Geometrické reprezentace grafů

2. ledna 2013

Obsah

1 Úvod

Budeme probírat především průnikovou reprezentaci. Chceme graf mít vrcholy – množiny a hrana bude v grafu existovat, pokud průnik vrcholů bude neprázdný. Když $\mathcal{M}$ bude množina, potom $G(\mathcal{M})$ je průnikový graf $\mathcal{M}$.

Pozorování 1 *Kazdý graf lze takto reprezentovat.*

Důkaz:
Každý vrchol bude množnia obsahující všechny hrany, které z něj vedou.

☻

Intervalové grafy (IR) jsou grafy, kdy dostanu intervaly na přímce a udělám z toho průnikový graf.

U některých tříd průnikových grafů lze mnoho obecně složitých věcí řešit rychle (např. barvení, klikatění, ...).

Když $\mathcal{M}$ je množina, potom:

$$\mathcal{IG}(\mathcal{M}) := \{G | \exists f : v(G) \to \mathcal{M} \forall u \neq v; uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u) \cap f(v) \neq \emptyset\}$$

Například úplný graf je v této třídě pokud tato množina obsahuje alespoň jednu neprázdnou množinu.

Circle grafy (CIR) jsou průnikové grafy tětiv kružnice.

Circle-Arc grafy (CA) jsou oblouky na kružnici, jen IR zacyklené dokola.

Permutační grafy (P) jsou průnikové grafy úseček mezi dvěma rovnoběžnýma přímkama.

Funkční grafy (FUN) – máme spojité funkce na intervalu (třeba $(0, 1)$), protínám jejich grafy.

Úsečkové grafy (SEG) – úsečky v rovině.

Niťové grafy (STR) – křívky v rovině.

Budeme řesit, jak těžké je tyto třídy rozpoznávat. Velikost reprezentace se bude také řešit.

Perfektní graf je takový, jehož barevnost je rovna velikosti největší kliky a platí to pro všechny indukované podgrafy.

Dále budeme řešit kreslení a reprezentaci rovinných grafů.

Chordální graf – C_m není indukovaný podgraf pro $m \geq 4$.

2 Chordální grafy

Graf je ***chordální***, pokud C_k není indukovaný podgraf pro $k \geq 4$.

Pozorování 2 *Když je G chordální a udělám z něj $H = G + v$ takový, že sousedi vrcholu v jsou úplný podgraf, potom H je také chordální.*

Pozorování 3 *Když mám G a $U \subseteq V(G)$ je vrcholový řez a $G[U]$ je úplný podgraf, potom to řez rozdělí na G_1, G_2. Pokud $G_1 + U$ i $G_2 + U$ jsou chordální, potom i G je chordální.*

Důkaz:
Kružnice by musela procházet přes U, ale tam jsou alespoň 2 vrcholy, ty jsou spojené.

☻

Lemma 1 *Když G je chordální, potom $\forall$ minimální řezy indukuje úplný podgraf.*

Důkaz:
Nechť U je minimální řez, mám nějaké G_1, G_2 na různou stranu. Každý vrchol v řezu je potřeba, tedy z každého vrcholu vede hrana do každé komponenty souvislosti. Vede kružnice skrz ně, kdyby mezi těmito vrcholy nebyla hrana, vezmu nejkratší takovou kružnici, to musí indukovat kružnici, nemá vnitřek, má alespoň 4 vrcholy, musí mít hranu mezi těmito dvěma vrcholy v řezu.

Toto můžu udělat pro každé dva vrcholy.

☻

Vrchol grafu se nazývá ***simpliciální***, pokud jeho sousedi indukují úplný graf.

Věta 1 *$\forall G \neq \emptyset$ chordální graf obsahuje simpliciální vrchol.*

Důkaz:

Lemma 2 *Každý chordální graf je buď úplný a nebo má dva nesousední simpliciální vrcholy.*

Důkaz:
Indukcí. První krok – $n = 1$ – K_1, úplný.

Nechť máme tedy chordální graf G, ten má alespoň dva vrcholy. První možnost je, že je úplný, což je v pořádku.

Když úplný není, potom existují vrcholy x, y, $(x, y) \notin E(G)$. Ostatní vrcholy tvoří vrcholový řez, tedy existuje i nějaký minimální vrcholový řez U. Vezmu G_1 a G_2 nějaké komponenty i s U. Jak G_1, tak G_2 mají ostře méně vrcholů, než G, ty jsou podle indukčního předpokladu mají nějaký simpliciální vrchol mimo U.

Pokud G_1 je úplný, tak libovolný vrchol je simpliciální, vezmu nějaký, který není v U. Jinak máme alespoň 2 simpliciální vrcholy, které nejsou spojené hranou, nemohou proto ležet oba v U.

Tyto (alespoň 2) vrcholy jsou simpliciální i v G, protože přes U nenabere nové sousedy.

☻

Z toho už to jasně plyne.

☻

Důsledek 1 *Každý chordální graf má **PES** (Perfect Elimination Scheme) – uspořádání vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takové, že v_i je simpliciální v indukovaném grafu $G[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}]$.*

Důkaz:

Pozorování 4 *Každý indukovaný podgraf chordálního grafu je také chordální. Tedy, jsou dědičné na indukované podgrafy.*

Důkaz:
Vidět z definice.

☻

Indukcí tvoříme PES indukcí od v_n.

☻

PSI jsou užiteční při řešení optimalizačních úloh. Polynomiálně udělám tuto sekvenci, potom sestavuju a mám omezenou velikost věcí, na kterých pracuji. Jde to i v lineárním čase v počtu hran.

Algoritmus 1 (Barvení chordálních grafů):

Barvíme způsobem „first fit" – na každý simpliciální vrchol dám nejmenší číslo, které jde.

☺

Důkaz:
Určitě je to obarvení.

Představme si, že jsem musel použít k barev. Měl alespoň $k-1$ sousedů, s nimi tvoří K_k, určitě jsou tedy potřeba. Je tedy nejmenší.

☻

Mimo jiné mi našel také největší kliku v grafu.

Věta 2 *Chordální grafy jsou perfektní (barevnost je stejná jako klikovost, pro všechny indukované podgrafy).*

2.1 Odbočka o perfektních grafech

Každý minimální neperfektní graf je buď C_{2k+1} nebo $\overline{C_{2k+1}}$.

Existuje i slabší verze, ta tvrdí, že G je neperfektní $\Leftrightarrow$ $\overline{G}$ je neperfektní.

Barevnost, klikovost, nezávislost a poklytí klikami lze řešit polynomiálně přes lineární programování.

