použít $\leq k-1$ vrcholů, které jsou již obsazené. A také nemůžu použít nejvýše $\Delta \cdot \epsilon \cdot |V_1|$, které mají málo sousedů v kandidátských množinách nezafixovaných sousedů $w_{\kappa+1}$.

Nyní je potřeba dokázat, že mi ještě něco zbylo. To je potřeba upočítat z předpokladů.

Druhý případ je, že $K_{\chi(H)}$ tam není. Předpokládejme, že $|E(G) > t(m, \chi(H) - 1|$.

Jednak můžeme mít až $\epsilon \cdot n^2$ hran do odpadní množiny. Dále ***TODO:*** .

☻

Příklad 2:

$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall A \subseteq 1 \ldots n, n \geq n_0, |\epsilon \cdot n|; A$ obsahuje aritmetickou posloupnost délky 3.

Tohle se udělá přes removal lemma pro trojúhelníky. Uděláme si 3-partitní graf, očíslované pomocí $1 \ldots 3n$ (takže celkem $9n$ vrcholů). Spojím hranou dva vrcholy sousedních partit, když jejich rozdíl je v A, ty krajní když polovina rozdílu je v A. Na aritmetické posloupnosti vidím trojúhelník.

Obsahuje $n \cdot |A|$ hranově disjunktních trojúhelníků. Takže to má moc trojúhelníků/hran, takže druhý případ removal lemma nenastane. Tedy máme trojúhelníků hodně. Ale trojúhelníků tvaru $x, x + a, x + 2a$ je jen $3n^2$. Proto existuje i jiný trojúhelník. Proto tam mám nějaká čísla $a, b, \frac{a+b}{2}$ v A. Máme tedy aritmetickou posloupnost.

☺

Důkaz regularity lemmatu:

Důkaz:
Budeme mít potenciál rozdělení. Jemnější rozdělení bude vyšší a je to číslo mezi 0 a 1. Vezmu náhodné, potom postupně zlepšuji.

Potenciál bude:

$$q(A, B) := \frac{e(E, B)^2}{n_2 \cdot |A| \cdot |B|}$$

A pro celek:

$$q(A_1, \ldots, A_l) := \sum q(A_i, A_j)$$

Pro náš rozklad to bude tak, že V_0 rozdrobním na jednotlivé prvky, jinak je to stejné.

Pokud rozdělím něco na dva kusy, tak to zůstane alespoň stejné.
$\frac{e(A,B)^2}{|A|} \leq \frac{e(A',B)^2)}{|A'|} + \frac{e(A'',B)^2}{|A''|}$.

To se vykouká z cauchy-swartzovy nerovnosti.

To, že je to do jedničky, to dokážu z rozkladu na jednotlivé vrcholy.

Lemma 10 *Pokud C, D není ϵ-regulární dvojice, potom je můžu rozdělit každou na dvě množiny takové, že $\sum q(C_i, D_j) \geq q(C, D) + \epsilon^4 \frac{|C||D|}{n^2}$.*

Důkaz:
Hnusné rozepsání a roznásobení. Poté cauchy-swartz. Potom z předpokladu, že $|C_1| \geq |C|$ a obdobně pro D dokážeme, že to vzroste dostatečně.

☻

Lemma 11 *$\epsilon \leq \frac{1}{8}$, máme rozdělení V_i, velikosti jsou stejné. Pokud není ϵ-regulární, potom existuje rozdělení V_i' takové, že: $|V_0'| \leq |V_0| + \frac{n}{2^m}$, $m \leq m' \leq m \cdot 4^m$, stejné velikosti, a potenciál vzroste alespoň o $\frac{\epsilon^5}{4}$.*

Toto už stačí. Libovolně rozdělíme na části $V_1, \ldots, V_{m_0'}$, zbylé dám do V_0, $m_0' \geq m_0$. Nyní používám předchozí lemma, dokud není ϵ-regulární. V každém kroku mi potenciál vzroste o konstantu. Takže počet kroků je shora omezen, pak už to určitě nesmí jít.

Důkaz:
Mám dostatek dvojic, co nejsou ϵ-regulární. Pro každou dvojici použiju předchozí lemma. Jedno V_i může být v mnoha dvojicích, tak ho rozdělíme vícekrát. To vytvoří nové rozdělení. To dostatečně zvedne potenciál.

Poté to nasekám ještě hodně tak, aby byly stejně veliké ($\frac{l}{4^m}$, kde l jsou původní velikosti) a co zbyde, to nacpu do odpadu.

☻

☻

16 Vybíravost

Definice viz barevnost.

Pozorování 4 $\chi \leq \chi_l$.

