Může být číslo skoro racionální?

Vít „Vejtek“ Musil

Entrée

Pepa: Hej Vejte, umím dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální.
Vejtek: Však to je hračka: Vezmu kalkulačku, zmáčknu $\sqrt{\ }$, pak dvojku a mrkneme se na odmocninu ze dvou na displeji. Je jasné, že je iracionální:

$$1.\ 4\ 1\ 4\ 2\ 1\ 3\ 5\ 6\ 2$$

Pepa: Co je to za kecy? Co kdyby měla periodický desetinný rozvoj s periodou delší než délka displeje? Když si namačkáš na kalkulačku třeba 25 děleno 17, taky dostaneš divokou posloupnost číslic:

$$1.\ 4\ 7\ 0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5$$

A přitom je to číslo racionální.
Vejtek: Na tom něco bude, nicméně pro čísla kolem nás moje metoda dává uspokojivé výsledky. Takže se mohu spolehnout, že moje kalkulačka mi pomůže odhalit, která čísla jsou racionální. Pravděpodobnost chyby bude mizivá.
Pepa: S tím nesouhlasím.

Kdo má pravdu?

Zkuste se kohokoliv zeptat a každý řekne, že Pepa. Když známe devět (nebo devadesát či devět milionů) číslic z desetinného rozvoje nějakého čísla, nemůžeme říct, zda je racionální nebo ne. Existuje nekonečně mnoho racionálních a iracionálních čísel se stejným počátečním úsekem desetinného rozvoje.

Stejně však se čísla z předchozího odstavce, jakkoliv se mohou zdát podobná, v něčem zásadním liší. Druhé je velmi blízko racionálnímu číslu $\frac{25}{17}$, rozdíl mezi $\frac{25}{17}$ a $1.470\,588\,235$ je zhruba $3 \cdot 10^{-10}$. Naproti tomu k číslu $1.414\,213\,562$ neexistuje tak blízký zlomek s dvouciferným jmenovatelem. Nejblíže je číslo $\frac{99}{70}$, a to s chybou okolo $7 \cdot 10^{-5}$. Nejkratší zlomek aproximující $\sqrt{2}$ s chybou $3 \cdot 10^{-10}$ je $\frac{47\,321}{33\,461}$, což je o dost delší zlomek než $\frac{25}{17}$. Podstatné je, že tuto vlastnost, pouhým okem nerozeznatelnou, lze snadno odhalit jednoduchými výpočty na kapesním kalkulátoru.

Trik

Budeme potřebovat kalkulačku, která zvládne sčítat, odčítat, násobit a dělit. Někdo nám dá dvě čísla mezi 0.5 a 1, například

$$0.635\,149\,023 \quad \text{a} \quad 0.728\,101\,457.$$

Jedno z těchto čísel by mělo vzniknout jako podíl dvou čísel, kde dělitel je menší než 1000, druhé by mělo být náhodné. Tvrdíme, že s pomocí kalkulačky dokážeme během minuty zjistit, které z předložených čísel je onen podíl, a dokonce najdeme vyjádření ve tvaru zlomku.

Jak na to?

Podstata triku bude obsahem přednášky. Zjednodušeně řečeno, jedno z výše zmíněných čísel je *skoro racionální*, zatím co to druhé ne — ať už to znamená cokoliv.

Co je dobrá aproximace?

Buď α iracionální číslo. Na základě čeho usoudíme, že zlomek $\frac{p}{q}$ (kterýžto uvažujeme v základním tvaru) je dobrou aproximací čísla α? Jednak nám záleží na velikosti chyby $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, která by měla být malá, dále chceme, aby čísla p a q nebyla moc velká. Čitatel p závisí na α a ne na přesnosti aproximace. Chceme tedy minimalizovat chybu $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ a jmenovatele q. Zřejmě zmenšování chyby vede k růstu jmenovatele a naopak. Přirozeně tedy můžeme tyto požadavky nakombinovat do *ukazatele kvality* $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$. O aproximaci bychom pak řekli, že je *dobrá*, pokud je $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ malé. K naší smůle však platí následující věta.

Věta 1. *Pro libovolné reálné číslo α a každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ takových, že platí*

$$q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \varepsilon.$$

Ta říká, že všechna čísla jsou stejně *dobrá* a nedává nám tedy žádnou metodu, jak rozlišovat mezi čísly, která mají dobré racionální aproximace a která ne.