Algoritmus 2 (Nezávislá množina):

Vezmu PSa, hladově, pokud můžu přidat vrchol, tak ho tam přidám, ale jdu odzadu.

☺

Důkaz:
Každá největší tam má buď ten vrchol, nebo některý jeho soused. Můžu prohodit a neublížím si tím.

☻

Ale spoustu věcí polynomiální není – například minimální dominující množina (každý další vrchol je spojený alespoň s jedním vrcholu z této množiny).

Vezmu libovolný G, udělám v něm H, za každou hranu na ni navěsím trojúhelník, na celý původní dáme kliku. Když najdeme minimální dominující v H, tak můžeme z těch nových vrcholů nastěhovat „dovnitř“. Potom taky existuje také vrcholové pokrytí v G.

Takovým H se říká ***Split***-grafy (klika+nezávislá množina, nějaké hrany mezi nimi).

Clique-tree grafu G je strom T, jeho vrcholy jsou všechny maximální kliky co do inkluze grafu G. Hrany jsou tak, že $\forall v \in G$, když se podívám na $T\left[\{Q_i; v \in Q_i\}\right]$ je souvislý. Toto nemusí být jednoznačné (co se týče hran).

Věta 3 *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *G je chordální.*
- *G je průnikový graf podstromů ve stromě.*
- *G má clique-tree.*

Důkaz:
Druhé implikuje první. Vyznačím si nějaké podstromy, které průnikuji. Chci ukázat, že to, co vznikne, je chordální.

Předpokládejme, že máme indukovanou kružnici délky alespoň 4. Vezmu si ty vrcholy kružnice. Potom najdu v původním stromu kružnici.

Když je chordální, umíme udělat PSa a z toho uděláme clique-tree. Když je $G = K_n$, tak je to jednoduché. Dále tedy máme G, který má clique-tree. Přidáme simpliciální vrchol v_n. Podívám se na sousedy, ti tvoří kliku Q. Pokud je Q maximální, jen tuto maximální kliku zvětším, všechny hrany zůstanou stejné. Pokud nebyla maximální, byla obsažena v nějakém Q'. Připojím novou maximální kliku $Q \cup \{v_n\}$, tu k tomu připojím. Pro ty původní z Q se nic nezměnilo, v_n je jen v jednom.

Třetí implikuje druhé. Máme T, nechme ho jako nosný strom, pro každé u definujme $T\left[\{Q_i; u \in Q_i\}\right]$.

☻

3 Strovnatelné grafy

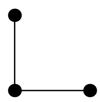
Grafy jsou ***srovnatelné***, právě když existuje uspořádání U na $V(G)$, $\forall u \neq v, (u,v) \in E(G) \Leftrightarrow (u,v) \in U \vee (v,u) \in U$.

Tranzitivní uzávěr orientovaného Hassenova diagramu.

Pozorování 5 *G je srovnatelné $\Leftrightarrow$ hrany je možno tranzitivně orientovat. (Když to vede po cestě jedním směrem, vede tím směrem i hrana.)*

Například, každý úplný graf je srovnatelný (lineární uspořádání), bipartitní, liché kružnice ale ne, doplňky ke kružnicím ne.

Pozorování 6 *Když mám vidličku, tak obě musí být orientované stejně, jinak by mezi vidličkou musela existovat hrana.*



Obrázek 1: Vidlička

Věta 4 *Srovnatelné grafy jsou perfektní.*

Důkaz:

Věta 5 *Nechť je třída grafů $\mathcal{G}$ uzavřená na podrgrafy a $\forall G \leq \mathcal{G}; \chi(G) = w(G)$, potom jsou všechny grafy této třídy perfektní.*

Srovnatelný graf je uzavřený na podgrafy.

Vezmeme nejmenší počet nezávislých množin (nejmenší počet nezávislých množin je velká stejně jako délka největšího řetězce). U tohodle máme každý řetězec taky úplný.

Ne však kazdý perfektní je srovnatelný.

☻

Věta 6 *K rozeznávání grafů se hodí:*

1. *Intervalové grafy jsou takové, které jsou chordální a jejich doplněk je srovnatelný.*

2. *Permutační jsou takové, které jsou srovnatelné a jejich doplňky také srovnatelné.*

3. *Funkční jsou ty, jejichž doplňky jsou srovnatelné.*

Důkaz:
Na 3) vezmu větší třídu – vezmu křivky natažené mezi dvěma rovnoběžnýma rovnoběžkama. Když mám dvě křivky, které se neprotínají, tak jedna to rozděluje na dvě oblasti, druhá musí být v jedné z nich, tedy je můžu porovnat.

Opačně, že doplňky srovnatelných jsou funkční. Vezmeme G, který je doplněk srovnatelného grafu a H je tento doplněk. Proto existuje částečné uspořádání U. To má dimenzi (minimální počet lineárních uspořádání, kde U jde získat jako průnik těchto lineárních uspořádání). Vezmeme k svislých přímek (kde k je ta dimenze), napíšeme tam ty lineární uspořádání. Ty věci se spojí a máme funkce. Pokud nejsou srovnatelné, musí se někde prohodit a tedy protnout. Naopak, jsou rovně, neprotnou se.

2) Doplněk permutačního grafu je opět permutační. Máme reprezentaci $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Pravá strana se vezme „pozpátku“ a ono to vyjde. Když to otočím, dva se protínaly, teď se neprotínají, a naopak.

Permutační jsou podmnožinou funkčních. Tedy jsou podmnožinou dolpňků srovnatelných, ale jejich doplňky jsou tedy podmnožinou srovnatelných. Taktéž doplňky permutačních jsou částí permutačních. Tedy, permutační jsou součástí průniků.

Opačně, máme graf G je srovnatelný a H je jeho doplněk, že je taky srovnatelný. Tedy, mezi každými dvěma vrcholy je buď „šipka“ za hranu nebo za nehranu. Sjednocení je tranzitivní orientace úplňáku, tedy lineární uspořádání. Budu si kreslit případy ,kdy jsou dva za sebou. Když jsou stejné, tak nezajímavé. Když jsou různé, tak jsem měl na začátku pozorování 6.

Vezmu první lineární uspořádání jako ten úplňák, co jsem právě dostal. Potom otočím šipky třeba u nehran, udělám totéž a dostanu druhé lineární uspořádání. Tyhle umístím na jednotlivé přímky a vyjde to (protože jsem to otočil jen u těch jedněch, tím dostanu buď permutační graf a nebo jeho doplněk, což je taky permutační graf a odpovídá těm hranám v G nebo v H).

