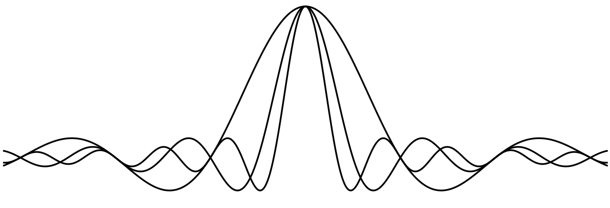
Funkcionální rovnice



Vít Musil

Úvod

Tento text je přepracovanou verzí materiálu, který jsem připravil ke své přednášce v rámci kursu pro nadané žáky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Přestože samotný text prošel řadou změn, jeho povaha i cíl zůstává beze změny – pomoci řešitelům matematických soutěží a dalším zájemcům o přístupnou středoškolskou matematiku přiblížit často obávané téma funkcionálních rovnic. Při psaní jsem se soustředil především na klíčové úvodní partie, neboť bez důkladného pochopení pojmů a přístupu k úloze nemá cenu namířit své síly na řešení úloh. Těžko se pak i ze vzorových řešení poučíme a v nastalém zmatku to spíše vzdáme. Nováčkům tedy doporučuji přečíst a snažit se pochopit základní principy a myšlenkové obraty, ostřílení borci pak mohou snadno těžit nové myšlenky ze samostatného řešení úloh. Do výkladu je zařazeno několik cvičení, většinou hned na konci nějaké probrané metody řešení. Pokud se vám nepodaří cvičení vyřešit, nemá smysl postupovat dále, ale zkusit si kapitolu zopakovat nebo alespoň postupovat samostatně dle návodu. Pro další samostatné studium jsem rozšířil sbírku úloh.

Hodně zdaru a radosti při řešení přeje

autor

Obsah

Pojem funkce

Jak již samotný název kapitoly dává tušit, stěžejním objektem pro nás bude funkce. Než se vrhneme na samotné funkcionální rovnice a jejich řešení, připomeneme si, jak budeme funkce chápat, upozorníme na časté nešvary vznikající při práci s funkcemi a sjednotíme značení.

Funkci nebo též zobrazení z množiny X do množiny Y většinou chápeme jako nějaké přiřazení, kdy prvkům z X jednoznačně určíme právě jeden prvek z Y. Tohoto zavedení se budeme v textu držet, i když neuvádíme exaktní definici pojmu funkce. Poznamenejme však, že funkce neztotožňujeme s jejich předpisy, i když si je tak (většinou) představujeme.

Funkce zpravidla značíme písmeny f, g, h. Definiční obor funkce f označíme jako $\mathrm{Dom}(f) = X$, obor hodnot jako $\mathrm{Rng}(f) \subseteq Y$. Pro zjednodušení používáme zápis

$$f\colon X \to Y.$$

Všimněme si, že tímto zápisem neříkáme, že f musí nabývat všech hodnot z Y.

V našem textu budeme za množiny X a Y brát většinou následující:

$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálných čísel

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, říkáme často, že f je reálná funkce. S těmito funkcemi budeme pracovat nejčastěji.

Zadáváme-li nějakou funkci tím, že ji předepíšeme vzorečkem, musíme vždy uvádět její definiční obor. Například zápisy

$$f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x,\ x \in \mathbb{Q}$$

definují naprosto odlišné funkce. Naproti tomu strohé $f(x) = x$ nedefinuje žádnou funkci, protože o x nevíme nic. Takovéto nápisy si můžeme dovolit pouze v případě, že je definiční obor zřejmý z kontextu a nemůže dojít k omylu.

Uvědomme si ještě, že funkce nemusejí být vždy dány explicitním vzorcem, jak jsme ze střední školy zvyklí. Existují například dobře popsatelné funkce, pro které žádný vzorec neexistuje. Funkce také můžeme definovat více vzorečky, uvažme například následující předpis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

což je korektně definovaná (tzv. Dirichletova) funkce. Rovněž se může stát, že vzorců či předpisů pro tutéž funkci můžeme najít více. Uvažujme třeba funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 1},\ x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Zjevně se oba předpisy odlišují, definují však stejné funkce ve smyslu našeho chápání funkcí – f i g pevnému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí stejnou hodnotu, tj. $f(x) = g(x)$. Z těchto důvodů tedy striktně rozlišujeme mezi funkcemi (jakožto přiřazeními) a jejich předpisy.

Rovnost $f = g$ znamená, že $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ a zároveň $f(x) = g(x)$ pro každé x ze společného definičního oboru, naproti tomu $f(x) = g(x)$ znamená rovnost funkčních hodnot v jednom konkrétním bodě x.

V tuto chvíli jsme již dostatečně vybaveni k tomu, abychom se pustili do další kapitoly a seznámili se s tématem funkcionálních rovnic. Než však tak učiníme, ukážeme si ještě další pohled na funkce, který je čistě intuitivní a který se nám bude hodit k hlubšímu pochopení další problematiky.

Nahlédněme stručně do notoricky známého lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Na prvky tohoto prostoru nahlížíme povětšinou jako na vektory, neboli uspořádané n-tice $[a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Nic nám však nebrání dívat se v souladu s tímto náhledem na vektory jako na funkce z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do $\mathbb{R}$. Funkční hodnoty budeme přiřazovat číslům 1 až n zcela přirozeně, tedy $i \mapsto a_i$. Vidíme tak, že prostor $\mathbb{R}^n$ je také prostorem funkcí.

Analogickou úvahou můžeme reálnou hodnotu přiřadit také každému přirozenému číslu, neboli pro každé $i \in \mathbb{N}$ definujeme přiřazení $i \mapsto a_i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$. Když nyní tato a-čka posbíráme, říkáme, že jsme definovali posloupnost reálných čísel, kterou značíme $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ovšem podle toho, jak jsme přiřazovali, se můžeme na posloupnost stále dívat jako na funkci z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

V obou případech do hry víceméně promlouvalo dobré uspořádání definičních oborů, mohli jsme si tak představovat, že funkce definujeme postupně napřed pro jedničku, pak pro dvojku a tak dále buď do nějakého n nebo pro všechna $\mathbb{N}$. Takový přirozený postup pro reálné funkce nemáme (a nepřirozený zavádět nebudeme). Pokud chceme definovat reálnou funkci, musíme všem číslům přiřadit hodnoty „naráz“, nejde je všechny vypsat jako v případě vektorů, nebo definovat induktivně jako pro posloupnosti. Toto je tedy ten pravý důvod, proč užíváme předpisy a proč je často s funkcemi zaměňujeme.

Pojem funkcionální rovnice

Seznámením se stěžejními objekty – funkcemi jsme poznali hráče v naší hře. Chybí nám ještě porozhlédnout se po hřišti a seznámit se se soupeři – s funkcionálními rovnicemi a s pravidly hry.

Ukažme si nejprve několik zadání a aniž bychom úlohy řešili, ozřejmíme si, co přesně se po nás chce a jak budeme úlohy chápat.

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Především si všimněme základní odlišnosti od běžných rovnic: cílem není najít hodnoty x a y, které rovnici vyhovují, ale nalézt takové funkce, které rovnici splňují pro každé přípustné dosazení hodnot za x a y. Nepředstavujme si tedy pod symboly x či y žádná konkrétní čísla, dívejme se na ně jako na „místa“, kam je možné dosazovat cokoliv z definičního oboru aby stále platila rovnost.

Zvolíme-li si nějakou konkrétní funkci f, či spíše nějaký předpis, můžeme tuto rovnost snadno testovat. Všimněme si, že kupříkladu funkce $f(x) = 2x$ rovnici splňuje, neboť

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

a tato rovnost platí nezávisle na hodnotách x a y.

Naopak třeba funkce $f(x) = x + 1$ rovnici nevyhovuje, jelikož

$$f(x + y) = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y),$$

což se pozná na libovolných x a y.

Vidíme, že nějaké funkce vyhovují, jiné ne. Samozřejmě tím, že jsme uhodli jedno řešení, úloha nekončí. Ke správnému vyřešení úlohy musíme najít všechny takové funkce neboli ukázat, že žádné jiné funkce než ty, které jsme našli, rovnici nesplňují. Tato část může být velmi obtížná a často bývá těžištěm úlohy. Její netrivialita pochopitelně spočívá v tom, že nemůžeme vyzkoušet všechny funkce, kterých existuje nepřeberné množství v porovnání s možnými předpisy, které jsme schopni vymyslet.

Dále si všimněme, že úkolem je hledat funkce definované v $\mathbb{Q}$, což úlohu podstatně zjednodušuje a odlišuje například od úlohy následující.

Úloha 2. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Rovnice má v tomto případě úplně stejný tvar, ale funkce f musí být definována na celém $\mathbb{R}$ a může nabývat i libovolných reálných hodnot. Oproti předchozí úloze máme navíc zadanou omezující podmínku na funkci f. Bez této podmínky lze úlohu také řešit, ovšem řešení je ošklivé až lehce nechutné. Tato rovnice má dokonce i svůj název, říká se jí *Cauchyho rovnice* a ještě se o ní v textu zmíníme.

Číst pozorně zadání se tedy vyplácí, sama rovnice je pouze jeho polovinou. Abychom se opravdu přesvědčili, krátce se v úvaze vrátíme k úvodní kapitole. Představme si, že řešíme úlohu 1 pro funkce definované na množině $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ a rovnice má být splněna pro všechna x, y z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. V souladu s předchozí kapitolou si můžeme označit $f(i) = a_i$ pro $1 \le i \le 2n$. Zadaná rovnice má platit pro všechna $1 \le x, y \le n$, stačí tedy dosadit všech konečně mnoho dvojic. Co se po dosazení stalo? Dostali jsme běžnou soustavu lineárních rovnic pro neznámé a_i, kterou umíme snadno vyřešit. Z funkcionální rovnice jsme tak snadno dostali soustavu rovnic pro čísla. Pozorný čtenář už tuší, kam míříme. V prvním kole našich představ můžeme nahradit množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ přirozenými čísly a analogickým vypisováním bychom dostali soustavu spočetně mnoha rovnic pro čísla. Ve finále pak původní definiční obor nahradíme množinou $\mathbb{N}$. To, co bychom dostali, je zase „běžná“ soustava rovnic pro reálná čísla, těžko ji však kdo někdy celou vypíše. Použitím funkce tedy řekneme všechno „naráz“ bez nějakého pořadí. Na pozadí si však můžeme stále představovat nekonečně mnoho vztahů pro čísla, jejichž splnění po nás úloha vyžaduje. A navíc chce řešení všechna.

Mysleme tedy na to, že na funkcionální rovnice lze nahlížet jako na soustavy nekonečně mnoha rovnic. Prakticky to většinou k ničemu není, ale často tato představa pomáhá k pochopení toho, co se na pozadí děje. V textu tak ještě několikrát učiníme.

Idea řešení

Nadešel konečně čas na stěžejní otázku – jak hrát a vyhrát v boji s funkcionálními rovnicemi?

Základní myšlenkou řešení bude následující úvaha: Předpokládáme, že funkce f splňuje zadání, a zkoumáme, jaké musí mít vlastnosti. Získáváme tak informaci, že pokud nějaké řešení rovnice existuje, tak musí mít nějaké vlastnosti.

Mějme tedy na paměti, že obecně nepostupujeme ekvivalentními úpravami. Nejlépe je to vidět na příkladu.