Jako zlepšovák můžeme zkusit použít jiný ukazatel kvality, který bude klást větší váhu na velikost jmenovatele q. Říkejme tedy, že aproximace $\frac{p}{q}$ je „dobrá“, pokud je součin $q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ malý. Následující věta říká, že tento výběr už je opodstatněný.

Věta 2.

(a) *Pro libovolné reálné číslo α existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ takových, že platí*

$$q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) *Existuje iracionální číslo α takové, že pro každé $\lambda > \sqrt{5}$ existuje pouze konečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících*

$$q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda}.$$

Které že je to číslo α z tvrzení (b)? Jaké je nejiracionálnější ze všech iracionálních čísel, nejvíce se vyhýbající racionálním aproximacím? Překvapivě jde o číslo milované generacemi malířů, sochařů a architektů, zlatý řez[1] $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

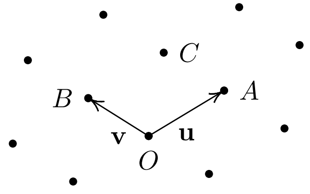
Geometrie čísel

Abychom odkryli pravdu skrývající se za těmito a mnoha dalšími pozoruhodnými tvrzeními, budeme používat čistě geometrické argumenty. Žádné upocené počty, žádné kanóny z teorie čísel, jen elementární hříčky s obrázky, které vystihují pravou podstatu problému.

Mřížka

Jedinou, a to základní, ingrediencí pro nás bude *mřížka*. Buď O bod v rovině (říkejme mu počátek) a $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ dvě nekolineární šipky[2] (body O, A a B neleží v přímce). Šipka je svým koncovým bodem dána jednoznačně, často proto budeme tento bod a šipku zaměňovat. Šipky lze přirozeně sčítat i násobit reálným číslem. Za součet šipek $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ označíme šipku $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, která je určena bodem, kam ukáže šipka $\mathbf{u}$ pokud ji posuneme o šipku $\mathbf{v}$, c-násobkem šipky $\mathbf{u}$ myslíme šipku $c\mathbf{u}$, která vznikne natažením šipky $\mathbf{u}$ c-krát.

Mřížkou (generovanou $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$) rozumíme všechny možné součty $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$, kde a a b jsou celá čísla. Mřížku tak vlastně tvoří všechny body, kam se lze dostat pomocí skládání šipek.



Snadno se nahlédne, že je-li $KLMN$ rovnoběžník takový, že body K, L, M jsou body mřížky, pak též N je bodem mřížky.

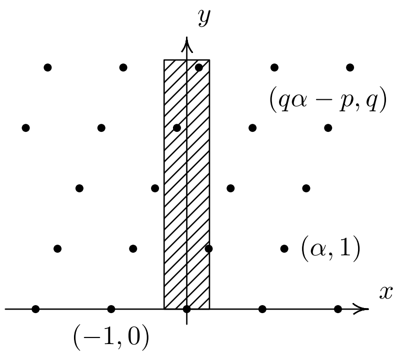
[1] Toto číslo není unikátní, existují další čísla v jistém smyslu podobná zlatému řezu, která jsou stejně „špatná“.

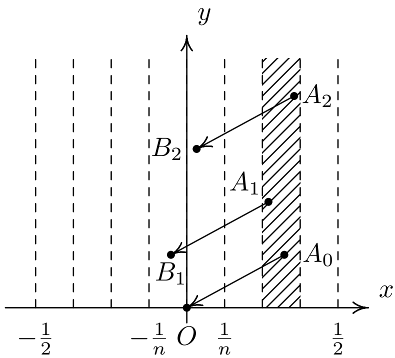
[2] Většinou se šipkám říká vektory.

Význam mřížky vyplyne z následující úvahy. Volme za šipky **u** a **v** postupně $(-1,0)$ a $(\alpha,1)$, kde α je obecně reálné číslo. Pro celá čísla p a q (výše to byla čísla a a b) náleží body

$$p(-1,0)+q(\alpha,1)=(q\alpha-p,q)=\left(q\left(\alpha-\frac{p}{q}\right),q\right)$$

mřížce. Náš ukazatel kvality je pak vzdálenost tohoto mřížového bodu od osy y. Abychom dokázali Větu 1, musíme najít nekonečně mnoho bodů této mřížky libovolně blízko ose y. To nahlédneme z následujících obrázků.





