Variace na invariant

Vít „Vejtek“ Musil

Abstrakt. Seznámení se s pojmem invariant, jeho představení na ukázkové úloze a seznam nejčastějších invariantů. Příspěvek obsahuje množství různých úloh na procvičení, od lehčích až po starší či aktuální úlohy MO či IMO.

Jedním ze základních principů řešení úloh je hledání invariantů, neboli neměnných jevů. Typicky se tato metoda nabízí u úloh, kde v každém kroku provádíme nějakou transformaci, změnu nebo výpočet a ptáme se, jak může tento postup či třeba hra dopadnout. Hlavní strategie tedy zní: *Tam kde se něco opakuje, hledej to, co zůstává stejné.* Ukažme si použití tohoto přístupu na následujícím příkladu.

Úloha. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, 3, \ldots, 2n$, kde n je liché přirozené číslo. Vybereme si libovolná dvě čísla a, b, která smažeme, a místo nich napíšeme číslo $|a - b|$. Ukažte, že poslední zbylé číslo bude liché.

Řešení. Uvažme součet $S = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n + 1)$. Vidíme, že S je liché. Odebráním čísel a a b snížíme součet o $2\min(a, b)$, což je však sudé číslo, tedy S zůstane liché. Postupným mazáním se tedy parita S nezmění a na konci zbyde liché číslo.

V tomto příkladě byla invariantem parita součtu. Dalšími užitečnými invarianty může být součet modulo dané n, vzdálenost nějakých bodů, počet jevů atd. Ne vždy musíme najít něco neměnného, často pomůže najít jev, jenž se sice mění, zato však kontrolovaným způsobem. Příkladem budiž posloupnost, jež má limitu.

Příklad 1. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Příklad 2. Na zájezdě má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem. Zobecněte.

Příklad 3. Mějme celá čísla a, b, c a d, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě větší než libovolné kladné číslo.

Příklad 4. Každé z čísel $a_1, \ldots, a_n$ je $+1$ nebo -1 a platí $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Příklad 5. Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, z nichž každý má nejvýše $n - 1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

Klíčová slova. invariant, důkazové techniky.

Příklad 6. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček, nebo dvojek?

Příklad 7. Mějme množinu $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0.6a - 0.8b$ a $0.8a + 0.6b$. Můžeme někdy dostat množinu (a) $\{4, 6, 12\}$ nebo (b) $\{x, y, z\}$, kde $|x - 4|, |y - 6|, |z - 12| < 1/\sqrt{3}$?

Příklad 8. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \leq k \leq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí. (Celostátní kolo MO 2009)

Příklad 9. Na nekonečném pásu čtverečků leží konečný počet mincí. V jednom tahu provedeme následující operaci: Z každého čtverečku, který obsahuje více jak jednu minci vezmeme dvě a jednu umístíme na sousední čtvereček vlevo a druhou na sousední pravý. Pokud se na pásu vyskytují jen samostatné mince, už dále nepokračujeme. Pro dané původní rozmístění mincí ukažte, že každá posloupnost tahů skončí po konečně krocích a ve stejné konfiguraci. (IMO 1996)

Příklad 10. Na tabuli jsou napsána čísla 1,2, . . . ,20. Uvažme následující operaci: Vybereme dvě čísla taková, že $a - b \geq 2$, a nahradíme je čísly $a - 1$ a $b + 1$. Určete maximální počet takovýchto operací.

Příklad 11. Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

(a) Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?

(b) Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany. (Celostátní kolo MO 2010)

Příklad 12. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y$, $-y$, $y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (IMO 1986)

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.