Úloha 3. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + y.$$

Řešení. Předpokládejme, že již máme funkci f splňující rovnici pro každou dvojici $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Pro tuto funkci si označme $c = f(0)$. Protože je rovnice splněna pro každou dvojici $[x, y]$, speciálně musí být splněna i pro jednu konkrétní dvojici $[0, y]$. Musí tedy platit

$$f(0 + y) = f(0) + y,$$

neboli $f(y) = y + c$. Dosazením do rovnice ověříme, že

$$f(x + y) = x + y + c = x + c + y = f(x) + y$$

pro všechna reálná x a y, čili funkce $f(x) = x + c$, $x \in \mathbb{R}$ je řešením úlohy pro každé $c \in \mathbb{R}$. □

Proč jsme si však v řešení mohli říci, že $f(0)$ je konstanta? Předpokládali jsme totiž, že máme funkci f, která rovnici splňuje. Hodnota $f(0)$ je tak již konkrétní dosazení do konkrétní funkce, a tedy se dále nemění.

Pro názornou představu: „Je to jako se zajícem v pytli. Ještě nevíme, jak vlastně vypadá, ale můžeme dloubáním zjišťovat, jak rychle se vrtí, za jak dlouho se unaví, atp. Je to však již konkrétní zajíc, který má danou barvu očí, která se už nezmění, ač ji ještě neznáme.“ [FK]

Vraťme se ještě k naší představě o funkcionální rovnici jako o soustavě nekonečně mnoha rovnic. Co se v této analogii během řešení stalo? Představme si, že si procházíme náš nekonečný seznam rovnic pro jednotlivá reálná čísla. Pozastavíme-li se u těch vztahů, kde jsme za x dosazovali nulu a za y nějaké číslo $\star$, zjistíme, že právě tyto rovnice umíme snadno vyřešit. Budou vypadat přesně jako $f(\star) = f(0) + \star$ a budou záviset na parametru $f(0)$. Musíme se však postarat, aby platily i všechny zbývající rovnice, které jsme doposud přehlíželi. Přesně tuto roli zastává v úloze zkouška, která ukáže, že všechny ostatní rovnice budou platit, ať je hodnota $f(0)$ jakákoliv.

Uvědomme si však, že obrácená implikace, tj. „když má funkce f následující vlastnosti, tak řeší rovnici“, obecně platit nemusí. Ukažme si to opět na příkladu.

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které vyhovují rovnici

$$f(x^2) = x + f(y) - \frac{y}{f(y)}$$

pro všechna x, y z definičního oboru f.

Řešení. Nechť f je funkce, která vyhovuje zadání. Protože definičním oborem f jsou pouze kladná reálná čísla, můžeme provést tzv. *substituci* neboli dosazení $[\sqrt{x}, 1]$ místo $[x, y]$. Funkce f tedy musí splňovat

$$f\big((\sqrt{x})^2\big) = \sqrt{x} + f(1) - \frac{1}{f(1)}.$$

Hodnota $f(1) - 1/f(1)$ je konstantní, označme ji c. Potom f musí mít tvar

$$f(x) = \sqrt{x} + c.$$

Zkouškou neboli dosazením do zadání zjistíme, že jediná funkce, která zadání vyhovuje, je pro $c = 0$, tj. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. □

Co se stalo nyní? V myšlenkách si opět můžeme přepsat úlohu do nekonečně mnoha rovnic. Dál jsme postupovali podobně, všimli si význačnějších vztahů, které jsme uměli přímo vyřešit v závislosti na jednom parametru $f(1)$. Když jsme však požadovali rovnost v ostatních rovnicích, požadavky na $f(1)$ byly striktnější a šlo z nich hodnotu $f(1)$ dopočítat.

Vidíme tedy, že provádět zkoušku je vždy nutné a za její opomenutí se ztrácejí body.

V předchozí úloze jsme provedli víc než jen dosazení konstanty za proměnnou, nahradili jsme proměnnou nějakou její funkcí. Tento krok ještě není zcela jasný a nemusí být vidět, proč jsme jej mohli beztrestně provést. Nové světlo by sem měla vnést další kapitola, která se celá věnuje substitucím.

Substituce

Tento princip je elementární a zcela zásadní pro řešení funkcionálních rovnic. Téměř v každé úloze provedeme alespoň jednou nějaké dosazení nebo substituci. Klíčová pro nás bude následující již použitá formulace: „Pokud funkce f splňuje zadanou rovnici pro všechna $[x, y]$ z definičního oboru, pak tuto rovnici splňuje i pro nějaký speciální případ“. Přesně tuto úvahu jsme provedli v úloze 3. Podle tohoto schématu tedy můžeme snadno dosazovat konstanty z definičního oboru funkce f.

Ne vždy však dostaneme jediným dosazením přímo tvar řešení. Většinou je třeba zkoušet více dosazení, některá nám totiž mohou poskytnout jen částečné informace, jako třeba hodnotu ve vybraných bodech. Jen o málo složitější a méně přímočarý je příklad následující.

Úloha 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(xy+1) + f(x+y) = \big(f(x)+1\big)(y+1).$$

Řešení. Předpokládejme, že f řeší úlohu pro každé dosazení $x, y \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li dvojici $[0, 0]$ dostaneme

$$f(0+1) + f(0) = \big(f(0)+1\big)(0+1)$$

neboli $f(1) = 1$. Dosazením $[0, 1]$ a ze znalosti hodnoty $f(1)$ obdržíme

$$f(1) + f(1) = \big(f(0)+1\big)(1+1),$$

tedy $f(0) = 0$. Nyní dosadíme-li dvojici $[0, x]$, ihned dostáváme, že

$$f(1) + f(x) = \big(f(0)+1\big)(x+1),$$

čili $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. O správnosti řešení se přesvědčíme zkouškou. □

Než pokročíme k dalšímu výkladu, měli bychom se přesvědčit, že rozumíme jednoduchým substitucím a umíme je aplikovat v příkladech.

Cvičení 1. Nalezněte všechny funkce definované na celém $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ splňující rovnici

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2$$

pro každou dvojici $[x, y] \in \mathbb{R}^2$.

Cvičení 2. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Zobecněním úvahy o dosazování okamžitě vidíme, že můžeme provádět i složitější substituce jako například $[-x, 0]$ nebo $[x^3 - x, y/2]$ nebo ještě komplikovaněji jako třeba $[x-y, x+y]$ či $[y, f(x)]$. Musíme však dbát jediné podmínky a to, aby výsledná substituce měla vždy smysl, tj. aby každé dosazení x a y bylo v definičním oboru funkce f.

Co to znamená v úlohách? Máme-li například řešit funkcionální rovnici zadanou na $\mathbb{R}^+$, nemůžeme dosazovat nulu nebo místo x psát $-x$.

Předveďme si výše zmíněný recept na následujícím příkladu.

Úloha 6. Nalezněte všechny funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x+y)-f(x-y)=xy.$$

Řešení. Nechť f splňuje zadanou rovnici pro všechna x, y. Pak rovnice musí platit i pro hodnoty $[x/2,x/2]$, proto

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)=\frac{x^2}{4}.$$

Odtud vidíme, že f musí být tvaru $f(x)=x^2/4+c$, kde c je reálná konstanta. Zkouška ukáže, že tato funkce vyhovuje pro každé $c\in\mathbb{R}$. □

Vraťme se v úvahách opět k nekonečným soustavám rovnic. Už víme, že dosazení konstanty je stejné, jako když se podíváme na vybrané rovnice. Co se však děje při substitucích? Podívejme se třeba na příklad 4. Místo kladného reálného čísla x jsme vždy psali číslo $\sqrt{x}$. Tedy každé číslo z definičního oboru jsme zobrazili zase zpět do stejného oboru a žádné jsme při tom nevynechali (říkáme též, že $\sqrt{\ }$ je *bijekce* na $\mathbb{R}^+$, viz kapitola *Vlastnosti funkcí*). A co toto zobrazení provede s našimi rovnicemi? Vůbec nic. Pouze trochu „zamíchá“ s jejich „pořadím“, avšak jejich tvar zůstane stejný. O žádné vztahy jsme nepřišli a žádné nepřibyly. Tato substituce tedy byla čistě technická, aby se nám na funkcionální rovnici lépe koukalo, ve skutečnosti nic nového nepřináší.

V předchozí úloze jsme postupovali odlišně. Nejprve jsme se podívali na vybrané rovnice, ve kterých bylo x rovno y. Odtud jsme usoudili, že $f(2x)=x^2+c$ pro všechna reálná x. Nyní už vidíme, že stačí provést stejnou kosmetickou úpravu jako v úloze 4, totiž místo x psát $x/2$, čímž se opět v rovnicích nic nemění.

Při substitucích však zároveň musíme dbát na to, abychom definiční obor příliš nezúžili. Může se totiž stát, že po substituci obdržíme rovnici, která platí jen na nějaké části definičního oboru funkce f. Tento problém dobře ilustruje následující příklad.

Úloha 7. Najděte všechny funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x-y^2)=f(x)-y^2.$$

Řešení. Buď f funkce splňující zadání pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$. Pak pro $x\geq 0$ dosaďme $[x,\sqrt{x}]$ a obdržíme

$$f\bigl(x-(\sqrt{x})^2\bigr)=f(x)-(\sqrt{x})^2,$$

což po úpravě dává $f(x)=x+f(0)$ pro $x\geq 0$. Pro $x<0$ dosaďme $[0,\sqrt{-x}]$ a ihned dostáváme

$$f\bigl(-(\sqrt{-x})^2\bigr)=f(0)-(\sqrt{-x})^2,$$

neboli $f(x)=x+f(0)$, kde $x<0$. Pro $x\geq 0$ a $x<0$ je tvar řešení stejný, lze tedy psát $f(x)=x+c$, $x\in\mathbb{R}$. Zkouškou ověříme, že taková f vyhovuje pro každou konstantu $c\in\mathbb{R}$. □

Vidíme, že již po první substituci nás úloha láká provést zkoušku a prohlásit f za řešení. Uvědomme si však, že tato substituce nám zajistila tvar f pouze pro nezáporná x. Skutečnost, že se tato f dala rozšířit na celé $\mathbb{R}$ se zachováním platnosti zadané rovnice, je pouze příjemnou náhodou. Nemůžeme tak beztrestně úlohu prohlásit za vyřešenou, neboť by mohla existovat jiná funkce, která by se na záporných číslech od f lišila.

Nejsme-li si jisti, že můžeme substituci provést, nikdy neuškodí napsat si tvar substituujících výrazů a určit jejich definiční obor a obor hodnot.

Co bychom však neměli nikdy provést, budeme demonstrovat na následujícím příkladu.

Úloha 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\bigl(x + f(y)\bigr) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y).$$

V prvním kroku každého asi napadne vyzkoušet dosadit $[0, y]$, dostaneme tak, že $f\bigl(f(y)\bigr) = f^2(y) + f(0)$. Nyní je $f(y) \in \mathbb{R}$, tedy označme $x = f(y)$ a obdržíme, že $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, o čemž se přesvědčíme zkouškou.

Kde nastala chyba? První dosazení je zcela jistě správné, vztah $f\bigl(f(y)\bigr) = f^2(y) + f(0)$ platí pro každé $y \in \mathbb{R}$. Problém je v dosazení $x = f(y)$, nejde totiž o substituci, pouze jsme si jinak označili symbol $f(y)$. Vztah $f(x) = x^2 + c$ tedy platí pouze pro $x \in \mathrm{Rng}(f)$, o kterém však doposud nebyla žádná řeč a nic o něm nevíme. Zřejmě funkce $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ splňuje zadanou rovnici, její obor hodnot je však jednobodový a platí pro něj jistě rovnice $f(x) = x^2 + c$ pro $c = 0$. Stejně tak bychom mohli říci, že pro toto řešení a $x \in \mathrm{Rng}(f) = \{0\}$ platí $f(x) = \sin(x)$ či cokoliv jiného. Bude to sice pravda, ale k ničemu nám to není.