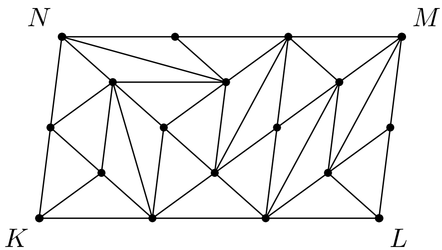
Jak vidno, tato mřížka byla zvolena lišácky na míru našemu ukazateli kvality.

Označme si dále písmenkem s obsah (tzv. základního) rovnoběžníku $OACB$, kde $C=A+B$. Platí následující.

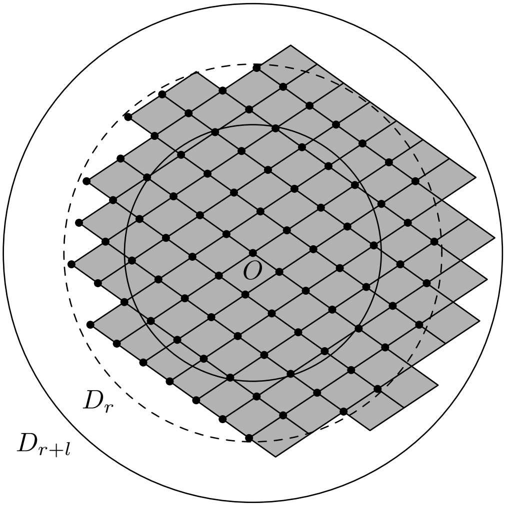
Tvrzení 3. *Buď $KLMN$ rovnoběžník z mřížových bodů. Pak platí následující.*

(a) *Obsah $KLMN$ je roven ns, kde n je přirozené číslo.*
(b) *Pokud rovnoběžník $KLMN$ neobsahuje žádné mřížové body uvnitř ani na hranici, pak je jeho obsah roven s.*

Myšlenku důkazu (a) lze najít v obrázku.



Důkazu (b) pak v obrázku.



Konstrukce čísel

Chceme-li objevit ty skutečně dobré aproximace, musíme si osvojit práci s řetězovými zlomky a s Euklidovým algoritmem. Pak si uvědomíme příslušné souvislosti a vypěstujeme si patřičný náhled, pochopitelně geometrický.

Řetězové zlomky

Konečný *řetězový zlomek* je výraz tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

kde a_0 je celé číslo, a_1 až a_n jsou kladná celá a $a_n > 1$. Snadno si rozmyslíme, že každé racionální číslo lze zapsat jako konečný řetězový zlomek. Okamžitě také přijdeme na algoritmus, jak ze zadaného racionálního čísla r čísla a_i dostávat. Prostě

$$a_0 = [r], \quad a_1 = \left[\frac{1}{r - a_0}\right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{r-a_0} - a_1}\right], \ldots$$

Nic nám však nebrání použít tento algoritmus i pro iracionální číslo α. Dostaneme pak nekonečně mnoho čísel a_0, a_1, $a_2, \ldots$ Formálně píšeme

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}.$$

Čísla a_0, a_1, $a_2, \ldots$ nazýváme *neúplnými podíly* čísla α, číslo

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

pak pojmenujeme *n-tým aproximantem* čísla α. Zřejmě platí

$$r_0 < r_2 < r_4 < \cdots < \alpha < \cdots r_5 < r_3 < r_1.$$

Zaveďme si ještě úspornější značení $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ pro konečný řetězový zlomek s neúplnými podíly a_0, a_1, $a_2, \ldots a_n$ a $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ pro nekonečný řetězový zlomek.

Vyjdeme-li naopak z neúplných podílů, můžeme počítat čitatele a jmenovatele čísla $r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

$$r_0 = \frac{a_0}{1}, \quad r_1 = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \quad r_2 = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}, \ldots$$

a rychle objevíme následující rekurentní vztahy.

