Rozklad výrazů obsahujících $a-b$, $b-c$, $c-a$

Vít „Vejtek“ Musil

Abstrakt. Příspěvek obsahuje sadu logicky navazujících příkladů, jejichž cílem je ukázat jednoduchost a sílu několika elementárních algebraických obratů.

Fundamentální vlastností čísel $a-b$, $b-c$ a $c-a$ je to, že jejich součet je nula:

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0.$$

Stejně tak platí, že pokud nějaká reálná čísla x, y, z dávají součet nula, můžeme najít čísla a, b a c splňující

$$x=a-b \quad y=b-c \quad z=c-a.$$

Vskutku, stačí vzít $a=0$, $b=-x$ a $c=z$. Jistě však čísla a, b, c nejsou určena jednoznačně – přičteme-li ke každému z nich stejnou konstantu, nová trojice splňuje tytéž rovnosti jako a, b a c.

Často se lze setkat s výrazy typu

$$(a-b)P(a,b,c)+(b-c)Q(a,b,c)+(c-a)R(a,b,c),$$

kde P, Q, R jsou polynomy nebo racionální funkce, a nezřídka mají tyto výrazy zajímavé rozklady na součin. Metoda pro jejich získání je velmi snadná, prostě položíme $c-a=-(a-b)-(b-c)$ a vytkneme členy obsahující zvlášť $a-b$ a $b-c$.

Následující příklad by nás měl přesvědčit, že jde o nástroj značně univerzální.

Příklad. Rozložte $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ a najděte nutnou a postačující podmínku pro a, b, c, aby platilo

$$a^2b+b^2c+c^2a=ab^2+bc^2+ca^2.$$

Řešení. Nahraďme $c-a$ výrazem $-(a-b)-(b-c)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) &= a^2(b-c)+c^2(a-b)+b^2\big(-(a-b)-(b-c)\big)\\ &= (a-b)(c^2-b^2)+(b-c)(a^2-b^2)\\ &= (a-b)(c-b)(c+b)+(b-c)(a-b)(a+b)\\ &= (a-b)(c-b)\big(c+b-(a+b)\big)\\ &= -(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

Odtud speciálně plyne, že $a^2b+b^2c+c^2a=ab^2+bc^2+ca^2$ právě tehdy, když jsou dvě z čísel a, b, c stejná.

Není-li řečeno jinak, jsou a, b, c vždy reálná čísla.

Příklad 1. Rozložte $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ a najděte všechny trojice a, b, c, pro které je tento výraz nulový.

Příklad 2. Rozložte

$$(a-b)(a^2+b^2-c^2)c^2+(b-c)(b^2+c^2-a^2)a^2+(c-a)(c^2+a^2-b^2)b^2.$$

Příklad 3. Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b, c splňující $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$ platí

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=-\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{c-a}{c+a}.$$

Příklad 4. Dokažte, že pro všechna po dvou různá reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a+c}{a-c}+\frac{b+c}{b-c}\cdot\frac{b+a}{b-a}+\frac{c+a}{c-a}\cdot\frac{c+b}{c-b}=1.$$

Příklad 5. Dokažte, že pro všechna po dvou různá reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

Příklad 6. Dokažte pro všechna po dvou různá reálná čísla a, b, c nerovnost

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2.$$

Příklad 7. Dokažte, že pro všechna po dvou různá reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}\neq 0.$$

Příklad 8. Dokažte pro všechna čísla a, b, c rovnost

$$(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5=5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Příklad 9. Rozložte $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3$ a najděte všechny trojice a, b, c, pro které je tento výraz nulový.

Příklad 10. Reálná čísla a, b, c splňují

$$(b-c)\sqrt[3]{1-a^3}+(c-a)\sqrt[3]{1-b^3}+(a-b)\sqrt[3]{1-c^3}=0.$$

Dokažte, že

$$(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)=(1-abc)^3.$$

Příklad 11. Kladná reálná čísla a, b, c splňují

$$\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0.$$

Dokažte, že $(a-b)(b-c)(c-a)=0$.

Příklad 12. Dokažte, že pro všechna po dvou různá reálná čísla a, b, c platí

$$a^2\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=(a+b+c)^2.$$

Příklad 13. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c platí

$$a^2\frac{b+c}{b^2+c^2}+b^2\frac{c+a}{c^2+a^2}+c^2\frac{a+b}{a^2+b^2}\geq a+b+c.$$

Literatura

[1] Titu Andreescu, *105 Algebra Problems From the AwesomeMath Summer Program*, XYZ Press, 2013.