1) Intervalové grafy jsou podmnožinou průniku. Nakreslím si přímku a na ni vrcholy jako konce intervalu. Každý interval je podcesta, tedy mám ten graf jako průnikový graf těchto cest, to je podmnožina průnikových grafů podstromů ve stromech, což jsou chordální grafy.

Druhé můžeme vzít, že doplňky intervalových jsou srovnatelné. No, ty se neprotnou, aby to mělo hranu, máme uspořádání.

Opačná implikace: Vezmeme graf G, který je chordální a jeho doplněk je srovnatelný. Protože je chordální, máme jeho klikový strom. Z něj se inspiruju a vezmu $Q_1, \ldots, Q_d$ maximální úplné podgrafy. Je doplněk srovnatelného grafu, takže existuje tranzitivní orientace doplňku G. Definujeme uspořádání: $Q_i < Q_j \Leftrightarrow \exists u \in Q_i, v \in Q_j; uv \in$ orientace doplňku G.

Určitě nemáme $Q_i < Q_i$. Nemůže se nám stát, že $Q_i < Q_j$ a $Q_j < Q_i$, u, u' nemůže být totéž a v, v' nemůže být totéž (jinak by byla hrana orientovaná „oběma“ směrama a nebo máme vidličku. Poslední případ, buď budu mít obousměrnou nehranu, nebo indukované C_4. Ještě potřebujeme tranzitivitu. Kdyby ten, přes který jdeme, měl stejný vrchol, přes který jdeme. Určitě mezi vnějšími existuje nehrana. Nechť tedy jsou zorientované opačně. To všechno musí být různé vrcholy. Potom zase rozebíráme případy, zakazujeme nehrany a hrany a vyjde nám zase něco, co není chordální.

Každé dvě kliky jsou tedy porovnatelné. Vrchol nemůže přeskočit kliku (když je v jedné, druhé, tak musí být i ve všech mezi tím). Dokážeme sporem, ta prostřední nemá u, ale musí mít nějaké v (jinak by to nebyl největší úplný podgraf), který není spojený s v. Orientace mezi u a v je špatně, protože u je na obou stranách.

Tedy, můžeme udělat intervaly podle těchto klik.

☻

3.1 Struktura srovnatelných grafů

Definujeme relaci $\Gamma \subseteq V^2 \times V^2$ které tvoří hrany, $ab\Gamma cd \Leftrightarrow ((a = c \wedge bd \notin E) \vee (b = d \wedge ac \notin E)) \wedge ab, cd \in E$.

Poté Γ^* je tranzitivní uzávěr Γ. Γ je reflexivní a symetrická. Tedy, Γ^* je ekvivalence. Ta rozkládá množinu na bloky, vždy orientace jedné hrany vynutí orientaci celého bloku (kvůli pozorování 6).

Pozorování 7 *Kdykoliv $xy \in \langle a, b\rangle_{G^*} \Rightarrow xy \in E$ (tedy, nestane se mi, že bych chtěl orientovat nehranu v G^*).*

Věta 7 *G je srovnatelné $\Leftrightarrow \forall ab \in E : \langle ab\rangle_{\Gamma^*}$ je antisymetrická (tedy, že nevynucuji, aby hrana byla orientovaná „oběma směry“). Tedy, teď už na ně koukám jako na hrany zase, ne dvojice hran.*

Důkaz:
Jestliže je srovnatelný, potom každý blok musí být antisymetrický. Je vidět z definice.

Opačně: Máme relaci $R \subseteq V \times V$. Řekneme o ní, že je ***senzitivní***, pokud kdykoliv $abR \wedge cd \in E$ t.ž. $ab\Gamma cd \Rightarrow cd \in R$. Řeknu o ní, že je ***úplná***, pokud je senzitivní a tranzitivní. Nazvu ji ***slušná***, pokud je antisymetrická (co se týče uspořádaných dvojic) a operuje jen na hranách grafu.

Mám $M \subseteq V \times V$, potom $\langle M\rangle_S$ je senzitivní uzávěr, $\langle M\rangle_T$ tranzitivní a $\langle M\rangle$ je úplný uzávěr.

Lemma 3

$$\langle M\rangle = \langle\langle M\rangle_S\rangle_T$$

Důkaz:
Určitě to obsahuje celé M. Určitě je to podmnožina toho, co chci, protože jsem přidával jen to, co jsem musel. To napravo je zřejmě tranzitivní. Chceme dokázat, že je senzitivní.

Napřed budeme předpokládat, že $\langle M\rangle$ je slušná, proto je také $\langle M\rangle_S$ slušná. Proto to musí vyjít i tranzitivně, protože by mi tam jinak zvolil opačné uspořádání.

☻

Lemma 4 *Pro každou hranu, jestliže $\langle ab\rangle_S$ je antisymetrická, potom je $\langle ab\rangle_S = \langle ab\rangle$.*

Důkaz:
Sporem, rozebere se, indukce podle délky rozebrání.

☻

Lemma 5 *Mám m bloků, potřebuju je sesadit tak, aby to sedělo, tedy ne všech 2^m možností je správně. Když budu mít M relaci, která je úplná a slušná a mám hranu $(xy),(y,x)\notin M$. $\langle M\cup\{xy\}\rangle$ je slušná relace. Tedy, mám něco už zorientovaného, když tam nějakou hranu nemám, tak ji tam můžu přidat jakkoliv, podívám se, co mi to vynutí a to vynucené bude v pořádku. To ale může změnit strukturu (tedy, dělám tranzitivní uzávěr).*

Tedy, tohle jde rozpoznávat v polynomiálním čase.

☻

Důkaz:
Vyvodí se z toho, že Lemma 3. Potom pro spor předpokládáme, že nastane problém a najdeme nejmenší cyklus, který by to rušil a zkrátil cyklus.

☻

4 Interval Filament

Je největší množina grafů, kde prochází klika a nezávislá množina v polynomiálním čase. Jsou to průnikové grafy kladných funkcí z intervalů.

Intervalové jsou zřejmě podmnožina tohoto.

Tětivové jsou podmnožinou tohoto, protože můžu kružnici na jednom místě „rozstřihnout" a rozbalit, vyjde něco takového.

Polygon-Circle grafy jsou takové, kde nacpu polygony dovnitř kružnice. Můžu opět rozstřihnout, budu nad tím mít „kopečky". Circle-Arc jsou podmnožinou těchto (každý konec intervalu bude vrchol, čím prochází interval, tam nasázím polygon).