Pozorování 5 *Existují grafy, kde je to ostré (např. $K_{3,3}$).*

Tvrzení 5 *Existuje rovinný graf s vybíravostí alespoň 5. Na cvičení.*

Věta 24 (Thomasen) *Každý rovinný graf je 5-vybíravý.*

Důkaz:
Dokážeme silnější: Nechť G je souvislý graf vnořený do roviny. Dále, nechť $v_1, \ldots, v_k$ jsou vrcholy vnější stěny takové, že v_1 a v_2 jsou sousední. Pro každé přiřazení seznamů splňující:

- $|L(V_1)| = |L(V_2)| = 1$, $L(V_1) \neq L(V_2)$.
- $|L(V_3)| \ldots |L(V_k)| = 3$.
- $\forall v \in V(G) \setminus \{v_1, \ldots, v_k\}, |L(w)| = 5$.

Pak existuje L-obarvení.

Uděláme to indukcí podle počtu vrcholů.

Pokud není 2-souvislý, tak má artikulaci. Ta je buď venku, pak to rozštěpím, někde zbydou předbarvené, uděláme z indukce. Ve druhé se mi předbarví vrchol, předbarvím ještě druhý a hotovo.

Když žije uvnitř, potom je to podobné, barvím prvně vnějšek.

Nadále je vnější stěna ohraničena kružnicí $C := v_1, \ldots, v_k$.

Kdyby měla chordu, tak ji můžu okolo té chordy přestřihnout.

Nyní nám tedy zbyla venku kružnice bez chord. Nechť to napřed není trojúhelník. Odtrhneme v_3 (první nepředbarvený). Tomu zbývají až 2 nepoužité barvy, α, β. Od všech jeho sousedů (kromě v_2 a v_4) sebereme α, β. Ty se dostanou na vnější stěnu, stačí jim tedy 3 barvy. Když je to trojúhelník, tak to jde také, obdobně. v_3 ještě jedna barva nakonec zbude (v_4 mohlo jednu sežrat).

Začátek indukce funguje kdekoliv pod 5 vrcholů.

☻

Orientace grafu bude přiřazení nějakého směru každé hraně.

Orientovaný graf je ***jaderný***, pokud každý jeho indukovaný podgraf má jádro.

Jádro je taková nezávislá množina, do které vede hrana z každého jiného.

Lemma 12 *Pokud G má jadernou orientaci s maximálním výstupním stupněm nejvýše $k-1$, pak G je k-vybíravý.*

Důkaz:
Budeme dokazovat silnější, tedy že mi budou stačit seznamy délky $\deg^-(v)+1$. Indukcí podle počtu vrcholů. Pro jednovrcholový je zřejmé.

Nechť γ je libovolná barva vyskytující se v nějakém seznamu $L(v)$. W označím všechny vrcholy, co mají v seznamu barvu γ. Podgraf $G[W]$ má jádro A. Vrcholům A přiřadím barvu γ, odeber tyto vrcholy a γ ze seznamů.

☻

Věta 25 (Galvinova) *Nechť G je bipartitní graf. Potom jeho hranová vybíravost* $\chi'_l = \chi' = \Delta$.

Důkaz:
Nalezneme jadernou orientaci line-grafu s $\Delta^- = \Delta(G) - 1$.

Obarvíme hrany původního pomocí barev $1 \ldots \Delta$. V jedné partitě zorientuji hrany v line grafu od menší barvy ke větší, v druhé partitě naopak.

Je třeba dokázat jadernost. Vezmeme indukcí podle velikosti.

Vybereme kandidáta – v levé partitě si vybereme hranu s největším číslem. Pokud je to nezávislé, tak mám jádro. Jednu ze závislých odeberu (tu větší), najdu jádro zbytku. To je jádrem i naší množiny. Rozeberou se případy.

☻

17 Π_2-úplnost

Problém je něco, kde mám vstup a očekávaný výstup je ano/ne.

Problém $\mathcal{P}$ je ve třídě P, pokud existuje polynomiálně vyčíslitelný predikát Q takový, že $\mathcal{P}(x) = Q(x)$.

Problém $\mathcal{P}$ je ve třídě NP, pokud existuje polynomiálně vyčíslitelný predikát Q a polynom q, $\mathcal{P}(x) = \exists y, |y| \leq q(|x|); Q(x, y)$. Také se tomu říká Σ_1

$co - NP$ je takový, že doplněk je NP. Říká se jim Π_1.

Problém $\mathcal{P}$ je ve třídě Π_k, pokud existuje polynomiálně vyčíslitelný $k+1$-ární predikát Q a polynom q takový, že $\mathcal{P}(x) = \forall y_1 \leq q(|x|) \exists \ldots Q(x, y_1, y_2, \ldots)$ (prostě se ty $\exists$ a $\forall$ se střídají).

