Soustavy rovnic

VÍT „VEJTEK“ MUSIL

ABSTRAKT. Příspěvek se věnuje vybraným partiím ze soustav nelineárních rovnic – cyklickým soustavám a soustavám se symetrickými polynomy. Některé příklady vyžadují užití nějaké známé nerovnosti. U vybraných úloh jsou uvedeny zdroje, kde lze nalézt řešení.

Během řešení mnoha problémů často narážíme na problém řešení rovnic a jejich soustav. Jde-li o soustavy rovnic lineárních, nalezení řešení nepředstavuje žádný problém, lze jej algoritmicky popsat, a tak tyto soustavy za nás může snadno a rychle louskat počítač. V obecném případě však máme smůlu, žádný magický univerzální algoritmus nemáme. Nad každým takovým případem se musíme zamyslet zvlášť, někdy se nám však může podařit vyřešit naráz celou škálu příkladů v jistém smyslu „podobných“.

Cyklické soustavy

Jedna ze zajímavých tříd takových soustav jsou soustavy cyklické. Vyznačují se tím, že jednotlivé rovnice se od sebe liší pouze cyklickou záměnnou proměnných.

Úmluva. Domluvíme se, že v celém textu, nebude-li řečeno jinak, všechny neznámé jsou z oboru reálných čísel.

Pozorování. *Buďte x_1, x_2, … x_n reálná čísla. Potom*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0,$$

právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Toto banální pozorování se hodí nejen na cyklické soustavy. V případě cyklických většinou všechny rovnice sečteme a správně „učtvercujeme“. Podle tohoto návodu si každý snadno rozřeší následující úlohy.

KLÍČOVÁ SLOVA. soustavy rovnic, rovnice, symetrické polynomy

Příklad 1. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x^2 + 1 = 2y.$$

Příklad 2. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x^2 = yz.$$

Nyní přichází něco více obecného. Následující lemma se nám hodí pro některé cyklické soustavy, kde se v každé rovnici vyskytují pouze dvě neznámé.

Lemma. *Buďte $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funkce rostoucí na intervalu I. Potom pro řešení soustavy*

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \qquad\vdots \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Z nastalé rovnosti již většinou snadno dopočítáme všechna řešení. Zkusme si to na následujících příkladech. U některých bude možná trošku obtížnější ukázat monotonii.

Příklad 3. Řešte cyklickou soustavu v proměnných a až z

$$a^5 = b + b^5. \qquad \text{(MKS-29-2-4)}$$

Příklad 4. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x^3 = 2y^3 + y - 2.$$

Příklad 5. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x = y^3 + y - 8.$$

Ne vždy však dostaneme soustavu nachystanou, jak bychom si přáli. Někdy je třeba provést drobné úpravy, nebo najít interval I, kde lze lemma aplikovat.

Příklad 6. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x = \frac{4y^2}{1 + 4y^2}. \qquad \text{(MKS-27-1-7)}$$

Příklad 7. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2}.$$

Na některé soustavy je však toto lemma příliš krátké, zkusme třeba tento příklad:

Příklad 8. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x + 2y = \sqrt{6z - 1}.$$

Zde se v každé rovnici vyskytují všechny tři proměnné, zachrání nás však lemma o trošku silnější.

Lemma. *Buďte $f, g, h\colon I \to \mathbb{R}$ funkce neklesající na intervalu I. Potom pro řešení soustavy*

$$\begin{cases} f(x) + g(y) = h(z) \\ f(y) + g(z) = h(x) \\ f(z) + g(x) = h(y) \end{cases}$$

platí $h(x) = h(y) = h(z)$. Je-li navíc h rostoucí, je $x = y = z$.

Příklad 9. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x = y^3 + 1.$$

Příklad 10. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x^5 = 5y^3 - 4z. \qquad \text{(Polská MO)}$$

Jak bylo předestřeno dříve, ani toto lemma není všemocné, na další úlohy musíme hledat trik jim šitý na míru.[1]

Příklad 11. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$x^2 = y + z + 2.$$

Příklad 12. Řešte cyklickou soustavu ve třech proměnných

$$(x + y)(y^3 - z^3) = 3(z - x)(z^3 + x^3).$$

(MR-6-J179)

Použití nerovností

Další třída rovnic se na první pohled nápadně liší od té předchozí. S použitím nějaké nerovnosti (nebo nerovností) buď ukážeme, že n musí být nějak omezené, nebo dokážeme, že rovnice platí, právě když nastává rovnost v nerovnosti. Pro tyto případy se tedy hodí nerovnosti znát a vědět, za jakých podmínek platí rovnost.

[1] A taky by bylo trochu divné, že by pro každou cyklickou soustavu platila rovnost všech neznámých.

Následující tři příklady řeště v kladných reálných číslech.

Příklad 13. Vyřešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{4}{x_2} + \cdots + \dfrac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2 \end{cases}$$

Příklad 14. Vyřešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = n^3 + 1 \end{cases}$$

(MR-6-J172)

Příklad 15. Vyřešte soustavu

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n = n \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = \dfrac{1}{2}n(n+1) \end{cases}$$

Symetrické polynomy

Symetrické polynomy jsou speciální případy polynomů více proměnných. Věnovat se jim budeme právě kvůli jejich pěkným vlastnostem, které si záhy ukážeme. Není třeba se obávat, nejde o žádnou novinku, snad každý se s nimi setkal v takzvaných Viètových vztazích.

Definice. Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$ proměnných x_1 až x_n nazveme symetrickým, pokud pro každou bijekci $\pi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ platí

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Definice vlastně neříká nic jiného než to, že polynom se nezmění, pokud libovolným způsobem přeznačíme proměnné. Mezi všemi symetrickými polynomy vynikají tzv. elementární polynomy.

Definice. Buď $1 \le i \le n$. Symetrický polynom proměnných x_1 až x_n

$$\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_i \le n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_i}$$

nazveme i-tým elementárním symetrickým polynomem, označíme jej δ_{in}.

Definice možná působí děsivě, avšak jde jen o jinak zapsanou známou věc.

Tvrzení. (Viètovy vztahy) *Buďte x_1 až x_n kořeny polynomu $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n$. Potom platí*

$$\begin{aligned} a_1 &= -\delta_{1n} \\ a_2 &= \delta_{2n} \\ a_3 &= -\delta_{3n} \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \delta_{nn}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme vyslovit důležitou větu z algebry o symetrických polynomech.

Věta. *Každý symetrický polynom proměnných x_1 až x_n lze napsat jako polynom v proměnných δ_{1n} až δ_{nn}.*

Věta jinak řečeno tvrdí, že každý symetrický polynom lze v jistém smyslu napsat pomocí elementárních symetrických polynomů, a to tak, že je můžeme sčítat, násobit konstantou a násobit navzájem. Co věta neříká, je, jak to udělat, musíme se spokojit s tím, že to lze. Dost už ale teorie, pojďme si to vyzkoušet na příkladech.

Příklad 16. Řešte soustavu

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + xz = 0 \end{cases}$$

(MKS-27-1-4)

Příklad 17. Najděte hodnotu $1/x + 1/y + 1/z$ za předpokladu, že

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 15 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

Příklad 18. Řešte soustavu

$$\begin{cases} xy + yz + xz = 4 \\ (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 = 6 \\ (xy)^3 + (yz)^3 + (xz)^3 = 10 \end{cases}$$

Literatura a zdroje

[MŘ] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh I*, MU, Brno, 2001.
[ML] *Mathlinks*, *http://www.mathlinks.ro*
[MR] *Mathematical Reflections*, *http://awesomemath.org/mathematical-reflections*