Mějme třídu grafů $\mathcal{G}$ a vytvoříme novou třídu
$\mathcal{G}$-mixed $\{G = (V, E)\,; E = E_1 \dot\cup E_2; \big(V, E^1\big) \in \mathcal{G} \wedge \vec{E_2}$ tranzitivní orientace ; $\forall x, y, z \in V; \Big(xy \in \vec{E_2} \wedge yz \in E_1\Big) \Rightarrow xz \in E_1\}$.

Věta 8 *CO-IFA = CO-INT-mixed*

Důkaz:
Když vezmu IFA, tak rozdělím intervaly na ty, co jsou „vedle" sebe a v sobě. Rozeberu případy, to, co nesedí, přijde do E_2.

Opačně, mám CO-INT-mix. Tedy, $\big(V, E^1\big)$ je doplněk intervalováhe grafu. Jednoduše seberu ty hrany, co jsou v E_2 a ty budou „v sobě". Nad intervalama budeme mít půlkružnice. Potom můžu upravovat, posouvat intervaly aby to vyšlo. Nakonec budu zvedat obloučky.

☻

4.1 Algoritmy

Algoritmus 3 (Poznání chordálních grafů):

Dnes budeme mít PES inverzní, tedy, že vrchol v_i je simpliciální ve vrcholech $G\,[v_i, \ldots, v_n]$. Vstupem bude graf G. Na začátku pro každé $u \in V$ inicializuje $w(u) = \emptyset$, potom $T = \emptyset$. Potom jde od n k jedné. Nechť u je maximální prvek $V \backslash T$ v lexikografickém uspořádání podle $w(u)$. Potom vezmeme $v_i := u$. Vezmeme všechny hrany které vedou do neseřazeného zbytku, do souseda přidám sebe do jeho $w(u)$. Do T přidáme u.

Když je to chordální, dostaneme PESa. Předpokládejme, že to vydalo v_i, který není simpliciální, tedy napravo od něj jsou v_k a v_j, které nejsou spojené hranou. Vezmeme v_i největší možné, v_j největší možné pro dané v_i. Nemohly mít stejná slova, protože nejsou spojené. Musel existovat vrchol lexikografický větší než v_i, ten musel být spojen s v_k. Pak tam najdu ještě nějaké dvě nehrany, tedy máme nějakou C_4, tedy není chordální.

Při implementaci nepotřebuji množiny, ale můžu mít jen nějaké kvaziuspořádání. Tohle jde udělat rychle.

Je potřeba zkontrolovat psa. Stačí kontrolovat jen toho nejmenšího ze sousedů (ten už si to překontroloval u svých sousedů sám).

☺

Věta 9 *Pokud je maximální vážená klika polynomiální na nějaké třídě grafů $\mathcal{G}$, poté je také polynomiální v $\mathcal{G}$-mixed.*

Algoritmus 4 (Maximální nezávislá v IFA):

Předpokládám, že už mám rozdělení na orientaci (to je těžký problém). Přidám si ještě vrchol, do kterého vede vše a je nulový.

Pro vrchol vezmu množinu W_i takovou, kde je sám a všechno, z čeho sem vede šipka v E_2. Budu konstruovat C_i tak, aby to byla vážená klika v $G[W_i]$. Nakonec najdu výsledek v tom posledním přidaném vrcholu.

Indukčně, přišlo mi zleva všechny menší C_i. Sestavím z těch sousedů a přidám se k té nejlepší.

☺

5 Reprezentace rovinných grafů jako dotykové grafy úseček

Existuje něco jako Fáryho nakreslení, to je takové, že okolo vrcholů se dají nakreslit kružnice, které se dotýkají právě když jsou vrcholy spojené hranou. Dá se ϵ-ovým nafouknutím zařídit, aby to byl průnikový graf kružnic. Dá se upravit také tak, aby to byl průnikový graf křivek, kdy mají vždy nejvýše jeden průnik. Dá se i průniky úseček, bude dokázáno v letním semestru. Je hypotéza, že to jde udělat jen tak, že jsou úsečky jen ve 4 směrech (a nedotýkají se rovnoběžné).

Věta 10 *Každý rovinný graf lze reprezentovat jako dotykový graf trojúhelníků. Všechny tyto trojúhelníky budou rovnoramenné a s rovnoběžnými základnami.*

Hypotéza je, že by mohli být i rovnostranné, ale muselo by to být průnikové, ne dotykové.

Věta 11 *Rovinné bipartitní jsou podmnožinou 2-dir (průnikové úseček ve 2 směrech).*

Věta 12 *Rovinné bipartitní jsou dotykové grafy svislých a vodorovných úseček.*

5.1 st-číslování

Mám graf G a chci ho nakreslit do roviny. Zorientuji si ho tak, aby měl právě jeden zdroj a právě jeden stok. Chci ho nakreslit tak, aby všechny hrany byly orientované odsdola nahoru (podle y souřadnice). Můžu potřebovat ohnuté, ale budou y-monotónní.

st-numbering je ona orientace a nakreslení do roviny.

Lemma 6 *Rovinný* 2*-souvislý graf má* st*-numbering.*

Důkaz:
Indukcí podle počtu hran. Napřed ho nakreslíme do roviny, je rovinný. Potom už budu s tím jen hýbat, deformovat, ale bude to stejné nakreslení. Vezmu vnější stěnu – protože je 2-souvislý, tak se na žádné stěně nic neopakuje. Jeden z vnějších vrcholů nakreslím úplně dolů, jeden nahoru a zorientuji vnější hrany.

Dále pokračujeme podobně jako v ušatém lemmatu. Když přidávám ucho, tak ji můžu dát ozdola nahorhu, všechny stěny můžu udržovat stejně – mají jeden vrchol až nahoře a jeden až dole. Přípojky bude nový lokální zdroj a stok (buď jdou oba do nové, nebo se rozdělí mezi starou a novou stěnu, druhé dva se doplní z původních).

Rovinnost to zachovává, uši trhám z původního nakreslení.

☻

Když vezmu st-numbering, přidám si (pokud tam už není) hranu z s do t (ze zdroje do stoku) a očísluju tak, aby to šlo vždy od menšího k většímu číslu. Vezmu duální graf, hrany orientuji zleva doprava. Jedinou výjimku tvoří hrana (s, t), ta ji má doprava. Duál je také se stokem a zdrojem (oba ve vnější stěně rozdělené tou (s, t) hraně). Je to něco jako st-numbering, jen nemusejí být vždy nakreslené zleva doprava (asi by to šlo dokázat, ale není potřeba). Druhý zdroj ani stok to nemá, jinak by v původním byl cyklus.