Tvrzení 4. *Platí*

(a) $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ *($n \geq 2$),*
(b) $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ *($n \geq 2$),*
(c) $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$, *($n \geq 1$).*

Euklidův algoritmus

Euklidův algoritmus většinou používáme k nalezení největšího společného dělitele. Připomeňme, že pro daná kladná celá čísla M a N ($N > M$) stále opakujeme dělení se zbytkem podle schématu

$$\begin{aligned} N &= a_0 M + b_0 \\ M &= a_1 b_0 + b_1 \\ b_0 &= a_2 b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ b_{n-2} &= a_n b_{n-1}, \end{aligned}$$

kde a_i a b_i jsou kladná celá čísla a

$$0 < b_{n-1} < b_{n-2} < \cdots < b_0 < M.$$

Číslo b_{n-1} je největší společný dělitel čísel M a N.

Souvislost s řetězovými zlomky je nasnadě.

Tvrzení 5.

(a) *Čísla* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jsou neúplné podíly čísla* $\frac{N}{M}$,

$$\frac{N}{M} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

(b) *Pro* i*-tý aproximant* $\frac{p_i}{q_i}$ *platí*

$$b_i = (-1)^i (Nq_i - Mp_i).$$

Kdybychom čísla N a M nahradili obecně reálnými čísly β a γ, dostaneme nekonečnou posloupnost rovnic (pokud je podíl $\frac{\beta}{\gamma}$ iracionální)

$$\begin{aligned} \beta &= a_0\gamma + b_0 \\ \gamma &= a_1 b_0 + b_1 \\ b_0 &= a_2 b_1 + b_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

a Tvrzení 5 bude stále platit (se zjevnou modifikací, tj. $\frac{\beta}{\gamma} = [a_0; a_1, a_2, \ldots])$.

Geometrická reprezentace Euklidova algoritmu

Buď O bod v rovině a ℓ buď přímka tímto bodem procházející (v obrázku svislá). Zvolme body A_{-2} a A_{-1} ve vzdálenosti β a γ od přímky ℓ, oba horizontálně nad bodem O, A_{-2} vpravo a A_{-1} vlevo.

Přičtěme vektor $\overrightarrow{OA_{-1}}$ k A_{-2} co nejvícekrát, aby výsledek neprotnul přímku ℓ. Koncový bod označme jako A_0. V druhém kroku přičteme podobně vektor $\overrightarrow{OA_0}$ k bodu A_1 co nejvícekrát bez protnutí přímky ℓ. Dostaneme bod A_1. Ve třetím přičteme $\overrightarrow{0A_1}$ k A_0, dostaneme A_3 a tak dále. Celkem jsme vyrobili dvě lomené čáry $A_{-2}A_0A_2A_4\ldots$ a $A_{-1}A_1A_3A_5\ldots$ přimykající se k přímce ℓ.

Příslušné celočíselné násobky si budeme značit a_i, platí tedy

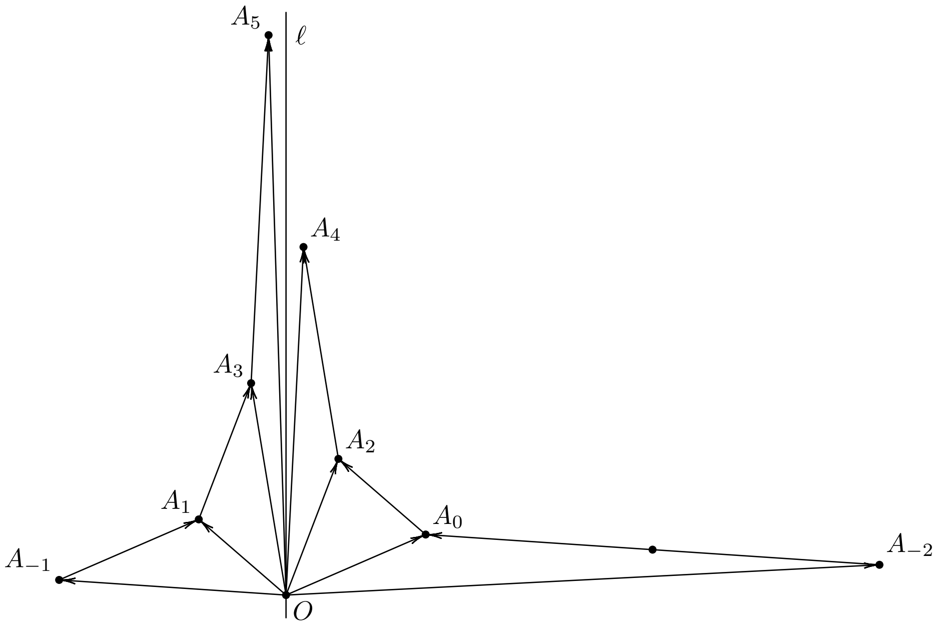
$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{-2}A_0} &= a_0\overrightarrow{OA_{-1}} \\ \overrightarrow{A_{-1}A_1} &= a_1\overrightarrow{OA_0} \\ \overrightarrow{A_0A_2} &= a_2\overrightarrow{OA_1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dále si označme vzdálenosti bodů A_i od přímky ℓ postupně β, γ, b_0, b_1 a tak dále. Z konstrukce výše můžeme postupně vypočítávat tyto vztahy

