Triky s kvadratickou rovnicí

Vít „Vejtek“ Musil

Pojem kvadratické rovnice

Kvadratickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla neboli tzv. *koeficienty* této rovnice a x je neznámá. Zároveň požadujeme, aby koeficient a byl různý od nuly, jinak hovoříme o lineární rovnici. Takové reálné x, pro které rovnice platí, nazýváme řešením, nebo též kořenem rovnice. Někdy se kvadratická rovnice uvádí pouze se dvěma koeficienty p, q ve tvaru $x^2 + px + q = 0$, kterého lze dosáhnout dělením a. Navíc lze každou kvadratickou rovnici převést do tvaru $(2ax + b)^2 - D = 0$ takzvaným doplněním na čtverec. Hodnotu D nazýváme *diskriminantem* této rovnice. Snadno se již dá napsat, že

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Odtud vidíme, kdy má rovnice řešení, jelikož je-li D záporné číslo, neexistuje jeho druhá odmocnina. Pokud je D kladné, obdržíme dvě různá řešení, v případě že $D = 0$, oba kořeny splynou v jeden tzv. *dvojnásobný kořen*. Úvahy o hodnotě D se nám budou často hodit v mnoha úlohách k diskusi existence či počtu řešení dané rovnice.

Význam v geometrii

Jistou představu nám může poskytnout také následující geometrická úvaha. Představme si funkci $y = ax^2 + bx + c$ a zkoumejme, kdy $y = 0$, alébrž kdy nám naše funkce protne osu x. Dále si všimněme, že pokud se nějaké funkce $a_1x^2 + b_1x + c_1$ a $a_2x^2 + b_2x + c_2$ rovnají pro všechna x, pak již nutně platí

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

Ukažme si jednu takovou geometrickou úvahu na následujícím příkladě.

Příklad. Rozhodněte, zda existuji čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že rovnice $ax^2 + bx + c + \lambda = 0$ má dva reálné kořeny, ať zvolíme parametr λ jakkoliv.

Řešení. Představme si, že taková reálná čísla a, b, c existují. Potom naše funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ musí nabývat všech reálných hodnot. Je-li $a = 0$, pak f je lineární a každou hodnotu nabývá pouze jednou. Dále tedy buď $a \neq 0$. Upravíme-li si f na čtverec $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ a uvědomíme-li si, že $(x - x_0)^2$ je nezáporné číslo, pak $f(x_0) = y_0$ je minimální možná hodnota, kterou může f nabývat v případě, že je a kladné, v opačném případě je y_0 maximum. Takové chování funkce je však v rozporu s tím, že nabývá všech hodnot.

Viètovy vztahy

Další velice důležitou vlastností je skutečnost, že pokud má rovnice $ax^2+bx+c = 0$ dvě (ne nutně různá) řešení x_1 a x_2, pak platí

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Roznásobením pravé strany a porovnáním s levou obdržíme tzv. *Viètovy vztahy*

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}, \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Těchto rovností se také občas využívá k řešení úloh, příkladem budiž následující úloha.

Příklad. Určete všechny hodnoty reálných parametrů p a q, pro něž má každá z rovnic

$$x(x - p) = 3 + q, \qquad x(x + p) = 3 - q$$

v oboru reálných čísel dva různé kořeny, jejichž aritmetický průměr je jedním z kořenů zbylé rovnice.

Řešení. Z Viètových vztahů pro první rovnici dostáváme, že součet kořenů je p, jejich aritmetickým průměrem je $p/2$, jež má být kořenem druhé rovnice, tedy platí

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \tag{1}$$

Obdobně pro druhou rovnici máme, že součet jejich kořenů je $-p$ a $-p/2$ je kořenem první rovnice a platí

$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2} \right) = 3 + q. \tag{2}$$

Odečtením (1) − (2) dostáváme, že $q = 0$, a dopočteme $p = \pm 2$. Obě možnosti vedou na tutéž dvojici rovnic

$$x(x - 2) = 3, \qquad x(x + 2) = 3.$$

Stačí se již jen přesvědčit, že zadání úlohy je splněno.

Příklad. Dokažte následující nerovnosti pro $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$,
(ii) $x^2 + y^2 + 2y + 4 \geq xy + 2x$,
(iii) $2x^2 + 2y^2 + 1 \geq x + y + 2xy$.

Příklad. Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny, pro které platí, že rovnice $P(Q(x)) = 0$ má kořeny -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice.

Příklad. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný. (MO 57-B-I)

Příklad. Uvažujme dvě kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \qquad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnými parametry a, b. Zjistěte, jaké nejmenší a jaké největší hodnoty může nabývat součet $a+b$, existuje-li právě jedno reálné číslo x, které současně vyhovuje oběma rovnicím. Určete dále všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž uvažovaný součet těchto hodnot nabývá. (MO 57-B-II)

Příklad. Reálná čísla a, b mají následující vlastnost: kvadratická rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

(i) Dokažte nerovnost $b > 3$.
(ii) Vyjádřete kořeny obou rovnic pomocí b.

(MO 59-B-I)

Příklad. Nechť $f(x) = x^2 + ax + b$ je kvadratický trojčlen takový, že rovnice $f(f(x)) = 0$ má čtyři reálné kořeny (počítáno včetně násobnosti), přičemž součet nějakých dvou z nich je roven -1. Dokažte, že $b \leq -1/4$. (Mecz Domaslav 2010)

Příklad. Buďte a, b, c reálná čísla. Dokažte, že alespoň jedna z rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + (a-b)x + (b-c) &= 0, \\ x^2 + (b-c)x + (c-a) &= 0, \\ x^2 + (c-a)x + (a-b) &= 0 \end{aligned}$$

má reálný kořen. (Rusko 2007)

Příklad. Určete počet neprázdných podmnožin $A \subsetneq M = \{2^0, 2^1, \ldots, 2^{2005}\}$ takových, že rovnice $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$ má celočíselné kořeny. Symbolem $S(A)$ zde rozumíme součet všech čísel z množiny A a $B = M \setminus A$. (Rusko 2005)

Příklad. Buďte a, b, c reálná čísla taková, že pro každou dvojici rovnic

$$x^2 + ax + b = 0,$$
$$x^2 + bx + c = 0,$$
$$x^2 + cx + a = 0$$

existuje právě jedno společné reálné řešení. Určete všechny hodnoty, kterých může nabývat výraz $a^2 + b^2 + c^2$. (MEMO 2009)

Příklad. Nechť a, b jsou různá reálná čísla taková, že rovnice

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

nemá žádné reálné kořeny. Dokažte, že hodnota $20(b - a)$ není celočíselná. (Rusko 2010)

Příklad. Buďte $f(x)$ a $g(x)$ kvadratické trojčleny s koeficienty 1 u kvadratického členu. Dokažte, že pokud $f(g(x)) = 0$ a $g(f(x)) = 0$ nemá reálné kořeny, pak alespoň jedna z rovnic $f(f(x)) = 0$ a $g(g(x)) = 0$ nemá reálné kořeny. (Rusko 2007)

Literatura a zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec: Seminář *Umění vidět v matematice.*