Pozorování 8 *Duální graf je acyklický a má právě jeden zdroj a právě jeden stok.*

Důkaz:
Že je právě jeden zdroj a stok je dokázáno, ještě by tam mohla být kružnice. Omezuje oblast, všechny šipky vedou ven (nebo dovnitř). Tak někde uvnitř

musí být zdroj. Ale ten cyklus nemůže určitě být na s ani t, protože to není na cyklu.

☻

Můžu to topologicky očíslovat.

Udělám si čtverečkovou síť, počet linek je tolik, kolik je původních vrcholů, počet sloupečků, kolik je vrcholů v duálu. V této tabulce udělám čáru na každém řádku podle čísla vrcholu. Ta bude začínat na stěně vlevo od tohoto vrcholu a končit na stěně doprava od něho. Analogicky v duálu pro sloupečky.

Tyto čáry se nikdy nebudou protínat, jen se budou dotýkat. Je to tedy dotyková reprezentace nějakého grafu. Každá hrana původního grafu jsou obdélníky, obdobně v duálu (tam můžou bejt násobné hrany, ale dostanu víc obdélníků).

Tomu se někdy říká viditelnostní reprezentace. Vrcholy jsou vodorovné úsečky, hranou jsou spojeny, pokud existuje oblast, ve které se svisle vidí.

Tyhle obdélníčky budou fungovat, lze vykoukat z okolí vrcholů a z toho, že se nic neprotíná.

Toto je reprezentace bipartitního grafu vrcholy + stěny.

Nyní, nechť G je bipartitní rovinný graf. Můžu přidávat nové vrcholy a hrany tak, aby byla quadrangulaci (rozčtverečkování). G bude indukovaný podgraf toho, co vzniklo. Při tom taky zařídím, aby ten graf byl dvousouvislý. Potom spojím v každém čtyřúhelníku vrcholy jednoho druhu (třeba modré). Poté smažu všechny červené vrcholy. Červené jsou nové stěny, modré jsou vrcholy. Přebytečné vrcholy můžu zahodit.

5.2 Kanonické očíslování

Mějme rovinnou triangulaci, vnější trojúhelník je a, b, c. ***Kanonické očíslování*** vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_n$ je takové, že $v_1 = a, v_2 = b, v_n = c$. Kdykoliv se podívám na graf $G[v_1, v_2, \dots, v_k]$, tak je 2-souvislý. Ty, které jsou $i \leq k$ jsou uvnitř tohoto grafu, větší venku. Vrchol v_{k+1} má všechny sousedy na hranici a ty tvoří interval.

Z toho plyne v_{k+1} leží vně $G[v_1, \dots v_k]$, má alespoň dva sousedy na hranici a tvoří interval (nebyla by to triangulace). Přilehlé trojúhelníky jsou prázdné.

Lemma 7 *Každá rovinná triangulace má kanonické očíslování.*

Důkaz:
Budeme odshora odebírat vrcholy, vrchol c bude odebrán jako první.

Když máme něco odebrané, tak máme pseudotriangulaci (uvnitř je natriangulováno). Máme dvousouvislou hranici. Všichni sousedi tvoří interval (pro vrchol na hranici), protože je to vytriangulované. Ale při odebrání bych mohl ztratit dvousouvislost – pokud z něho vede hrana do vrcholu na vnější stěně (diagonála) – tak tím čepičku uříznu.

Takto si můžu vyznačit všechny diagonály (ty dělají problém), délku diagonály budu měřit počtem přeskočených vrcholů z horní hranice. Diagonály se nekříží. Můžu vzít tu nejkratší, cokoliv nad ní je vhodný vrchol, protože je to diagonála, je tam aspoň jeden takový.

Když takle odebírám vrcholy, tak do levého souseda udělám modrou šipku, do pravého červenou a z libovolného vnitřního vrcholu dám zelenou nahoru. Pokud neberu v úvahu vnější hrany, tak dostanu orientovanou kostru do každého vrcholu.

Z každého vrcholu vychází právě jedna modrá nebo červená a to do nižšího čísla. U zeleného – někdy musí vrchol přestat být na hranici, a to do většího. Tedy vše musí vždy téct do krajního vrcholu.

Barva se ve vrcholu stéká, v každém vrcholu „překříží“ obě zbylé a vyleze z druhé strany.

☻

Věta 13 *Rovinné grafy jsou dotykové grafy rovnoramenných trojúhelníků s rovnoběžnými základnami.*

Vezmu rovinný graf. Každý je indukovaný podgraf triangulace. Tedy mi stačí umět reprezentovat tu triangulaci a něco zrušit. Kanonicky ji očíslujeme. Uděláme tolik vodorovných čar, kolik je vrcholů v tomto případě. Na těchto vodorovných čarách budou základny. U každého vrcholu si najdu maximálního souseda a na té bude mít špičku. Tím postupně doplňuju trojúhelníky od nejmenších. Vlevo se bude dotyk s tím, kde má červenou šipkou, vpravo s modrou a dole na ní končí zelení. Zelení tam končí najednou – zmizí z horní hranice.

Když povolím, aby byly byly průnikové ale rovnoramenné, tak se to neví.

6 String grafy

Poznávání průnikových grafů křivek je NP-těžké.

Podtřída 1-***string*** je taková, že se každé dvě křivky protínají maximálně v 1 bodě, nesmějí se dotýkat.

Outer-String jsou takové, že je oblast, všechny mají jeden konec na hranici, zbytek mají uvnitř.

Zatočené fun grafy – křivky natažené mezi dvěma soustřednými kružnicemi.

CO-string (constrained) je něco jako Outer-string, ale na vnější hranici musí být v tom pořadí, v jakém mají očíslované vrcholy. Například doplněk kružnice není součástí tohoto (nesmějí se potkat sousední). Lze dokázat indukcí podle n. Pro $n = 4$ se mají křížit ty, které se nesmějí křížit ($1 - 3$ oddělí od sebe $2, 4$, ty už se nesmějí potkat).

V indukčním kroku – zkrátím $n + 1$ křivku tak, aby se poslední, s čím se protínala, protínala jen jednou. Když zkrátím ještě o kousek, tak se změní graf. Pokud to byl ob-soused, potom to byl problém pro o n vrcholech. Obdobně můžeme oříznout na menší a menší, tak vždycky narazím.

6.1 NP-těžkost

Převedeme na to 3-SAT. Máme formuli Φ. Ten budeme reprezentovat takto: Každá proměnná bude vrchol (ať pozitivní nebo negativní), za každou klauzuli bude jeden vrchol, spojím hranou, pokud klauzule obsahuje vrchol. Tohle se jmenuje G_Φ.