$$\begin{aligned} \beta &= a_0\gamma + b_0 \\ \gamma &= a_1 b_0 + b_1 \\ b_0 &= a_2 b_1 + b_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

a tedy jest $\frac{\beta}{\gamma} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Poznamenejme, že pokud některý z bodů A_n leží na přímce ℓ, je podíl $\frac{\beta}{\gamma}$ racionální a platí $\frac{\beta}{\gamma} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.



Pojďme učinit další klíčové pozorování. Uvažujme mřížku generovanou vektory $\overrightarrow{OA_{-2}}$ a $\overrightarrow{OA_{-1}}$. Potom všechny body A_i jsou body této mřížky. Z Tvrzení 3 vydedukujeme následující.

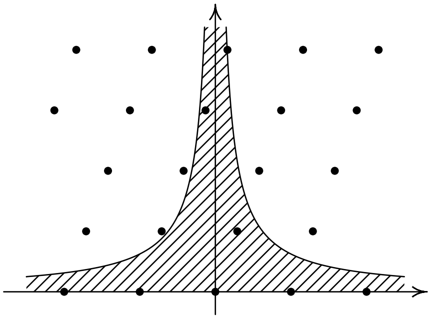
Tvrzení 6. *Neexistuje mřížový bod mezi lomenými čárami $A_{-2}A_0A_2A_4\dots$ a $A_{-1}A_1A_3A_5\dots$.*

Nejlepší racionální aproximace

Uvažujme opět mřížku generovanou šipkami $(-1,0)$ a $(\alpha,1)$, tj. body o souřadnicích

$$p(-1,0)+q(\alpha,1)=(q\alpha-p,q)=\left(q\left(\alpha-\frac{p}{q}\right),q\right).$$

Nový ukazatel kvality $q^2\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$ je pak absolutní hodnota součinu souřadnic mřížových bodů. Otázka počtu aproximací $\frac{p}{q}$ čísla α, pro které je tento ukazatel menší než ε, je ekvivalentní otázce počtu mřížových bodů pod grafem „hyperbolického kříže“ $|xy|<\varepsilon$.



Aplikujme předchozí konstrukci Euklidova algoritmu pro $A_{-2}=(\alpha,1)$ a $A_{-1}=(-1,0)$. Význam bodů A_0, A_1, $A_2\dots$ objasňuje následující věta.

Věta 7. *Buď $n\geq 0$. Pak $A_n=(q_n\alpha-p_n,q_n)$, kde p_n a q_n jsou nesoudělné čitatele a jmenovatele n-tých aproximantů čísla α.*

Věta 7 společně s Tvrzením 6 říká, že právě tyto aproximanty tvoří prvky nejlepší aproximace. Formálně si shrňme tento poznatek do věty.

Věta 8. *Buď $\varepsilon>0$. Pokud existuje jen konečně mnoho zlomků $\frac{p_n}{q_n}$ takových, že $q_n^2\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\varepsilon$, pak množina všech zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících $q^2\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\varepsilon$ je konečná.*

Již víme, které zlomky jsou číslu α nejblíže, nyní zaměříme svou pozornost na odhad chyby. Fascinující je, že hodnotu ukazatele kvality umíme určit přesně.