Jak se tohoto problému zbavit, je vidět záhy.

Řešení. Funkce x^2 je na $\mathbb{R}$ zřejmě řešením zadané rovnice. Zvolme substituci $f(x) = x^2 + g(x)$. Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned}
\bigl(x + f(y)\bigr)^2 + g\bigl(x + f(y)\bigr) &= x^2 + g(x) + \bigl(y^2 + g(y)\bigr)^2 + 2x\bigl(y^2 + g(y)\bigr)\\
\bigl(x + y^2 + g(y)\bigr)^2 + g\bigl(x + y^2 + g(y)\bigr) &= \bigl(x + y^2 + g(y)\bigr)^2 + g(x)\\
g\bigl(x + y^2 + g(y)\bigr) &= g(x),
\end{aligned}$$

a tedy funkce g musí být periodická (viz kapitola *Vlastnosti funkcí*) pro každou periodu délky $y^2 + g(y)$. Je-li tato perioda pro každé $y \in \mathbb{R}$ nulová, je $g(y) = -y^2$ a $f(y) = y^2 + g(y) = 0$ pro všechna y. Předpokládejme nyní, že je tato perioda nenulová, označme ji p. Dosaďme nyní dvojici $[x, y + p]$ do posledního vztahu a upravujme

$$g(x) = g\bigl(x + (y + p)^2 + g(y + p)\bigr) = g\bigl(x + p(p + 2y) + y^2 + g(y)\bigr) = g\bigl(x + p(p + 2y)\bigr).$$

Vidíme, že g je také periodická s periodou $p(p + 2y)$, která však může nabývat libovolné hodnoty. Tudíž pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ je $g(x) = g(y)$, a proto g je na $\mathbb{R}$ konstantní. Funkce f tedy může mít tvar $f(x) = x^2 + g(x) = x^2 + c$. Zkouškou ověříme, že tato funkce spolu s funkcí $f(x) = 0$ jsou skutečně řešením. $\square$

V následujícím případě provedeme substituci, která vypadá na první pohled stejně, totiž $y = f(x)$. Jak však uvidíme, toto nahrazení bude probíhat „opačným směrem“ než v předchozí úloze a bude tak naprosto korektní.

Úloha 9. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f\bigl(y - f(x)\bigr) = f(y) - f\bigl(f(x)\bigr) + f(x) - x.$$

Řešení. Buď f funkce splňující zadání pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$. Protože $f(x) \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom}(f)$, lze dosadit dvojici $[x, f(x)]$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$f\bigl(f(x) - f(x)\bigr) = f\bigl(f(x)\bigr) - f\bigl(f(x)\bigr) + f(x) - x,$$

což po úpravě dává $f(x) = x + c$, $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou ověříme, že taková funkce vyhovuje pro každé $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Ve světě nekonečných soustav bychom řekli, že jsme se podívali jen na ty rovnice pro x, kde y nabývá hodnot $f(x)$. Ty opět umíme snadno vyřešit a ve zbývajících rovnicích pouze zkontrolujeme rovnost.

Nabízí se otázka, proč jsme volili zrovna substituci $[x, f(x)]$. Její aplikací úloha okamžitě přestala vzdorovat, ale jak jsme přišli na to, že zrovna tohle dosazení bude to pravé? Obecně se totiž vyplatí dosazovat tak, abychom dostali některé výrazy konstantní, či aby se co nejvíce členů odečetlo. Budeme-li se na předchozí rovnici chvíli dívat, uvidíme, že dosazením $y = f(x)$ dosáhneme obou kýžených cílů. V obtížnějších úlohách pochopitelně není klíčové dosazení vidět hned, chce to chvíli cviku a zkoušení. Je též lepší chvíli nad rovnicí přemýšlet, než hned zběsile dosazovat.

V tuto chvíli již máme dostatek poznatků k tomu, abychom mohli řešit složitější úlohy. V následujících cvičeních si vždy rozmyslete a zdůvodněte, proč je vámi volená substituce korektní.

Cvičení 3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(x + f(y)\big) = x^2 + f^2(y) + 2xf(y).$$

Cvičení 4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x^2 + y) + f\big(f(x) - y)\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2.$$

Stejně jako jsme v úvodu kapitoly viděli, že jedno dosazení nemusí vždy stačit, nikoho nepřekvapí, že jedna substituce nám vždy nemusí pomoci řešení nalézt. V následující úloze si navíc ukážeme, že funkcionální rovnice můžeme stejně jako běžné rovnice sčítat či odčítat. Jistě už tušíte, co se děje v pozadí: Ano, budeme „naráz“ sčítat či odčítat nekonečně mnoho rovnic pro čísla.

Úloha 10. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x^2 + y) + f\big(f(x) - y\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2.$$

Řešení. Dosazujme postupně

$$\begin{aligned}
&[x, f(x)]: && f\big(x^2 + f(x)\big) + f(0) = 2f\big(f(x)\big) + 2f^2(x),\\
&[x, -x^2]: && f(0) + f\big(x^2 + f(x)\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2x^4.
\end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic okamžitě dostáváme $2f^2(x) = 2x^4$, neboli $f(x) = \pm x^2$. Označme si jako M množinu těch $x \in \mathbb{R}$, kde je $f(x) = -x^2$, pak jistě $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R} \setminus M$. Chceme ukázat, že množina M obsahuje pouze nulu. Zřejmě $f(0) = 0$. Pak dosazením $[0, x]$ dostáváme

$$f(x) + f(-x) = 2x^2.$$

Protože je pro každé nenulové x pravá strana kladná, totéž musí platit i pro levou stranu, kde máme čtyři možnosti pro volbu znamének. Pouze volba $x^2 + x^2 = 2x^2$ dokáže tuto platnost zaručit. Musí tedy platit, že $f(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, o čemž se snadno přesvědčíme zkouškou. $\square$

Tento příklad by pro nás měl být varováním, že z platnosti $f(x) = \pm x^2$ neplyne, že buďto $f(x) = x^2$, nebo $f(x) = -x^2$ na celém $\mathbb{R}$. Tato implikace samozřejmě platí tzv. bodově, neboli, že pro každé jedno reálné x může být hodnota $f(x)$ buď x^2, nebo $-x^2$. Vyjdou nám tedy jen dva předpisy, je ale chybné usoudit, že existují jen dvě funkce! Ne vždy je tedy vhodné vnímat funkci jako předpis.

Tímto postupem bychom se sice také dobrali výsledku, neboť funkce $f(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ by neprošla zkouškou. To však nic neříká o funkcích, které jsou někde na M definovány jedním předpisem a jinde druhým.

Srovnejme tuto úlohu s následujícím příkladem.

Úloha 11. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ splňující pro každé přípustné x rovnici

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)\bigl(1 + xf(x)\bigr).$$

Řešení. Všimněme si, že rovnice je polynom třetího stupně v proměnné $xf(x)$. Snadnou úpravou na součin dostáváme

$$\bigl(xf(x) + 1\bigr)\bigl(xf(x) - 1\bigr)^2 = 0.$$

Odtud pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ musí platit $f(x) = 1/x$ nebo $f(x) = -1/x$. Buď nyní $M \subseteq \mathbb{R}^+$ libovolná množina. Pak definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in M, \\ -\frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}^+ \setminus M, \end{cases}$$

která je řešením zadané rovnice. Všechny úpravy byly ekvivalentní, zkoušku tedy není třeba provádět. □

Tento příklad sice nebyl na procvičení substituce, velmi dobře však demonstruje, na co si dávat pozor. Zkuste si samostatně vyřešit následující cvičení.

Cvičení 5. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f^2(x) + 2}{2x^2 + 1}.$$

V úloze 10 jsme se již zmínili o jednoduché aritmetice funkcionálních rovnic. Podívejme se nyní na tuto metodu trochu blíže. Ne vždy totiž jde řešení dostat pouhým sečítáním rovnic, někdy musíme přejít i k jejich soustavám.

Úloha 12. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ splňující pro x různá od 0 a 1

$$f(x) + f\Bigl(\frac{1}{1 - x}\Bigr) = x.$$

Řešení. Buď f řešením úlohy. Dosaďme postupně $x_1 = t$, $x_2 = \frac{1}{1-t}$ a $x_3 = 1 - \frac{1}{t}$. Snadno se ověří, že pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ jsou všechna čísla různá od 0 a 1. Po dosazení x_2 a x_3 do $1/(1 - x)$ nejprve upravujme

$$\frac{1}{1 - x_2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-t}} = \frac{t - 1}{t} = 1 - \frac{1}{t} = x_3, \qquad \frac{1}{1 - x_3} = \frac{1}{1 - \bigl(1 - \frac{1}{t}\bigr)} = t = x_1.$$

Dostáváme tedy soustavu

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= t, \\ f(x_2) + f(x_3) &= \frac{1}{1 - t}, \\ f(x_3) + f(x_1) &= 1 - \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Sečtením první a třetí a odečtením druhé rovnice dostáváme řešení ve tvaru

$$f(t) = f(x_1) = \frac{t^3 - t + 1}{2t(t - 1)},$$

které vyhovuje zadání. □

Přijít na trik v právě vyřešené úloze není úplně snadné. Velmi pomůže znalost, že pro výrazy x a $1/(1-x)$ existuje v řešení popsaný „3-cyklus“, neboli posloupnost třech dosazení, po kterých dostaneme původní výraz. Tato úloha je velmi typová, narazíme-li tedy na podobnou, zkusme najít nějaký vhodný „cyklus“ dosazení. Často je to jediný způsob, jak úlohu řešit.

Cvičení 6. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y.$$

Cvičení 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ platí

$$f\Big(\frac{x-3}{x+1}\Big) + f\Big(\frac{x+3}{1-x}\Big) = x.$$

Další standardní trik, který si představíme, je využívání symetrií v rovnicích. Výraz nazveme symetrickým (v proměnných x_1, x_2 až x_n), pokud se libovolnou záměnou proměnných nezmění. Podstatou této metody je pozorování, že pokud se dva výrazy rovnají a jeden z nich je symetrický, pak se ani druhý po záměně proměnných nezmění. Aplikujme toto pozorování na následující příklad.

Úloha 13. Najděte všechny reálné funkce f, které splňují pro každá x, y rovnici

$$f\big(f(x) + f(y)\big) = f(x) + y.$$

Řešení. Předpokládejme, že f řeší úlohu. Levá strana zadané rovnice je symetrická v x a y, totéž musí platit pro pravou stranu. Máme tedy, že

$$f(x) + y = x + f(y).$$

Dosadíme-li za $y = 0$ a položíme-li $c = f(0)$, pak máme $f(x) = x + c$, $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou se přesvědčíme, že rovnici vyhovuje tato funkce pouze pro $c = 0$, tedy $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. □

Pochopitelně ne vždy je rovnice nachystaná v symetrickém tvaru, někdy dá i dost práce ji do takového tvaru upravit.