Budeme brát jen formule, které mají tento graf rovinný a 3-souvislý (každá se na toto dá převést) a každá proměnná bude nejvýše u 4 klauzulích.

Dokážeme, že lze vytvořit $G(\Phi)$ (jiný graf), který bude stringový právě když je Φ splnitelná.

D_Φ bude rovinné reklineární (hrany jsou lomené čáry, které jsou jen vodorovné nebo svislé) nakreslení. Z toho nějak udělám gadgety, pomocí nich udělám $G(\Phi)$.

Ke každému vrcholu v D_Φ přidám oblast, kam přijde reprezentace gadgetů pomocí stringů, okolo hran cestičky.

K proměnné udělám kružnici s 16 vrcholy, každý druhý vrchol důležitý, každá připojená klauzule má jeden „levý“ a jeden „pravý“ vrchol. Tohle lze reprezentovat 16 stringama „dokola“, jako je ta kružnice, jde nakreslit po směru nebo proti směru. To bude udávat hodnotu proměnné. Ty nedůležité vrcholy zaručují, že se neprohází (udržují pořadí).

Od každé proměnné ke klauzuli povedou 2 cestičky, která má tolik vrcholů, kolik úseků má ta hrana v D_Φ – jedna levá a jedna pravá. Levá cesta je napojená na levý vrchol téhle klauzule na proměnné, pravá na pravý.

Když proměnná dává pravdivou hodnotu, tak přijdou správným směrem, když opačným, tak bude nepravdivá. Podle toho si klauzule pojmenuje cesty buď stejně, nebo opačně, pokud má proměnnou negovanou.

Stringová reprezentace řetízků je taky „cestička“ z malých stringů, nemohou se tedy překřížit.

Aby se nedělaly problémy při překřížení cestiček k různým klauzulím, připojím přes propojku s $K_{2,2}$.

`TODO: Obrázek`

Protože kružnice dělí rovinu na 2 kusy, je 3-souvislej, tak můžu předpokládat, že vnitřky proměnných jsou prázdné, můžu je zcvrknout, cestičky obdobně, klauzule taky. Dostanu zpětně D_Φ. To je ale 3-souvislé, proto to má jednoznačné nakreslení. To se přenese i na původní „nafouknutý" graf.

Klauzule bude 12-cyklus. Venku zase přípojky, každá spojená s jedním mezispojovátkem uvnitř, ten s vnitřním vrcholem. Vnitřních vrcholů je 6 a mají doplněk 6-cyklu. Když to přijde false, tak uvnitř chci nareprezentovat doplněk C_6 pomocí CO-string, to nejde.

Kdykoliv přijde něco jiného, tak už se to dá nakreslit.

Pokud to jde kreslit, jde to i s úsečkami (SEG). Obdobně lze dokázat, že je NP-těžké poznávat 2-dir, jen klauzule mají jiný gadget.

6.2 2-dir

Máme úsečky dvou směrů, protínají se jen ty různěsměrné.

Proměnná bude podobná. Klauzule má rámeček, dovnitř vedou zase drátky.

Boxicita grafu G je nejmenší k takové, že G je průnikový graf k-dimenzionálních kvádrů. Např. pokud je to 1, tak to je intervalové grafy.

7 Kruhy

Máme průnikové grafy kruhů. Lze brát i dotykové grafy (anglicky disc).

Dotykové grafy kruhů jsou rovinné grafy, tedy jsou polynomiálně reprezentovatelné (z kruhů na rovinnost je jasné).

Pokud omezíme na jednotkovou velikost, tak jak průnikové, tak dotykové jsou NP-těžké. Zase přes formule.

Průnikové libovolných grafů je opět NP-těžké.

Pseudodisk je jednoduchá uzavřená jordanovská křivka a celý vnitřek. Protínají se tak, že tam jsou právě dva průsečíky a je to souvislý kus mezi nimi (nesmí se jen třeba 2* dotknout). Rozpoznávat tohle je NP-úplné.

Zase budeme převádět z CNF. Informaci přenášíme žebříčkem (špruslíky tam buď jsou nebo ne). Ty šprusle jsou kvůli tomu, aby se to při otočení dostalo správným směrem (je to protnuté podobně, jako u křivek).

Převádíme na not-all-equal splnitelnost, ale to není NP-úplné na rovinné formule, použijeme tedy libovolné formule. Křížení budeme dělat pomocí špruslí, zpevní se dalšími žebříky okolo. Kdyby to nebylo 3-souvislé, tak přidáme zase zpevňovátka.

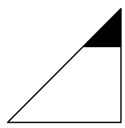
Obdobně se dá dokázat pro konvexní mnohoúhelník. Potom i to, co sestavím stejnolehlými mnohoúhelníky, je NP-úplné.

8 Tolerant graph

Máme intervaly a kladná čísla. Hrana je právě tehdy, pokud velikost průniku je alespoň (součet—součin—cokoliv—maximum) z čísel těch vrcholů.

Věta 14 *Max-tolerant grafy jsou právě průnikové grafy stejnolehlých trojúhelníků.*

Důkaz:
Když mám Max-tolerant, tak nad každý interval dám trojúhelník. Potom ho uříznu ve výšce odpovídající toleranci a nechám jen ten vršek. To se už vykouká.



Obrázek 2: Trojúhelníčky

Opačně natáhneme čáru dole daleko pod nimi, natáhnu, funguje to přesně opačně.

☻

Toto rozpoznávat je těžké, protože to jsou pseudodisky, jde to upravit.

Věta 15 *Maximální klika v max-tolerančních grafech je polynomiální.*

Důkaz:

Lemma 8 *Máme 2 disjunktní konvexní polygony P, Q. Pro ně existuje oddělující přímka rovnoběžná se stranou jednoho z nich.*

Důkaz:
Vezmu a šoupnu přímku do vrcholu, pootočím a kousek uhnu zpět.

☻

Mějme reprezentaci a nějakou maximální kliku co do inkluze. Vezeme z ní nejvyšší základnu, nejvyšší v jiném směru, etc.

Mějme množinu $Q(a, b, c)$ jsou všechny trojúhelníky, které mají neprázdný průnik se všemi třemi těmito stranami a, b, c. Tvrdíme, že to se rovná Q (tedy, celé té klice). To, že klikatý je v této množinou dokážu tak, že s těmi trojúhelníky musí mít, a tahle stěna je nejvíc dovnitř, musí to vést tam (má tu správnou stranu někde dál). Také dokážeme, že $Q(a, b, c)$ je úplný. Pokud se dva neprotínají, tak jsou oddělené přímkou rovnoběžnou s nějakou stranou. Tedy, obsahuje Q, je úplný podgraf, je Q je maximální, tedy to musí být přímo ono.