Toto je všechno v $P - space$.

Třída rozhodovacích problémů $\mathcal{A}$, pak problém $\mathcal{P} \in \mathcal{A}$ je $\mathcal{A}$-úplný, pokud $\forall \mathcal{P}' \in \mathcal{A}$ existuje polynomiálně vyčíslitelná funkce, že $\forall x \in 2^*; x \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{P}$.

Jeden z Π_2 úplných problémů je určení, jestli:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists x_{n+1}, \ldots, x_{2n} \bigwedge_{i=1}^{m} \left(x_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \vee x_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \vee x_{i_3}^{\epsilon_{i_3}} \right)$$

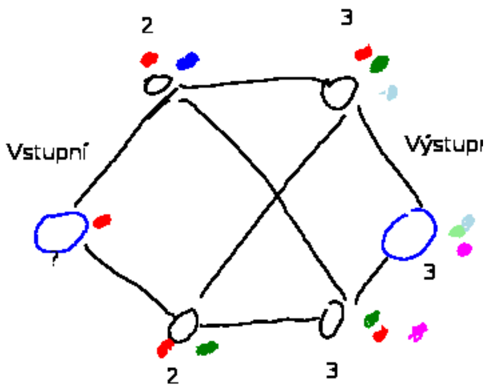
To lze dokázat zakódováním Turingova stroje.

Věta 26 (Erdös,Rabin,Taylor) *3-Vybíravost bipartitních grafů je* Π_2*-úplný problém.*

Důkaz:
To, že je ve třídě Π_2 je vidět.

Je potřeba dokázat i Π_2-těžký. Prozatím si budu diktovat, jestli vrchol dostane seznam velikosti 2 nebo 3 (později převedu všechno na 3).

Budeme dělat gadgety. První nazveme ***polopropagátor***



Každé předbarvení vstupu lze rozšířit. Vždy barva zbývá.

Pro každé obarvení výstupu existuje nejvýše jedna barva, která je nekompatibilní (kdyby se dala na vstup, tak by nešla rozšířit). To dokážu rozborem případů a tím, že $K_{2,3}$ je 2-vybíravý.

Existují seznamy takové, že existuje předbarvení vstupu, které je jednoznačně rozšiřitelné (viz barvičky v obrázku).

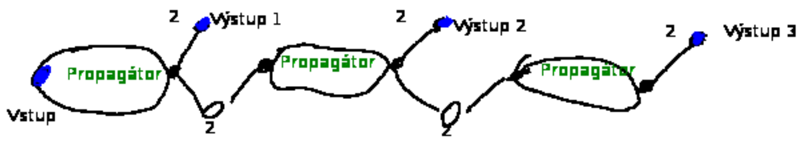
Propagátor vypadá tak, že nalepí dva polopropagátory za sebe.

Každé předbarvení vstupu lze rozšířit. Plyne z polopropagátoru.

Existuje nejvýše jedna barva vstupu, která je nekompatibilní s nějakou barvou výstupu. To se udokazuje nakreslením, které barvy jsou navzájem nekompatibilní a rozborem případů.

Existují seznamy takové, že existuje předbarvení vstupu, že jej lze jednoznačně rozšířit. Plyne z polopropagátoru.

Multipropagátor je toto:

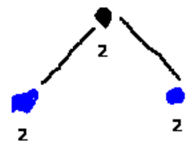


Každé předbarvení vstupu lze rozšířit. Z propagátoru.

Existuje nejvýše jedna barva vstupu, že je nekompatibilní s nějakým předbarvením výstupů. Taky uargumentuju z propagátoru.

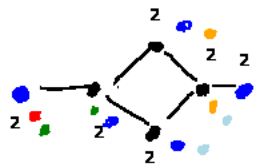
Existují seznamy a předbarvení, že lze jednoznačně rozšířit. Z propagátoru.

Existík je toto:



Předbarvení z každé strany/vstupu (modrý) lze rozšířit. Je vidět.

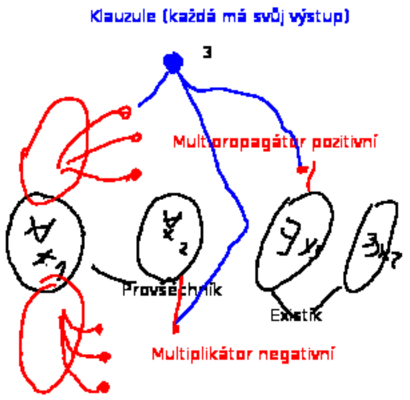
Provšechník je toto:



Existují seznamy, že si jednu koncovou barvu vynutím (zelená v příkladu nalevo).