Úloha 14. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$\big(1 + yf(x)\big)\big(1 - yf(x+y)\big) = 1.$$

Řešení. Buď f řešení zadané rovnice. Roznásobením a dělením $y > 0$ získáme $f(x+y)\big(1+yf(x)\big) = f(x)$. Jelikož $yf(x) > 0$, lze dělit výrazem $1 + yf(x)$ a obdržíme rovnost se symetrickou levou stranou

$$f(x+y) = \frac{f(x)}{1 + yf(x)}.$$

Využitím symetrie dostaneme $f(x)\big(1+xf(y)\big) = f(y)\big(1+yf(x)\big)$. Dosaďme za $y = 1$ a označme $c := f(1)$, potom $f(x) = c/(1 + xc - c)$. Jistě $c > 0$ a aby $f(x) > 0$, musí být $0 < c < 1$. Dělením c lze navíc řešení přepsat do tvaru $f(x) = 1/(x + \tilde{c})$, kde $\tilde{c} = 1/c - 1 \in \mathbb{R}^+$. Zkouškou se přesvědčíme, že tato f je řešením zadané rovnice pro každé takové $\tilde{c}$. □

Použití matematické indukce

Tato metoda umožňuje odvodit tvar řešení pro racionální čísla. Nejlépe si ji představíme na již zmíněné úloze 1. Podle ní se této metodě říká také Cauchyho metoda.

Úloha 1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Předpokládejme, že f je nějaké řešení této rovnice. Dosadíme-li dvojici $[0,0]$, obdržíme ihned $f(0) = 0$. Dále postupně dosazujme dvojice $[x,x]$, $[2x,x]$, …, $[(n-1)x, x]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ indukcí dostáváme

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x) \\ f(3x) &= f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 3f(x) \\ &\vdots \\ f(nx) &= f\big((n-1)x + x\big) = f\big((n-1)x\big) + f(x) = nf(x). \end{aligned}$$

Právě dokázaný vztah $f(nx) = nf(x)$ platný pro přirozená n a racionální x použijeme hned dvakrát. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$nf(1) = f(n) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = mf\Big(\frac{n}{m}\Big).$$

Podělením obou stran číslem m dostáváme vztah

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} f(1), \quad m, n \in \mathbb{N},$$

neboli

$$f(x) = xf(1), \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Dosazením dvojice $[x, -x]$ do původní rovnice obdržíme vztah $f(x) = -f(x)$. Označíme-li si navíc $f(1) = c$, pak pro funkci f platí $f(x) = cx$ pro všechna racionální x. Zkouška ukáže, že taková funkce splňuje zadání pro každé reálné c. □

Z příkladu je vidět, proč tato metoda funguje jen pro čísla racionální. Funkce, které jsme nalezli, lze sice stejně tak rozšířit na celé $\mathbb{R}$ za použití stejného předpisu a rovnice bude platit pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$, ovšem nic nám nezaručuje, že žádné jiné funkce už rovnici neřeší. Jak jsme již naznačili v úvodu, další takové reálné funkce splňující Cauchyho rovnici existují, tento postup nám k nim ale cestu neukazuje.

Zažijme si tuto metodu ještě na dalším, podobném příkladě.

Úloha 15. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pro všechny dvojice $[x, y] \in \mathbb{Q}^2$.

Řešení. Předpokládejme, že f je nalezené řešení. Nabývá-li tato funkce v nějakém bodě x_0 nulové hodnoty, pak dosazením $[x - x_0, x_0]$ dostáváme

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$$

a f je funkce identicky nulová, tj. $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{Q}$. Zabývejme se nyní již pouze nenulovými řešeními. Nejprve si všimněme, že $f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f^2(x/2) > 0$, čili f nabývá pouze kladných hodnot. Nyní nasadíme indukci, podobně jako v předchozím případě. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{Q}$ tedy platí

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = f(x)f(x) = f^2(x) \\ f(3x) &= f(2x+x) = f^2(x)f(x) = f^3(x) \\ &\vdots \\ f(nx) &= f\big((n-1)x + x\big) = f^{n-1}(x)f(x) = f^n(x). \end{aligned}$$

Tento vzorec nyní dvakrát použijeme a pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$f^n(1) = f(n) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = f^m\left(\frac{n}{m}\right).$$

Všechna tato čísla jsou kladná, můžeme je tedy m-krát odmocnit a ihned vidíme, že $f(q) = f^q(1)$ pro kladná racionální q. Dosazení $[0, 0]$ do původní rovnice nám poskytne informaci o hodnotě $f(0)$, neboť $f(0) = f^2(0)$. Protože $f(0) > 0$, musí nutně $f(0) = 1$. Informaci o záporných racionálních číslech nám dá dosazení $[q, -q]$, tj. $1 = f(0) = f(q)f(-q)$. Odtud ihned vyjádříme

$$f(-q) = \frac{1}{f(q)} = \frac{1}{f^q(1)} = f^{-q}(1)$$

pro $q \in \mathbb{Q}^+$. Pokud navíc pojmenujeme $f(1) = c > 0$, pak $f(x) = c^x$ pro všechna racionální čísla. Zkouškou ověříme, že f skutečně rovnici řeší pro všechna $c > 0$. Připočteme-li ještě triviální řešení $f(x) \equiv 0$, můžeme psát, že $f(x) = c^x$ pro libovolné $c \geq 0$ (a mlčky přijmeme, že $0^0 = 0$). $\square$

Žádnému čtenáři jistě neuniklo několik podobností s předchozí úlohou. Nejprve jsme pomocí matematické indukce odvodili důležitý vztah pro kladná celá čísla, dále jsme jeho platnost rozšířili i pro kladná racionální, posléze pro všechna racionální čísla. Stejně tak bychom postupovali i u dalších podobných příkladů.

Cvičení 8. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, pro které platí $f(1) = 2$ a pro každé $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

Abychom mohli platnost rozšířit na celá reálná čísla, museli bychom mít nějaké další omezující předpoklady na funkci f. Dříve než k takovému omezení přistoupíme, představíme si některé obecné vlastnosti funkcí, bez kterých se v dalším textu neobejdeme.

Vlastnosti funkcí

Některé vlastnosti funkcí se používají tak často, že stojí za to si je pojmenovat. Mnohé z vlastností je možné vyslovit obecněji bez ohledu na to, kde jsou definovány, my si však pro jednoduchost tyto pojmy zavedeme pouze pro reálné funkce, jejich zobecnění je pak přímočaré.

První sada pojmů se týká symetrií.

Definice. Řekneme, že funkce f je *sudá*, resp. *lichá*, pokud pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$f(x) = f(-x), \quad \text{resp.} \quad f(x) = -f(-x).$$

Definice vlastně říká, že sudé jsou právě ty funkce, které jsou osově souměrné podle osy $\mathcal{O}y$, liché jsou ty středově symetrické podle počátku. Součástí definice je tedy i fakt, že definiční obor f musí být symetrický podle počátku. Příkladem sudé funkce na $\mathbb{R}$ je funkce x^2 či funkce $\cos x$. Mezi liché pak patří například funkce x^3 nebo $\sin x$.

Pokud se nám v úloze podaří zjistit, že hledaná funkce splňuje jednu z těchto vlastností, stačí nám hledat řešení pouze na polovině definičního oboru. Navíc získáme ze substitucí více informací, neboť můžeme snadno z argumentu funkce „odstranit“ minus.

Též se nám může hodit tvrzení, že každou reálnou funkci f lze napsat jako součet sudé a liché funkce, jejich předpisy jsou $\big(f(x)+f(-x)\big)/2$ a $\big(f(x)-f(-x)\big)/2$.

V dalším si zavedeme pojmy, které charakterizují „nabývání hodnot“.

Definice. Řekneme, že funkce f je *prostá*, pokud pro každé $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

Definice. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *na*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ tak, že platí

$$f(x) = y.$$

Definice. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *bijekcí*, pokud f je zároveň prostá a na.

Prostá funkce tedy nabývá každé hodnoty nejvýše jednou, tj. neplatí pro ni $x \neq y$ a zároveň $f(x) = f(y)$. Funkce, která je na, pak každé hodnoty nabývá alespoň jednou, tj. „vyčerpá“ celé Y. Zkráceně můžeme zapisovat, že $\mathrm{Rng}(f) = Y$. Bijekce je pak spojení obou, tedy každé hodnoty z Y se nabude právě jednou. Tomuto zobrazení někdy říkáme *vzájemně jednoznačné* a výstižněji tak říká, že f určuje jednoznačné dvojice mezi X a Y.

A jak budeme tyto vlastnosti využívat v úlohách? Pokud o funkci víme, že je prostá, můžeme tak snadno z rovnosti funkčních hodnot odvodit rovnost argumentů. Je-li funkce na, můžeme provádět složitější substituce, které by jinak nebyly korektní (viz úloha 8). Bijekce spojuje obě tyto výhody.

Následující úlohy v sobě nenesou nějak hluboké myšlenky, mají pouze demonstrovat to, jak se s právě zavedenými pojmy pracuje a co z nich lze v úloze vytěžit.

Úloha 16. Najděte všechny bijekce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f\Big(f(x) + f\big(f(y)\big)\Big) = f\Big(f\big(f(x)\big) + f(y)\Big).$$

Řešení. Buď f řešením zadané rovnice. Protože f je prostá, musí platit

$$f(x) + f\big(f(y)\big) = f\big(f(x)\big) + f(y).$$

Protože f je navíc na, pro každé $z \in \mathbb{R}$ existuje $y \in \mathbb{R}$ tak, že $z = f(y)$. Můžeme tedy provést substituci $z = f(y)$. Platí tedy

$$f(x) + f(z) = f\big(f(x)\big) + z.$$

Ze stejného důvodu existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, že $f(x_0) = 0$. Odsud dostáváme $f(z) = f(0) + z$, tj. $f(x) = x + c$. Zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje pro každé $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Cvičení 9. Najděte všechny prosté funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(f(x) + y\big) = f(2x^2) + 4f(x)y + 2y^2.$$

Následující úloha se od ostatních liší. Všimněme si, že nebudeme řešit funkcionální rovnici, ale rovnici obyčejnou.

Úloha 17. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje rovnici $f\big(f(x)\big) = x + f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Najděte všechna řešení rovnice $f\big(f(x)\big) = 0$.

Řešení. Zadanou rovnost si upravme na $f\big(f(x)\big) - f(x) = x$. Pokud je nyní $f(x) = f(y)$, pak

$$x = f\big(f(x)\big) - f(x) = f\big(f(y)\big) - f(y) = y$$

a f je prostá. Dosadíme-li do zadání $x = 0$, získáme $f\big(f(0)\big) = f(0)$ a z prostoty platí $f(0) = 0$. Obdrželi jsme tak i platnost $f\big(f(0)\big) = 0$. Nyní pokud existuje ještě nějaké řešení $f\big(f(x)\big) = 0$, pak $f\big(f(x)\big) = f\big(f(0)\big) = f(0)$ a $x = 0$. Tedy jediným řešením je $x = 0$. □

Následující definice klasifikuje funkce podle jejich průběhu, již samotně pojmenování je výmluvné.

Definice. Řekneme, že funkce f je *rostoucí*, resp. *klesající* na svém definičním oboru, pokud pro každé $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y), \qquad \text{resp.} \qquad x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y).$$

Zcela analogicky se definují neostré verse, hovoříme pak o funkci *neklesající*, resp. *nerostoucí*. Splňuje-li nějaká funkce jednu z těchto charakteristik, nazveme ji obecně *monotónní*.

Uvědomme si, že je-li funkce rostoucí, nebo klesající, pak je již prostá.

Cvičení 10. Najděte všechny neklesající funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x

$$f\big(f(x)\big) = x.$$

Následující úloha není o aplikaci nějaké metody pro řešení rovnic, jde o konstrukční úlohu k zamyšlení o monotónních funkcích. Poznamenejme ještě krátce, že „$\circ$“ značí skládání funkcí, se kterým se neustále setkáváme v úlohách, tj. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$, a aby mělo složení smysl, musí být $\mathrm{Rng}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Úloha 18. Najděte příklady reálných funkcí f a g takových, že $g \circ f$ je rostoucí a $f \circ g$ je klesající.