Tedy, G má $O(n^3)$ maximálních klik.

Existují algoritmy na nalezení všech maximálních klik co do inkluze.

Tento odhad je těsný, těch klik opravdu může existovat tolik.

☻

Mějme P konvexní polygon. Potom P_{hom} je průniková reprezentace stejnolehlých P. Vždy to jsou pseudodiskové grafy, jsou NP-těžké rozpoznat.

Věta 16 *Nechť P k-úhelník, potom P_{hom} má $O(n^k)$ maximálních klik.*

Důkaz:
Podobně, ale beru nějakou „dolní obálku“ – které strany lze protnout, když druhý dám níž.

☻

Věta 17 *Rozpoznávání průnikových grafů úseček a rozpoznávání konvexních obrazců je v $PSPACE$.*

`TODO: Tohle nějak skoro chybí to o tom, že stringy nejdou hádat klasickým způsobem, že uhodnu reprezentaci` Neví se, jestli je to v NP. Reprezentace může být popsána koncovými body úseček, rovnice přímek a nějaké délky, nebo seznamy, které protíná. Nebo lze popsat kombinatorické uložení přímek. Potom je ale problém, jestli to jde narovnat na přímky, to je ale NP-těžké.

U uhádnutí koncových bodů to nemusí být polynomiální, mohou být daleko.

Věta 18 *Máme polynomy $P_1, \ldots, P_n$, chceme rozhodnout, zda je nějaké $x_1, \ldots, x_m$ takové, že některé dané polynomy jsou kladné a některé jsou nezáporné. Toto je v $PSPACE$.*

Začneme na konvexních množinách. Mám graf, každý vrchol toho grafu budu reprezentovat jako konvexní množinu. Aproximuji konvexním mnohoúhelníkem. To jde, můžu do každého průniku dát bod, udělat konvexní obal. Stačí nám pro reprezentaci souřadnice vrcholů.

Kdykoliv se mi neprotínají, máme přímku, co je odděluje. Máme nějaká znamínka pro každý bod, kladná na jedné straně od přímky, záporné na druhé. Tohle můžu zařídit pro všechny.

8.1 PC-grafy

Polygon-Circle grafy – průnikáče polygonů vepsaných do kružnice.

Když budeme reprezentovat graf jako PC, tak ***zubatost*** je nejmenší počet vrcholů, kolik má největší polygon v reprezentaci.

k-PC-graf je takový, který má polygony maximálně k vrcholů.

Kolik je potřeba vrcholů na získání zubatosti k? Odhad je na $n - \log n + \delta \cdot \log n$.

Rozpoznávání je v NP – určitě stačí $(n-1) \cdot n$ vrcholů.

Lemma 9
$$cor_{PC}(n) \geq n - \log n - \log\log n + k$$
pro nekonečně mnoho n.

Důkaz:
Máme dvě množiny vrcholů, jedna malá, druhá velká a potom žije jeden samostatný vrchol. Ten jeden vrchol bude hodně zubatý. Do malé množiny dáme všechny hrany, do velké žádné, do tamtoho vrcholu do všech ostatních.

Těch ve velké je tolik, aby každý byl indexovaný právě polovinou vrcholů té malé. Potom spojím každý z velké s „jeho“ z malé.

Ta zubatost už vyjde.

☻

Lemma 10 *Pro každé $c < 1 \exists n_0$ že pro všechny PC-grafy s $n \geq n_0$ vrcholy existuje reprezentace s polygony $\leq n - c \cdot \log n$.*

Důkaz:
Vezmeme hladově minimální reprezentaci (zub, který nepotřebujeme, vyhodíme).

Když nejde co vyhazovat, tak se buď musí moc protínat, nebo mají rozdílné sousedy.

☻

Věta 19 *Rozpoznávání k-PC grafů je NP-úplné pro $k > 2$.*

Důkaz:
Když máme bipartitní graf, kde jedna partita má samý vrcholy stupně 3, tak chceme, aby byly každý vrchol v druhé partitě dostal jednu ze tří barev tak, aby každý v první viděl všechny 3 barvy. To je NP-těžké.

To se dá udělat pomocí reprezentace – dáme tam C_6, barvy ob jeden vrchol. Pomocí gadgetů to donutím, aby žilo na správném místě. Vždycky trojůhelníček pro vrchol jedné partity, ta C_6 blokuje, aby ty druhé nevylézaly ven z jednobarevné oblasti.

☻

Vlastní intervalový graf je takový, kde jeden interval nesmí obsahovat celý jiný.

V tomhle povolíme, aby d-dir grafy mohly protínat i ty, které jsou stejně směrované.

Chceme algoritmus pro nezávislou množinu velikosti k v d-dir v čase $f(k, d) \cdot n^{O(1)}$.

Nezávislá množina je NP-úplná pro 2-dir.

Pro obecné grafy neexistuje takto dobrý algoritmus, pokud něco nezdegeneruje. V intervalových grafech lze řešit v lineárním čase.

Algoritmus bude robustní – buď dá množinu, nebo řekne, že není nebo řekne, že vstup není d-dir.

Lemma 11 *Máme graf G, u, v jsou jeho vrcholy. Uzavřené okolí jednoho je podmnožina uzavřeného okolí je druhého. Potom můžu ten s větším okolím beztrestně zahodit a počítat ve zbytku.*

Důkaz:
Když to obsahovalo ten větší, můžu ho vyměnit za menší, oba tam nemohou být, jsou to uzavřená okolí.

☻

Graf G je ***redukovaný***, pokud tam žádná taková dvojice vrcholů není. Redukovat graf umíme v $O(m \cdot n)$.

Lemma 12 *Pokud máme 2-dir graf, potom je okolí jednoho vrcholu intervalový.*

Důkaz:
Ořežu ty věci, co vedou do stran, zbydou intervaly stejně směrované a nebo bodové z těch kolmých.

☻

Lemma 13 *Pokud G je d-dir reprezentace redukovaného grafu, pokud má alespoň $((k-1)(d-1)+1)\cdot d(k-1)^2$, pak buď existuje k paralelních úseček na různých přímkách, nebo existuje přímka, na které leží k neprotínajících se úseček.*

Důkaz:
Tohle jde utlouct holubníkem.

