Úkoly z Kombinatorické teorie her, 10. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(10.1) Dokažte všechna následující tvrzení. Rozfázovaně tak sami dokážete něco o piškvorkách n^d.

(i) Ve hře n^d prochází každým bodem nejvýše $(3^d - 1)/2$ vyhrávajících linií. *2 body*

(ii) Nechť F je hypergraf, jehož všechny hrany mají velikost aspoň n a každý vrchol leží v nejvýše $n/2$ hranách. Potom pro F existuje párovací remízová strategie. *3 body*

(iii) Pro hru n^d, $n \geq 3^d - 1$, existuje párovací remízová strategie. *1 bod*

(10.2) Věta („Silnější Erdős-Selfridge“): Nechť $F = (V, E)$ je n-uniformní hypergraf takový, že $|E| + \mathrm{MaxDeg}(F) < 2^n$. ($\mathrm{MaxDeg}(F)$ značí maximální stupeň vrcholu v hypergrafu). Potom v silné hře na F existuje (explicitně popsaná) blokovací strategie druhého hráče.

Dokažte předchozí větu. Hint: v důkazu Erdős-Selfridgeovy věty se „okrádáme“. *2 body*

(10.3) Dokažte, že v Solitaire Army je k doskákání do vzdálenosti 3 potřeba alespoň 8 kamenů (nějakými chytřejšími argumenty než rozborem možností). Hint: Fibonacciho čísla. *2 body*