Řešení. Rozdělme $\mathbb{R}_0^+$ na intervaly $I_0 = \langle 0, 1\rangle$ a $I_n = (2^{n-1}, 2^n\rangle$ pro $n = 1, 2, \dots$ a definujme pro $x \in I_n$ $f(x) = (-1)^n x$. Pro $x < 0$ položme $f(x) = f(-x)$. Položme nyní $g(x) = 2f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Ukážeme, že takto zadané funkce mají požadovanou vlastnost. Buď $x \in \mathbb{R}$ libovolné, najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in I_n$, nebo $-x \in I_n$. Pak $2x \in I_{n+1}$, nebo $-2x \in I_{n+1}$ a

$$\begin{aligned} g\big(f(x)\big) &= 2f\big(f(x)\big) = 2\big((-1)^n\big)^2 x = 2x,\\ f\big(g(x)\big) &= g\big(2f(x)\big) = 2(-1)^{n+1}(-1)^n x = -2x \end{aligned}$$

přičemž zřejmě $2x$ je rostoucí a $-2x$ klesající. □

Definice. Řekneme, že funkce f je periodická s periodou p, pokud pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$x + p \in \mathrm{Dom}(f) \qquad \text{a} \qquad f(x) = f(x + p).$$

Zřejmě platí tvrzení, že je-li funkce periodická pro všechny délky period, pak je již nutně konstantní. Obdobně je-li funkce monotónní a periodická, musí být konstantní.

Následující definice spojitosti není elementární, lze se však s tímto pojmem setkat v některých soutěžích či textech, a proto ji pro úplnost uvedeme také. V úlohách však spojitost používat nebudeme.

Definice. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathrm{Dom}(f)$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že platí

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in \big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big).$$

Řekneme, že f je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě $\mathrm{Dom}(f)$.

Definice. Buď $f\colon X \to Y$ prostá funkce. Řekneme, že $f^{-1}\colon Y \to X$ je *inverzní funkcí* k f pokud pro všechna $y \in Y$ a $x \in X$ platí

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; f(x) = y.$$

Úloha 19. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x,$$

kde f^{-1} je inverzní funkce k f.

Řešení. Zřejmě $f(x) = x + d$ je řešením zadané rovnice, protože $f^{-1}(x) = x - d$. Označme si nyní S_d množinu těch bodů x, kde $f(x) = x+d$. Naším cílem bude ukázat, že pokud je S_d neprázdná, pak $S_d = \mathbb{R}$. Ukažme nejprve, že pokud $x \in S_d$, pak také $x + d \in S_d$. Protože $f(x) = x + d$ a $f^{-1}(x + d) = x$, platí $f(x + d) = x + 2d$ a $x + d \in S_d$. Indukcí tak dostáváme, že všechna čísla $x + kd \in S_d$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Ukažme nyní, že pokud je S_d neprázdná, pak $S_{d'}$ je prázdná pro $d' < d$. Přesněji dokážeme, že je-li $x \in S_d$ a

$$y \in \big\langle x + k(d-d'), x + (k+1)(d-d')\big)$$

pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak $y \notin S_{d'}$. Pro spor předpokládejme, že $x \in S_d$, $y \in S_{d'}$ a $x + k(d-d') \le y < x + (k+1)(d-d')$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Upravme nejprve nerovnost do tvaru

$$x + kd \le y + kd' < x + (k+1)d - d'.$$

Protože je f rostoucí, musí platit

$$x + (k+1)d = f(x+kd) \le f(y - kd') = y - (k+1)d'$$

neboli $y \ge x + (k+1)(d-d')$, což je spor. Obdobná úvaha platí pro S_d a $S_{d'}$, kde $d' > d$, neboť role d a d' jsou zaměnitelné. Protože každé $x \in \mathbb{R}$ patří do S_d pro nějaké d a pouze jedna z těchto množin může být neprázdná, musí platit $f(x) = x + d$, $x \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$. □

Cauchyho rovnice

Vraťme se nyní k již zmiňované úloze 2. Vybaveni novými poznatky můžeme tuto úlohu vyřešit, pokud přidáme další předpoklady pro funkci f. Má jistě smysl se tázat, k čemu je to dobré, Cauchyho rovnici přece na žádné soutěži řešit nedostaneme. Krom toho, že si během řešení ukážeme nové metody, vyřídíme Cauchyho problém jednou pro vždy a můžeme si dovolit odkazovat se na něj jako na známé tvrzení. V některých úlohách se nám totiž může stát že ukážeme, že hledaná funkce musí splňovat Cauchyho rovnici (nebo rovnici podobného typu). Pokud navíc máme o naší funkci další rozumné předpoklady nemusíme se s řešením dále zdržovat. Byl by však podvod neseznámit se se známým tvrzením.

Úloha 2. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Již víme, že pro řešení musí platit $f(x) = f(1)x$ pro všechna racionální čísla. Ukážeme, že má-li navíc řešení splňovat jednu z následujících podmínek, pak $f(x) = f(1)x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- f je monotónní na nějakém intervalu,
- f je omezená na nějakém intervalu,
- f je kladná pro $x \geq 0$,
- f je v nějakém bodě spojitá.

Řešení. (Pro monotonii). Označme si $f(1) = c$ a předpokládejme, že $c > 0$, tj. f bude rostoucí (v opačném případě bychom pracovali s rostoucí funkcí $-f$). Chceme ukázat, že $f(x) = cx$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro spor předpokládejme, že existuje takové $x \in \mathbb{R}$, že $f(x) > cx$. Využijeme té vlastnosti racionálních čísel, že mezi každými dvěma různými reálnými čísly je alespoň jedno racionální. Existuje tedy $q \in \mathbb{Q}$ tak, že $f(x)/c > q > x$ neboli $f(x) > cq > cx$. Musí tedy platit

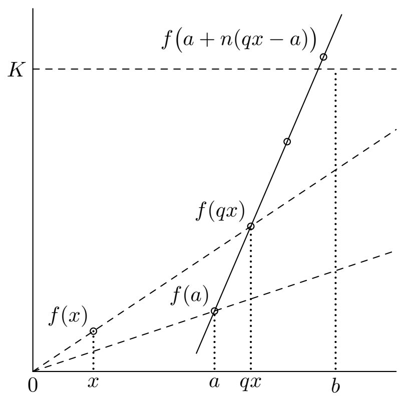
$$cq < f(x) = f(x-q+q) = f(x-q) + f(q) < 0 + f(q) = cq,$$

kde poslední odhad jsme dostali z platnosti $x - q < 0 \Rightarrow f(x-q) < f(0)$. Dostali jsme, že $cq < cq$, což je spor. Zcela obdobně se ukáže, že pro žádné $x \in \mathbb{R}$ neplatí $f(x) < cx$, a jsme hotovi. $\square$

Řešení. (Pro omezenost). Předpokládejme, že f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$, a to konstantou $K > 0$. Nejprve ukažme, že všechny body $[x + np, f(x+np)]$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a $p \in \mathbb{R}$, leží na přímce v rovině tvořené osami $\mathcal{O}x$ a $\mathcal{O}y$. Protože všechna čísla $x + np$ jsou od sebe vzdálená konstantně p, stačí ukázat, že $f(x+p)$ leží přesně mezi $f(x)$ a $f(x+2p)$, tj. že $2f(x+p) = f(x) + f(x+2p)$, což však plyne z rovnosti

$$f(x) + f(x+2p) = f(2x+2p) = 2f(x+p).$$

Funkční hodnoty f jsou tedy rozděleny podle toho, na které přímce leží. Pro spor předpokládejme, že existuje více takových přímek, tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, f(x)]$ leží na přímce neobsahující bod $[a, f(a)]$. Předpokládejme navíc, že přímka příslušná x leží nad přímkou příslušnou a. Pomocí Cauchyovy metody jsme odvodili, že pro každé $q \in \mathbb{Q}$ platí $f(qx) = qf(x)$, tedy na námi zvolené přímce leží i všechny racionální násobky x.



Nyní stačí zvolit q tak blízko a/x, aby přímka procházející $[a, f(a)]$ a $[qx, f(qx)]$ byla dostatečně strmá na to, aby pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo $f\big(a + n(qx - a)\big) > K$, což je spor. $\square$

Řešení. (Pro nezápornost). Postup je velmi podobný předchozímu. Pokud existují dvě různé přímky, najdeme třetí, která bude klesat, až se někde nabude záporné hodnoty. $\square$

Řešení. (Pro spojitost). Je-li funkce spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak volbou $\varepsilon = 1$ dostáváme $\delta > 0$ tak, že platí $x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(a) - 1 \le f(x) \le f(a) + 1$, tj. f je na $(x - \delta, x + \delta)$ omezená a lze se odkázat na řešení pro omezenost. $\square$

Z těchto řešení je dobré si zapamatovat principy, které jsme použili. Zvláště pak úvahy z řešení pro monotonii jsou dobře aplikovatelné i na jiné, podobné úlohy.

Úloha 20. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y).$$

Řešení. Konstantní funkce $f(x) = 0$ a $f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$ jsou zřejmě řešením zadané rovnice. Buď nyní f nekonstantní řešení. Použijme nyní několik jednoduchých dosazení.

$$[x, 0]: \qquad f(x) + f(x)f(0) = f(0) + f(x) + f(0).$$

Protože f je nekonstantní, musí být $f(0) = 0$. Dále

$$[x, 1]: \qquad f(x + 1) = f(x)\big(2 - f(1)\big) + f(1).$$

Po dosazení $x = 1$ do tohoto vztahu vyjádříme $f(2) = cf(1)$, kde $c = 3 - f(1)$ je konstanta. Všimněme si, že $c \neq 1$, jinak by dle předchozí rovnosti byla f konstantní. Nyní dvěma způsoby vyjádříme hodnotu $x + 2$ pomocí dvou vhodných dosazení.

$$\begin{aligned}
[x + 1, 1]: &\qquad f(x + 2) = f(x + 1)\big(2 - f(1)\big) + f(1),\\
[x, 2]: &\qquad f(x + 2) = f(2x) + f(x)\big(1 - f(2)\big) + f(2).
\end{aligned}$$

Výrazy napravo upravíme pomocí předchozích vztahů tak, aby obsahovaly pouze $f(x)$ a $f(2x)$.

$$\begin{aligned}
f(x + 2) &= f(x)\big(2 - f(1)\big)^2 + f(2),\\
f(x + 2) &= f(2x) + f(x)\big(1 - f(2)\big) + f(2).
\end{aligned}$$

Nyní máme rovnice připravené na odečtení, tj.

$$f(2x) = f(x)\big(2 - f(1)\big)^2 - f(x)\big(1 - f(2)\big) = cf(x).$$

Odsud mimo jiné vidíme, že $c \neq 0$. Nyní provedeme poslední dosazení. Využijeme zde právě objeveného vztahu a toho, že $f(4x) = c^2 f(x)$.

$$[2x, 2y]: \qquad cf(x + y) + c^2 f(x)f(y) = c^2 f(xy) + cf(x) + cf(y).$$

Po zkrácení $c \neq 0$ a odečtením od zadané rovnice dostáváme

$$(c - 1)f(x)f(y) = (c - 1)f(xy).$$

Protože $c \neq 1$, dostáváme, že f musí splňovat $f(xy) = f(x)f(y)$ a $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Užitím matematické indukce se snadno ukáže, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. Nyní použijeme standardní obrat pro rozšíření na celé $\mathbb{R}$. Víme, že $f(-x) = -f(x)$, a dosazením $y = -x$ do původní rovnice dostaneme, že $f^2(x) = f(x^2)$, tj. $f \geq 0$, kdykoliv $x \geq 0$. Předpokládejme nyní, že existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) < x$. Najdeme proto $q \in \mathbb{Q}$ tak, že $f(x) < q < x$. Potom platí

$$q > f(x) = f(x-q) + f(q) > f(q) = q,$$

což je spor. Obdobně se ukáže, že neexistuje $x \in \mathbb{R}$ splňující opačnou ostrou nerovnost. Dokázali jsme tedy, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zkouška ukáže, že tato funkce spolu s oběma konstantami 0 a 2 jsou řešením zadané rovnice. □

Nyní můžeme snadno vyřešit podobné úlohy s využitím znalostí o Cauchyově rovnici.