☻

Algoritmus 5:

Napřed zredukujeme. Pokud zbylo alespoň $2k^2(k^2-1)^2$, potom spočítáme matici sousednosti, vyzkoušíme každou podmnožinu velikosti k.

Najde největší nezávislou v G' pro kazdé sousedství každého vrcholu.

☺

Lemma 14 *Nechť R_G je d-dir reprezentace redukovaného grafu. d_v je směr vrcholu v, $G' = reduceG[N(v)]$. Potom G' obsahuje max. dva segmenty ve směru d_v.*

Vše funguje tak, že když má dost vrcholů, tak hrubou silou budeme hledat, když najde, tak OK, když nenajde, tak konec, protože je špatný graf.

9 Barvení CA grafů

CA (Circle Arc) grafy, je to NP-úplné.

Existuje problém disjunktních cest – máme několik spotřebičů a zdrojů, hledáme tak, aby se nepotkaly. To je NP-úplné i pro acyklické a $G+H$ eulerovské (když přidám zpátky hrany ze stoku do příslušného zdroje).

Dáme vrcholy z grafu $G + H$ na kolečko, nataháme hrany, přidáme ještě 0, pak spojuju vrcholy, hrany G nepokrývají nulu, z H naopak ano. Stejná barva se dá těm, které se jen potkávají ve vrcholu, ale nepřekrývají.

U intervalového je NP-úplné i předbarvení (pár barev nastavím, potom se ptám, jestli lze doplnit). Pomocí toho lze barvi circle-arc graf (rozstříhneme, předbarvíme, aby byly stejné).

Obdobně, když máme tětivové grafy, tak lze převést také (když mám obloučky, můžu nadělat tětivy). Když by to nestačilo, můžu jich tam přidat víc. Aby byly stejně barevné, tak tam nacpu kličku (na ten roh) a donutím je mít stejnou barvu.

10 Kreslení celočíselně

Budeme chtít nakreslit rovinný graf s tím, že máme celočíselné souřadnice a rovné části.

Lze nakreslit takovou tu 3-barevnou triangulaci. Každý vrchol bude mít souřadnice (počítá se počet vrcholů v oblasti definovanou cestou do okrajových vrcholů).

Kdybychom si vzali trojúhelníčkovou síť (místo čtverečkové), můžu to podle toho do toho kreslit. To jde otočit na pravoúhlý trojúhelník.

Tvrzení 1 *Žádné dvě hrany se v tomto neprotínají.*

Důkaz:
U všech vrcholů se zachová stejné pořadí vycházejících vrcholů. Kvůli triangulaci je ve vějířku hrany mezi sousedy, část vede na jednu stranu vějíře, část na druhou. Nebo se dá dokázat indukcí od spodu.

Poté se dokáže, že se nic neprotíná. Kdyby se něco protínalo, tak se musí někde změnit pořadí vycházejících hran.

☻

11 Obdélníky

Máme dvě množiny obdélníků v rovině. Oblast dolů a/nebo doprava nazvu $BR(a)$ pro obdélník a a podobně. Řekneme, že $a_1 <_R a_2 \Leftrightarrow a_1 \cap BR(a_2) \neq \emptyset$. $b_1 <_L b_2 \Leftrightarrow b_1 \wedge BL(b_2) \neq \emptyset$.

Tvrdíme, že obě relace jsou acyklické, antireflexivní a antisymetrické.

K tomu můžu udělat topologické uspořádání. Potom se mi nestane, že bych našel $b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3$, tak že bych dostal kříž z jedniček uprostřed s nulou a to dokonce i s mezerou. Tedy, jsou to průnikáče 2-DIR.

12 Perfektní a skoro grafy

To jsou takové, kde klikovost je rovna barevnosti a je to pro všechny podgrafy. Je to hezké u tříd, které jsou omezené na podgrafy – stačí dokázat že klikovost je rovna barevnosti pro každý.

Skoro-perfektní budeme říkat, že je shora omezená nějakou funkcí klikovosti.

Chordální jsou perfektní. Intervalové také.

Permutační a Funkční. Comparability-grafy jsou perfektní, funkční tedy jsou také perfekční.

CA, CIR jsou skoro-perfektní.

String a úsečky se zatím nevědí.

12.1 Polygon-circle

Dokážeme, že $\chi \leq 50 \cdot 2^{\omega}$.

Ty si lze také reprezentovat jako intervaly a ke každému množinu bodů, kde jsou i krajní. To odpovídá „rozstřižení“ kružnice. Hrana existuje, pokud alternují (tedy, je nějaký jednoho mezi dvěma druhého).

Označme si x_0 vrchol, který má svůj levý vrchol nejvíce vlevo.

Lemma 15 *Pokud lze rozdělit na hladiny/partity zleva doprava, kde každá lze obarvit k barvami, potom barevnost celku je nejvýše $2k$.*

Lemma 16 *Máme vrchol $u \in V_i, U \subseteq V_i, I_u \subseteq \bigcap_{x \in U} I_i \Rightarrow \exists z \in V_{i-1} \forall x \in \{u\} \cup U; (xz) \in E(G)$.*

Lemma 17 *Nechť A, B jsou množiny intervalů. Dále nechť platí:*

- $|A| = 2m - 1$
- $\forall x, y \in A; x \cap y \neq \emptyset$
- $\forall x \neq y \in B; x \cap y = \emptyset$
- $\forall a \in A \exists b_1 \neq b_2; b_1, b_2 \subseteq a$

Potom $\exists A' \subseteq A, |A'| = m, \exists b \in B; b \subseteq \bigcap_{a \in A'} a$

13 Velikost reprezentace segmentových grafů

Je to určitě v $PSPACE$, neví se, jestli je v NP – konce mohou být velké. Dá se naklánět postupně víc a víc, přidáváním nových přímek – a ono se to bude rozlézat více a více doprava.

Lemma 18 (Order-forcing) *Pro každou reprezentaci R grafu G existuje graf G', který má nejvýše kvadraticky vrcholů, že pro každou reprezentaci R' existuje homeomorfizmus, který zobrazí na R.*

Tedy, každá reprezentace se dá vynutit „přilepením“ k papíru a vyztužením dalšími vrcholy a hranami.

Tedy, jsou grafy, které mají exponenciálně veliký zápis.

Použijeme problém strict-ineq. Máme nějaké polynomy, hledáme proměnné tak, aby všechny polynomy byly kladné. Toto je NP-těžké, je v $PSPACE$. Pomocí toho vyřešíme rozpoznání segmentových.

Vyvěštíme pseudo-segmentovou reprezentaci, máme problém, jestli jdou natáhnout.