Věta 9. *Buď $\frac{p_n}{q_n}$ ireducibilní n-tý aproximant reálného čísla $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\dots]$. Pak*

$$q_n^2\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{\lambda_n},$$

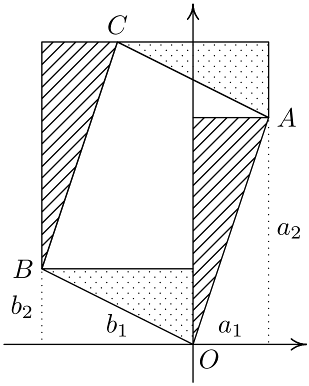
kde

$$\lambda_n=a_{n+1}+\cfrac{1}{a_{n+2}+\cfrac{1}{a_{n+3}+\cfrac{1}{\ddots}}}+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_1}}}}.$$

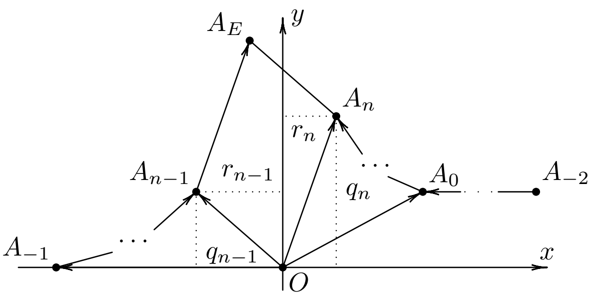
K důkazu této věty budeme potřebovat jedno snadné lemma.

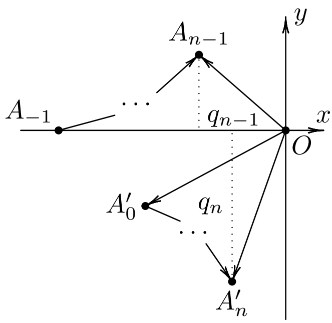
Lemma 10. *Mějme v rovině s počátkem O body A a B o souřadnicích (a_1, a_2) a $(-b_1, b_2)$, kde a_1, a_2, b_1, b_2 jsou kladná reálná čísla. Označme si $C = A + B$. Pak obsah rovnoběžníku $OACB$ je roven $a_1b_2 + a_2b_1$.*

Důkaz lemmatu se nahlédne posunutím dvou trojúhelníků.



K důkazu Věty 9 použijeme podobný obrázek jako dříve, navíc jednu větev z Euklidovy konstrukce zobrazíme středově podle počátku. To se bude jistě hodit.





Vybaveni těmito nástroji už můžeme dokázat Větu 2 nebo objasnit podstatu triku a Vejtkova „důkazu“.

Zpět k triku

Na začátku jsme obdrželi dvě devíticiferná desetinná čísla, z nichž jedno vzniklo jako podíl dvou čísel s nejvýše trojciferným jmenovatelem a druhé bylo libovolné. Chceme poznat, které je které.

Je-li číslo α devíticiferná aproximace čísla $\frac{p}{q}$ s tříciferným jmenovatelem, pak

$$q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1000 \cdot (1000^2)} < \frac{1}{1000q^2}.$$

To znamená, že jedno z čísel λ_n je alespoň tisíc. Triviálně platí, že $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1}+2$, takže a_{n+1} musí být více než tisíc a odpovídající q_n menší než tisíc. Otázka je, jak velké může být n?

Protože platí $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, čísla q_n rostou alespoň jako Fibonacciho čísla F_n. Jelikož $F_{15} = 987$, může být n nejvýše patnáct.

Nyní zbývá jen převést ona dvě zadaná čísla na řetězové zlomky a podívat se nejvýše na prvních 15 z nich.

$$0.635\,149\,023 = [0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13, 1204, 1, \ldots]$$
$$0.728\,101\,457 = [0; 1, 2, 1, 2, 9, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 15, 1, 59, 7, 1, 39, \ldots]$$

Zřejmě první z těchto čísel má dobrou racionální aproximaci, konkrétně je to racionální číslo $[0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13]$. Snadno již dopočítáme čitatele i jmenovatele.

Závěr: První číslo je racionální, a to $\frac{618}{973}$.

Literatura

[1] Dmitry Fuchs, Sergej Tabachnikov, *Mathematical Omnibus*, AMS, 2007.