Úloha 21. Najděte všechny rostoucí funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Řešení. Buď f řešením zadané rovnice. Uvažujme funkci $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanou předpisem $g(x) = \log f(x)$. Protože f je rostoucí, také g je rostoucí. Navíc g splňuje Cauchyovu rovnici. Z předchozího víme, že všechna rostoucí řešení Cauchyovy rovnice jsou tvaru $g(x) = cx$, kde $c > 0$. Odsud snadno $cx = \log f(x)$ a $f(x) = a^x$, kde $a > 1$. Zkouškou snadno ověříme, že tyto funkce skutečně vyhovují. □

Úloha 22. Najděte všechny rostoucí funkce $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Buď f řešením. Pracujme s funkcí $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x)$, kde $a > 1$. Potom g je jistě rostoucí a řeší Cauchyovu rovnici, tedy $cx = f(a^x)$, $c > 0$. Odtud $f(x) = \log_b(x)$ pro vhodnou konstantu $b > 1$. Zkouška ukáže, že tato řešení vyhovují zadání. □

Cvičení 11. Najděte všechny rostoucí funkce $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Řešení vybraných obtížných úloh

V následující sekci se nebudeme obecně věnovat žádným dalším metodám, v každé úloze se však objevuje nějaký nový trik, který stojí za to si předvést a zapamatovat.

Úloha 23. Nejděte všechny funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ nerovnost

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

Řešení. Dosadíme-li $[1, 1, 1]$, dostaneme, že

$$f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{4}, \quad \text{tj.} \quad 0 \geq \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2,$$

odkud $f(1) = 1/2$. Stejně se ukáže, že $f(0) = 1/2$.

Dosazením $[x, 1, 1]$ a $[x, 0, 0]$ obdržíme

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x) \geq \frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(x) \geq \frac{1}{4}.$$

Úpravou první rovnice máme $f(x) \geq 1/2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, z druhé pak opačnou nerovnost. Zkouška ukáže, že $f(x) = 1/2$ je skutečně řešením na $\mathbb{R}$. □

Úloha 24. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f(y) = f\big(f(x)f(y)\big).$$

Řešení. Předpokládejme, že f řeší úlohu, a označme si $M = f[\mathbb{R}] = \mathrm{Rng}(f)$. Ze zadání plyne, že pokud $x \in M$ a $y \in M$, pak i $x + y \in M$ a indukcí i $nx \in M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Buď nyní $y \in M$ libovolné. Dle pozorování existují reálná čísla a, b a c taková, že

$$f(a) = y, \quad f(b) = 2y \quad \text{a} \quad f(c) = 4y.$$

Nyní, pokud dosadíme do zadané rovnice

$$[a, c]: \qquad 5y = f(a) + f(c) = f\big(f(a)f(c)\big) = f(4y^2),$$
$$[b, b]: \qquad 4y = f(b) + f(b) = f\big(f(b)f(b)\big) = f(4y^2),$$

odkud ihned máme $4y = 5y$ a $y = 0$. Celkem tedy $M = \{0\}$ a $f(x) = 0$ pro všechna x, o čemž se přesvědčíme zkouškou. □

Úloha 25. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(xf(x) + f(y)\big) = y + f^2(x).$$

Řešení. Buď f řešením úlohy. Dosazením $[0, y]$ dostáváme, že $f\big(f(y)\big) = y + f^2(0)$. Pravá strana je na, totéž musí platit i pro levou. Existuje tedy $t \in \mathbb{R}$ takové, že $f(t) = 0$. Dosazením $[t, y]$ získáme $f\big(f(y)\big) = y$ a dosazením $[0, t]$ dostaneme $f(0) = t + f^2(0)$. Celkem tedy

$$t = f\big(f(t)\big) = f(0) = t + f^2(0)$$

a $f(0) = 0$. Navíc pokud $f(x) = f(y)$, pak

$$x = f\big(f(x)\big) = f\big(f(y)\big) = y$$

a f je bijekce. Dosazení $[f(x), y]$ dává

$$f\big(f(x)x + f(y)\big) = y + x^2,$$

odkud porovnáním se zadanou rovnicí dostaneme $f^2(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní máme dvě možnosti, $f(1) = \pm 1$. Dosazením $[1, y]$ dostaneme

$$f\big(\pm 1 + f(y)\big) = y + 1,$$

navíc jsme použili takt, že pokud $f(1) = -1$, pak $f(-1) = 1$, protože f musí být prostá. Umocněním předchozí rovnosti na druhou dostáváme

$$1 + 2y + y^2 = (1+y)^2 = f^2\big(\pm 1 + f(y)\big) = \big(\pm 1 + f(y)\big)^2 = 1 \pm 2f(y) + y^2,$$

odkud přímo plyne, že $f(x) = x$ nebo $f(x) = -x$. Zkouška ukáže, že obě řešení vyhovují. □

Cvičení 12. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + f^2(x).$$

Úloha 26. Nalezněte všechny monotónní funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vyhovující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$f(xy) f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1.$$

Řešení. Buď f řešením zadané rovnice. Určeme nejprve hodnotu $f(1)$.

$$[1, x]: \qquad f(x) f\big(f(x)\big) = 1,$$
$$\big[f\big(f(x)\big), f(x)\big]: \qquad f\Big(f\big(f(x)\big)f(x)\Big)f(1) = 1,$$

odkud $f(1) = 1$, jelikož $\operatorname{Rng}(f) \subseteq \mathbb{R}^+$. Předpokládejme nyní, že f nabývá jedničky pro nějaké $t \in \mathbb{R}^+$ a $t \neq 1$. Potom po dosazení $[x, t]$ a $[x, 1]$ máme

$$f(xt) f\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 = f(x) f\Big(\frac{1}{x}\Big) \quad \text{a} \quad f(x) = f(xt).$$

Postupným dosazováním $x = \ldots t^{-3}, t^{-2}, t^{-1}, 1, t, t^2, t^3, \ldots$ dostaneme

$$\cdots = f\left(\frac{1}{t^3}\right) = f\left(\frac{1}{t^2}\right) = f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 = f(1) = f(t) = f(t^2) = f(t^3) = \cdots$$

Protože f musí být monotónní a pro každé $m \in \mathbb{Z}$ je $f(t^m) = 1$, musí již být $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$. Kdyby totiž existovalo číslo y tak, že $f(y) \neq 1$, pak bychom k němu našli $m \in \mathbb{Z}$ takové, že $y \in [t^m, t^{m+1}]$, resp. $y \in [t^{m+1}, t^m]$ pro $t < 1$. Ovšem v krajních bodech tohoto intervalu obsahujícího y nabývá f jedné, a proto $f(y) = 1$, což je spor.

Nyní nechť $f(x)$ nenabývá jedničky jinde než pro $x = 1$. Pak volme substituci

$$[f(x), x]: \qquad 1 = f\big(xf(x)\big)f(1) = f\big(xf(x)\big).$$

Odtud již musí platit $f(x) = 1/x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou se přesvědčíme, že funkce $f(x) = 1/x$ a $f(x) = 1$ vyhovují zadání. □

Úloha 27. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(f(x)\big) + af(x) = b(a+b)x,$$

kde a, b jsou kladné reálné konstanty.

Řešení. Protože známe vztah x, $f(x)$ a $f\big(f(x)\big)$ a obor hodnot je omezený, můžeme s výhodou použít rekurentní vztahy. Zvolme $x_0 \geq 0$ libovolně a definujme rekurentní posloupnost $x_n = f(x_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$. Ze zadání víme, že $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ musí splňovat

$$x_{n+2} = -ax_{n+1} + b(a+b)x_n$$

pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Řešením této diferenční rovnice je každá posloupnost

$$x_n = c_1 b^n + c_2(-a-b)^n,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Navíc víme, že $0 \le x_0 = c_1 + c_2$ a $0 \le x_1 = c_1 b - c_2(a+b)$. Odtud máme, že $c_2 = 0$, tedy $x_0 = c_1$ a $f(x_0) = x_1 = bc_1 = bx_0$. Protože x_0 bylo na začátku zvoleno libovolně, musí platit, že $f(x) = bx$ pro každé $x \in \mathbb{R}^+$, o čemž se přesvědčíme zkouškou. □

Cvičení 13. Najděte všechny funkce $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x.$$

Úloha 28. Najděte vsechny funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f\big(f(x)\big) = x^2 - 2.$$

Řešení. Označme si funkci na pravé straně jako g. Všimněme si, že g má právě dva pevné body, tj. existují dvě různá $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $g(a) = a$ i $g(b) = b$. Zobrazení $g \circ g$ má čtyři pevné body, již zmiňované a, b a navíc nějaké $c, d \in \mathbb{R}$. Naším cílem bude ukázat, že neexistuje zobrazení f takové, že $f \circ f = g$.

Označme si $y = g(c)$. Potom musí platit $c = g\big(g(c)\big) = g(y)$ a $y = g(c) = g\big(g(y)\big)$ a y je pevným bodem zobrazení $g \circ g$, musí tedy $y \in \{a, b, c, d\}$. Je-li $y = a$, pak $a = g(a) = g(y) = c$ vede ke sporu, je-li $y = b$, pak obdobně $b = c$ je sporné. Jistě $y \neq c$, neboť c není pevným bodem g, a proto nutně $g(c) = d$ a ze stejných důvodů $g(d) = c$.

Nyní z původní rovnice odvoďme důležitý vztah

$$g\big(f(x)\big) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f\big(g(x)\big),$$

kde první rovnost plyne z dosazení $f(x)$ za x a druhá je dosazení levé i pravé strany do f. Nyní je-li $x \in \{a, b\}$, pak

$$f(x) = f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$$

a $f(x) \in \{a, b\}$. Předpokládáme-li, že $x \in \{c, d\}$, pak

$$f(x) = f\Big(g\big(g(x)\big)\Big) = g\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = g\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

a $f(x) \in \{a, b, c, d\}$. Sledujme nyní hodnotu $f(c)$.

- Je-li $f(c) = a$, pak $f(a) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$, spor.
- Je-li $f(c) = b$, pak $f(b) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$, spor.
- Je-li $f(c) = c$, pak $c = f(c) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$, spor.

Musí tedy platit $f(c) = d$. Potom $f(d) = f\big(f(c)\big) = g(c) = d$ a $d = f(d) = f\big(f(d)\big) = g(d) = c$, což je ve sporu s předchozím pozorováním a funkce f splňující zadání neexistuje. □

Úloha 29. Najděte všechny funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos(y).$$

Řešení. Buď f řešením. Pak f lze zapsat jako $f = g + h$, kde g je sudá funkce a h lichá. Rovnice pak přejde do tvaru (1). Dosazením $[-x, -y]$ pak obdržíme tvar (2).

$$g(x+y) + g(x-y) + h(x+y) + h(x-y) = 2\big(g(x) + h(x)\big)\cos(y) \tag{1}$$

$$-g(x+y) - g(x-y) + h(x+y) + h(x-y) = 2\big(-g(x) + h(x)\big)\cos(y) \tag{2}$$

Sečtením, resp. odečtením obou rovnic dostáváme přesně tvar původní rovnice pro funkci h, resp. g. Řešme tedy původní rovnici za předpokladu, že f je sudá, resp. lichá.