Alespoň jeden z konců lze obarvit libovolnou jeho barvou. Je to očividně 2-vybíravé. To, že jeden zbude, jak chci, je tak, že když jeden je zakázaný, určitě má druhý povolené oboje.

Nyní jsem dostal formuli. Udělám si existíky pro existenční proměnné, provšechníky pro provšechnové proměnné. Na každé výstupy si pověsím multipropagátor.
Za každou klauzuli mám vrchol, spojím se správnými výstupy multypropagátorů.



Toto je bipartitní. Každý gadget je bipartitní sám o sobě. Všechny výstupy z multipropagátoru jsou ve stejné (plyne z propagátoru a u něj z polopropagátoru), existík a provšechník mají konce ve stejné, to jde pospojovat.

Vytvořím polynomiálně, to je vidět.

Předpokládejme, že je formule nesplnitelná. $\exists x_1, \ldots, x_n$ takové, že $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ nejdou doplnit, aby platilo. Vynutím si tedy vždy jednu barvu na buď pozitivním (když je false) nebo negativním (true) konci provšechníka. Multipropagátorům dám vynucenou barvu (nad nimi). U existíků dám všude stejné seznamy A, B. Na existíka nastavím multiplikátory takové, že na jednom vynutí barvy když A, na druhém když B (takže si to musí vybrat, který konec vynutí). Klauzule dostane tu barvu, kterou má na vynuceném konci, pokud má něco nevynucené, tak cokoliv (ta už nekouše). Kdyby se to povedlo obarvit, tak to znamená, že každá klauzule má nevynucený koneček, potom ale můžu podle ní zvolit proměnnou.

Pokud je splněná, tak hledám obarvení. Multipropagátor má nejvýše jednu špatnou barvu na vstupu, tak si zvolím tu která není špatně, rozšířím to pro druhou stranu (tam možná něco vynutím). Tím jsem navolil ohodnocení u provšechnítek, dostanu ohodnocení u existítek, na nich si vyberu dobrou barvu. A každá klauzule je už buď dobře obarvená, nebo musí vést do neobarveného (a rozšiřitelného) konce, a hurá.

Nyní potřebuji nadělat seznamy délky 3. Vezmu 9 kopií těchto grafů. Potom vezmu dva nové vrcholy, jeden spojím se všemi 2 v jedné partitě, k druhému z druhé partity. Těm dám barvy A, B, C, každé kopii doplním jednu disjunktní dvojici barev do seznamů. Pokud je obarvitelný ten původní, tak ty dva nové dostanou libovolnou barvu. Pokud ale nešly obarvit, novým vyberu barvu a jednu dvojici tím zabiju, tedy tomu zbyly jen ty původní 2 barvy a to nešlo obarvit.

☻

18 Ramseioviny

Budeme pracovat s abecedou A, $|A| = t$.

A^k je množina slov délky k, ale také k-krychle nad A.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k$ je k-řetězec.

Přidáme hvězdičku – žolíka. Pokud bude k-řetězec nazván ***kořenem***, pokud obsahuje alespoň jednu hvězdičku.

$\alpha(s)$ bude nahrazení všechny hvězdičky znakem s.

Když máme α kořen, potom l_α ***přímka*** je množina prvků $\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(t)$.

Věta 27 (Haywlet-Juwet) *$\forall t, r \in \mathbb{N} \exists N = H(t, r) \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall$ obarvení $\chi : A^N \to [r]$ existuje monochromatická kombinatorická přímka.*

Důkaz:
Indukcí, zafixujeme r, podle t.

Pro $t = 1$ je jednoduché, jednoprvková krychle má jednobarevný prvek.

Nyní zvolíme $N_1 := r^{t^n}, N_i := r^{t^{\sum_{j=1}^{i-1} N_j + n}}$. $H(t, r) := N := \sum i = 1^n N_i$.

Sousedi jsou takové prvky, které jsou všude stejné, jen jeden má na jednom místě 0 a druhý 1.

Tvrzení 6 *$\exists$ posloupnost kořenů $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ nad $A \cup \{*\}$ takové, že $|\tau_i| = N_i$ a $\chi(\tau(a)) = \chi(\tau(b))$ pro a, b sousedi $a, b \in A^n$.*

☻

18.1 Aplikace

Věta 28 (Vanclav Waerden) *$\forall r, t \in \mathbb{N} \exists N = W(r, t)$ takové, že $\forall$ obarvení $\{1 \ldots N\}$ existuje monochromatická aritmetická posloupnost o t členech.*

Důkaz:

☻