Je-li f sudá, pak dosazením $[0, x]$ získáme

$$f(x) + f(-x) = 2f(0)\cos(x),$$

tedy $f(x) = f(0)\cos(x)$. Je-li f lichá, pak nejprve dosaďme $[x, \pi/2]$ a potom $[\pi/2, x]$.

$$[x, \pi/2]: \qquad f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$[\pi/2, x]: \qquad f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x).$$

Dosazením prvního vztahu do druhého a použitím lichosti f dostáváme

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x),$$

odkud $f(x) = f(\pi/2)\sin(x)$. Funkce f tak musí být tvaru $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou se přesvědčíme, že tomu tak je pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Metody řešení

Obecně je pro danou úlohu velmi těžké říci, která metoda povede k cíli. Pro vyřešení obtížnějších úloh je často třeba kombinovat několik přístupů, s náročností úloh jejich počet roste. Přesto se pokusím na tomto místě uvést co nejvíce metod používaných pro řešení funkcionálních rovnic, seřazených zhruba podle frekvence výskytu v úlohách.

- Dosazování hodnot do rovnice. Nejčastěji dosazujeme konstanty, později takové výrazy, abychom dostali některé části výrazů konstantní. Například vyskytuje-li se ve výrazu $f(x+y)$ a známe hodnotu $f(0)$, volíme substituci $[x,-x]$ atp. S obtížnějšími příklady jsou substituce méně zřejmé a vyžadují jistou zkušenost a cvik. (Úlohy 5–10)
- Symetrické výrazy a vytvoření soustavy rovnic. Některé rovnice mohou mít buď rovnou, nebo po jednoduché úpravě jednu stranu symetrickou, tj. výraz na jedné straně se po záměně x a y nezmění. Totéž tedy musí platit i na straně druhé, odkud můžeme obdržet nový vztah. (Úloha 13, 14) Vhodným dosazováním rovněž můžeme vytvořit soustavu rovnic, a tu pak vyřešit. (Úloha 10, 12)
- Použití matematické indukce. Nejprve nalezneme hodnoty pro $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, závislé pouze na $f(1)$. Posléze najdeme hodnoty $f(1/n)$ a $f(q)$, kde $q \in \mathbb{Q}$. Tato metoda je vhodná pro funkce definované na $\mathbb{Q}$ nebo reálné funkce s omezující podmínkou. (Úloha 1, 2, 15, 20)
- Vyšetření, zda je funkce prostá, případně na. V mnoha případech není obtížné tyto vlastnosti dokázat, avšak užitek z nich je velký. (Úloha 16, 25)
- Užití Cauchyovy rovnice a rovnic podobného typu. Pomocí nějaké substituce můžeme rovnici převést na Cauchyovu rovnici nebo rovnice podobné, jejichž řešení již známe. (Úloha 21, 22)
- Monotonie a spojitost. Tyto podmínky jsou často dány pro zjednodušení úlohy jako dodatečné podmínky pro jednoznačnost řešení. (Úloha 2)
- Předpokládat, že funkce je v nějakém bodě větší či menší než hodnota funkce, o které chceme dokázat, že je řešením. (Úloha 2, 20)
- Zabývat se množinou bodů, kde se hledaná funkce shoduje s předpokládaným řešením. Cílem je ukázat, že tato množina je celý definiční obor. (Úloha 19)
- Zapsat f jako součet sudé a liché. Tento součet vždy existuje a vynutíme si jím alespoň nějaké vlastnosti, pokud o f nevíme nic. (Úloha 29)
- Vytváření rekurentních posloupností. Hodí se zejména pro ty úlohy, kde známe vztah mezi x, $f(x)$ a $f\big(f(x)\big)$ a obor hodnot je nějak omezen. (Úloha 27)
- Hledání pevných a nulových bodů funkce. Pevný bod funkce f je takové x, pro které platí $f(x)=x$. Úloh využívajících tuto metodu je poměrně málo, patří spíše k těm obtížnějším. (Úloha 28)
- Uhodnout řešení. Podle známého řešení se snáze volí substituce a můžeme tušit, které vlastnosti půjdou dokázat. (Úloha 8)
- Nikdy nezapomenout na zkoušku!

Sbírka úloh

V tuto chvíli již máme dostatečný aparát na vyřešení většiny úloh z funkcionálních rovnic, a proto na tomto místě výklad ukončíme. Další rady nemohou nahradit vlastní zkušenost s řešením problémů. Pro zažití naučených metod je nyní důležité samostatně řešit neznámé problémy, byť se nám někdy nepodaří řešení nalézt.

Následující sbírka úloh obsahuje většinu známých příkladů z národních a mezinárodních soutěží, navíc obsahuje mnoho úloh zadaných v Matematickém korespondenčním semináři (MKS). K úlohám neuvádím vzorová řešení ani návody, na konci textu je však možné najít výsledky. U většiny úloh je uvedena soutěž, ze které jsou převzaty, řešení je tedy možné najít na stránkách soutěží, MKS, případně na fóru [AoPS]. Úlohy jsou pro přehlednost seřazeny podle zdroje. Některé z úloh, které se vyskytují v textu, jsou ve sbírce pro úplnost znovu uvedeny s odkazem na řešení v textu.

Student, jenž zvládne vyřešit většinu těchto úloh, by měl být velmi dobře připraven na řešení funkcionálních rovnic, které se mohou vyskytnout v matematické olympiádě, korespondenčních seminářích a dalších soutěžích.

IMO

Úloha 30. Buďte f a g reálné funkce splňující

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y),$$

funkce f není identicky rovná nule a $|f(x)|\le 1$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Dokažte, že $|g(x)|\le 1$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$. (*IMO 1972-5*)

Úloha 31. Buď f reálná funkce taková, že pro každá x, y reálná platí

$$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y).$$

Dokažte, že pak f splňuje Cauchyho rovnici. (*IMO shortlist 1979-26*)

Úloha 32. Najděte všechny funkce $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, pro které platí $f(1)=2$ a pro každá $x,y\in\mathbb{Q}$

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1.$$

(*Cvičení 8; IMO 1980-4*)

Úloha 33. Najděte všechny funkce $f\colon\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ splňující $f(2)=0$, $f(x)\ne 0$ pro $0\le x<2$ a pro každá x, y

$$f\big(xf(y)\big)f(y)=f(x+y).$$

(*IMO 1986-5*)

Úloha 34. Zkonstruujte funkci $f\colon\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ vyhovující funkcionální rovnici

$$f\big(xf(y)\big)=\frac{f(x)}{y}$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$. *(IMO 1990-4)*

Úloha 35. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\bigl(x^2 + f(y)\bigr) = y + f^2(x).$$

(Cvičení 12; IMO 1992-2)

Úloha 36. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\bigl(f(x)\bigr) + af(x) = b(a+b)x,$$

kde a, b jsou kladné reálné konstanty. *(Úloha 27, str. 22; IMO shortlist 1992-A2)*

Úloha 37. Najděte všechny funkce $f\colon (-1, \infty) \to (-1, \infty)$ splňující

(i) $f\bigl(x + f(y) + xf(y)\bigr) = y + f(x) + yf(x)$ pro všechna $x, y \in (-1, \infty)$,

(ii) $f(x)/x$ je rostoucí na každém z intervalů $(-1, 0)$, $(0, \infty)$.

(IMO 1994-5)

Úloha 38. Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce splňující $|f(x)| \le 1$ a

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že f je periodická. *(IMO shortlist 1996-A7)*

Úloha 39. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\bigl(x - f(y)\bigr) = f\bigl(f(y)\bigr) + xf(y) + f(x) - 1.$$

(IMO 1999-5)

Úloha 40. Najděte všechny dvojice reálných funkcí f a g splňující pro každá x, y

$$f\bigl(x + g(y)\bigr) = xf(y) - yf(x) + g(x).$$

(IMO shortlist 2000-A3)

Úloha 41. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ vztah

$$\bigl(f(x) + f(y)\bigr)\bigl(f(u) + f(v)\bigr) = f(xu - yv) + f(xv + yu).$$

(IMO 2002-4)

Úloha 42. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = 2x + f\bigl(f(y) - x\bigr).$$

(IMO shortlist 2002-A1)

Úloha 43. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující

(i) $f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{xz})$,

(ii) $f(x) < f(y)$ pro všechna $1 \le x < y$.

(IMO shortlist 2003-A5)

Úloha 44. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každou čtveřici $x, y, z, w \in \mathbb{R}^+$ splňující $xw = yz$ platí

$$\frac{f^2(w) + f^2(x)}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}.$$

(*IMO 2008-4*)

Úloha 45. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$f\bigl(xf(x+y)\bigr) = f\bigl(yf(x)\bigr) + x^2.$$

(*IMO shortlist 2009-A7*)

Úloha 46. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá x, y rovnici

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí největší přirozené číslo, které není větší než x. (*IMO 2010-1*)

Úloha 47. Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje pro všechna reálná x a y rovnici

$$f(x+y) < yf(x) + f\bigl(f(x)\bigr).$$

Dokažte, že $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$. (*IMO 2011-3*)

Další mezinárodní soutěže

Úloha 48. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

(*MEMO 2008*)

Úloha 49. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$f\bigl(xf(x)\bigr) + f\bigl(f(x) + f(y)\bigr) = yf(x) + f\bigl(x + f(y)\bigr).$$

(*MEMO 2009*)

Úloha 50. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

(*MEMO 2010*)

Úloha 51. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2.$$

(*MEMO 2011*)

Úloha 52. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x,$$

kde f^{-1} je inverzní funkce k f. (*Úloha 19, str. 17; APMO 1989*)

Úloha 53. Najděte všechny reálné funkce, pro které platí následující podmínky.

(i) Množina $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$ je konečná,

(ii) pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí

$$f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f\big(f(y)\big).$$

(*APMO 2002-5*)

Úloha 54. Najděte všechny reálné funkce, pro které platí následující podmínky.

(i) Existuje reálné číslo M takové, že $f(x) < M$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$,

(ii) pro každé x, y platí funkcionální rovnice $f\big(xf(y)\big) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$.

(*iKS 2011, APMO 2011*)

Úloha 55. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f(y) = f\big(f(x)f(y)\big).$$

(*Úloha 24, str. 21; Baltic Way 1998-7*)

Úloha 56. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

(*Baltic Way 2010-5*)

Úloha 57. Buď f reálná funkce splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f\big(f(x)\big) = x^2 - x + 1.$$

Určete hodnotu $f(0)$. (*Baltic Way 2011-6*)

Úloha 58. Najděte příklady reálných funkcí f a g takových, že $g \circ f$ je rostoucí a $f \circ g$ je klesající.

(*Úloha 18, str. 16; RMMS 2011-1*)

Úloha 59. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$\big(1 + yf(x)\big)\big(1 - yf(x + y)\big) = 1.$$

(*Úloha 14, str. 12; CPSM 2009-1*)

Úloha 60. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(xf(x) + f(y)\big) = f^2(x) + y.$$

(*Úloha 25, str. 21; BMO 1997-4, BMO 2000-1*)

Národní soutěže

Úloha 61. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro každá $x, y \in \mathbb{R}^+$ vyhovují rovnici

$$f(x)f(y) = f(y)f\big(xf(y)\big) + \frac{1}{xy}.$$

(*MO 60-A-III-6*)

Úloha 62. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

(*USA 2002*)

Úloha 63. Určete hodnoty reálného parametru α, pro který existuje právě jedna funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\big(x^2 + y + f(y)\big) = f^2(x) + \alpha y.$$

(*Vietnam 2004*)

Úloha 64. Najděte všechny reálné funkce splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(f(x-y)\big) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy.$$

(*Vietnam 2005*)

Úloha 65. Buď f rostoucí reálná funkce splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x+y) + f\big(f(x) + f(y)\big) = f\Big(f\big(x + f(y)\big) + f\big(y + f(x)\big)\Big).$$

Dokažte, že $f\big(f(x)\big) = x$. (*Írán 1997*)

Úloha 66. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\big(f(x) + y\big) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

(*Írán 1999*)

Úloha 67. Buď $\lambda > 0$. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že $f(\lambda) = 1$ a pro každá $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy).$$

(*Španělsko 2006*)

Úloha 68. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2).$$

(*Rumunsko 2009*)

Úloha 69. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y).$$

(*Úloha 20, str. 19; Bělorusko 1997*)

Úloha 70. Dokažte, že neexistuje funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f^2(x) \geq f(x+y)\big(f(x) + y\big).$$

(*Bulharsko 1998*)

MKS

Úloha 71. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$yf(x) + xf(y) = f(x+y).$$

(18-6-1)

Úloha 72. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$f(2x+y) = f(2y+x)f(x+y).$$

(18-6-2)

Úloha 73. Najděte všechny omezené funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$2f\bigl(x + \frac{\pi}{6}\bigr) = \sqrt{3}f(x) + \cos(x) - \sin(x).$$

(18-6-7)

Úloha 74. Nejděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ nerovnost

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

(Úloha 23, str. 20; 22-7-4)

Úloha 75. Najděte všechny dvojice funkcí $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y rovnici

$$f(x-y) = f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

(22-7-5)

Úloha 76. Najděte všechny rostoucí funkce $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro všechna $x, y \geq 0$ platí

$$f\bigl(yf(x)\bigr) = x^2 f(xy).$$

(22-7-8)

Úloha 77. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y.$$

(Cvičení 6; 25-4-3)

Úloha 78. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ splňující pro x různá od 0 a 1

$$f(x) + f\Bigl(\frac{1}{1-x}\Bigr) = x.$$

(Úloha 12, str. 11; 25-4-5)

Úloha 79. Najděte všechny klesající funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\bigl(f(x + f(y))\bigr) = f(x+y) - f\bigl(y + f(x)\bigr).$$

(25-4-8)

Úloha 80. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

(*Úloha 6, str. 8; 27-7-1*)

Úloha 81. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro každé přípustné x rovnici

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)\big(1 + xf(x)\big).$$

(*27-7-3*)

Úloha 82. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé reálné x rovnici

$$f(x) + xf(-x) = (1-x)\sin(x).$$

(*27-7-5*)

Úloha 83. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f(x^2+y) + f\big(f(x) - y\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2.$$

(*Úloha 10, str. 10; 27-7-6*)

Úloha 84. Nalezněte všechny monotónní funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vyhovující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnici

$$f(xy) f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1.$$

(*Úloha 26, str. 22; 27-7-8*)

Úloha 85. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(x + f(y)\big) = x^2 + f^2(y) + 2xf(y).$$

(*Cvičení 3; 27-8-7a*)

Úloha 86. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y).$$

(*Úloha 8, str. 9; 27-8-7b*)

Úloha 87. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y, z

$$f(x + y^2 + z) = f\big(f(x)\big) + yf(y) + f(z).$$

(*31-4-7*)

Úloha 88. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná $x \neq 3$ platí

$$f\big(f(x)\big) = \frac{1}{|x-3|}.$$

(*31-4-8*)

Další úlohy

Úloha 89. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$\bigl(f(x+y)-f(x-y)\bigr)^2=f(x)f(y).$$

(*Řešitelský seminář 2008*)

Úloha 90. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$

$$f\bigl(f(x)-x\bigr)=6x.$$

Úloha 91. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá x, y rovnici

$$f\bigl((x-y)^2\bigr)=f^2(x)-2xf(y)+y^2.$$

Úloha 92. Najděte všechny reálné funkce splňující pro každá $x \neq y$ rovnici

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

Úloha 93. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f\bigl(f(x)+y\bigr)=xf(1+xy).$$

Úloha 94. Buď $I=[0,1]$ a $k \in \mathbb{N}$. Najděte všechny funkce $f\colon I \times I \to I$ splňující pro všechna x, y a z z I následující podmínky.

(i) $f\bigl(f(x,y),z\bigr)=f\bigl(x,f(y,z)\bigr)$,

(ii) $f(x,1)=x$, $f(x,y)=f(y,x)$,

(iii) $f(zx,zy)=z^kf(x,y)$.

Návody ke cvičením

1. $f(x) = x^2$; dosazení $[x, 0]$. **2.** $f(x) = x + 1$; dosazení $[1, 1]$, možnosti: $f(1) = -1$: nemá řešení, $f(1) = 2$: $f(x) = x + 1$. **3.** $f(x) = x^2$; úprava na čtverec, substituce $t = x + f(y)$. **4.** $f(x) = x^2$; dosazení $[x, f(x) - x^2]$, odečtení od původní rovnice. **5.** $f(x) = 2x$, pro $x \in M$, $f(x) = 1/x$ pro $x \in \mathbb{R}^+ \setminus M$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^+$ je libovolná; úprava na součin; **6.** $f(x) = x + c$; $c \in \mathbb{R}$; dosazení $[0, y]$ a $[0, -y]$, soustava rovnic. **7.** $f(x) = \frac{x^3+7x}{2(1-x^2)}$; dosazení $x = \frac{t-3}{t+1}$ a $x = \frac{t+3}{1-t}$, soustava rovnic. **8.** $f(x) = x + 1$; dosazením $[1, n]$ máme $f(n) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$, $[-1, 1]$ a $[-1, n]$ dá $f(n) = n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. $[1, \frac{1}{n}]$ a $[1, m+\frac{1}{n}]$ s indukcí dá $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}+1$, $[m, \frac{1}{n}]$ dá $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1$, rozšíření na celé $\mathbb{Q}$. **9.** $f(x) = 2x^2$; dosazení $[x, 0]$. **10.** $f(x) = x$; f je prostá, tj. rostoucí, $f(x) \gtrless x$ vede ke sporu. **11.** $f(x) = x^c$; $c > 0$; substituce $g(x) = \log f(a^x)$, Cauchyho rovnice. **12.** $f(x) = x$; f je bijekce, $f(0) = 0$, f je rostoucí, $f(x) \gtrless x$ vede ke sporu. **13.** $f(x) = x$; definuj $x_n = f(x_{n-1})$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$ libovolně. Rekurentní rovnice má řešení $x_n = c$, tedy $x_0 = f(x_0)$.

Výsledky

30. důkaz např. v [MKS 22-7-7]. **31.** důkaz např. v [MR 6]. **32.** $f(x) = x + 1$. **33.** $f(x) = x/(x - 2)$ pro $0 \le x < 2$, $f(x) = 0$ pro $x \ge 2$. **34.** konstrukce je popsána např. v [FK 32]. **35.** $f(x) = x$. **36.** $f(x) = bx$. **37.** $f(x) = -x/(x + 1)$. **38.** $f(x + 1) = f(x)$. **39.** $f(x) = 1 - x^2/2$. **40.** $f(x) = (cx - c^2)/(1 + c)$, $f(x) = cx - c^2$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **41.** $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/2$ nebo $f(x) = 0$. **42.** $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. **43.** $f(x) = x^c + x^{-c}$, $c > 0$. **44.** $f(x) = x$ nebo $f(x) = 1/x$. **45.** $f(x) = x$ nebo $f(x) = -x$. **46.** $f(x) = 0$ nebo $f(x) = c$, $1 \le c < 2$. **47.** $f(x) = 0$, $x \le 0$. **48.** $f(x) = x$ nebo $f(x) = 0$. **49.** $f(x) = x$ nebo $f(x) = 0$. **50.** $f(x) = x^2 + x$, $f(x) = 3x$ nebo $f(x) = 0$. **51.** $f(x) = cx + 1$, $x \in \mathbb{R}$. **52.** $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. **53.** $f(x) = x$. **54.** $f(x) = 0$ pro $x \ge 0$, $f(x) = 2x$ pro $x < 0$. **55.** $f(x) = 0$. **56.** $f(x) = 0$ nebo $f(x) = 2 - x$. **57.** $f(0) = 1$. **58.** viz str. 16. **59.** $f(x) = 1/(x + c)$, $c \in \mathbb{R}^+$. **60.** $f(x) = x$ nebo $f(x) = -x$. **61.** $f(x) = 1 + 1/x$. **62.** $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. **63.** $\alpha = 2$. **64.** $f(x) = -x$. **65.** Platí. **66.** $f(x) = x^2$ nebo $f(x) = 0$. **67.** $f(x) = 1$. **68.** $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. **69.** $f(x) = x$ nebo $f(x) = 0$ nebo $f(x) = 2$. **70.** důkaz např. v [MR 19]. **71.** $f(x) = 0$. **72.** $f(x) = 0$ nebo $f(x) = 1$. **73.** $f(x) = \sin x + \cos x$. **74.** $f(x) = 1/2$. **75.** dvojice $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1/2$ a $f(x) = 0$, g libovolná. **76.** $f(x) = x^2$. **77.** $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. **78.** $f(x) = (x^3 - x + 1)/(2x^2 - 2x)$. **79.** f neexistuje. **80.** $f(x) = x^2/4 + c$, $c \in \mathbb{R}$. **81.** $f(x) = 1/x$. **82.** $f(x) = \sin x$. **83.** $f(x) = x^2$. **84.** $f(x) = 1$ nebo $f(x) = 1/x$. **85.** $f(x) = x^2$. **86.** $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ nebo $f(x) = 0$. **87.** $f(x) = x$ nebo $f(x) = 0$. **88.** f neexistuje. **89.** $f(x) = 0$. **90.** $f(x) = 3x$. **91.** $f(x) = x + 1$ nebo $f(x) = x$. **92.** $f(x) = x$. **93.** $f(x) = 1/x$. **94.** $f(x, y) = \min(x, y)$ pro $k = 1$, $f(x, y) = xy$ pro $k = 2$, pro jiná k nemá řešení.

Literatura a zdroje

[FK] František Konopecký, *Funkcionální rovnice*, bakalářská práce, 2008.

[MR] Marko Radonović, *Functional Equations*, `http://www.imocompendium.com`

[MKS] *Matematický korespondenční seminář MFF UK*, `http://mks.mff.cuni.cz`

[AoPS] *Art of Problem Solving*, `http://www.artofproblemsolving.com`

[MO] *Matematická olympiáda*, `http://www.math.muni.cz/~rvmo`

[IMO] *Mezinárodní matematická olympiáda*, `http://www.imo-official.org`

[MEMO] *Middle European Mathematical Olympiad*, Středoevropská matematická olympiáda

[APMO] *Asian Pacific Mathematical Olympiad*, `http://cms.math.ca/Competitions/APMO`

[CPSM] *Česko-Polsko-Slovenské střetnutí*

[RMMS] *Romanian Master of Mathematics and Sciences*