

Příprava na CK MO – Geometrická zobrazení

Jakub „šnek“ Opršal, 9. března 2009

Příklad 1. Kružnice k a m mají vnitřní dotyk v bodě M , přičemž kružnice k leží uvnitř m . Sestrojme nyní nějakou tečnu ke kružnici k v bodě $P \neq M$ a průsečíky této tečny s kružnicí m nazveme Q a R . Dokažte $|\sphericalangle QMP| = |\sphericalangle PMR|$.

Příklad 2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Připišme nad jeho strany rovnosstranné trojúhelníky ABD , BCE a ACF . Dokažte, že se přímky AE , BF a CD protínají v jednom bodě.

Příklad 3. Kružnice k_1 a k_2 se středy postupně S_1 a S_2 mají vnější dotyk v bodě T , leží uvnitř kružnice k_3 se středem S_3 , již se dotýkají pořadě v bodech T_1 a T_2 . Nechť C je bod na kružnici k_3 , označme A resp. B body v nichž přímka CT_1 resp. CT_2 protínají kružnice k_1 resp. k_2 ($A \neq T_1$ a $B \neq T_2$). Dokažte, že pokud $|AT| \cdot |TS_2| = |BT| \cdot |TS_1|$, pak jsou na sebe přímky CS_3 a S_1S_2 kolmé.

Příklad 4. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB . Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC . Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné.

Příklad 5. Kružnice k , l se dotýkají zvnějšku v bodě A , kružnice m se jich obou dotýká vnitřně a to po řadě v B, C . Průsečík BA a m buď D . Dokažte, že $|\sphericalangle ACD| = 90^\circ$.

Příklad 6. Kružnice k_1 a k_2 mají vnější dotyk v bodě A a současně se obě dotýkají zevnitř kružnice k v bodech A_1 a A_2 . Bod P je jeden z průsečíků společné vnitřní tečny kružnic k_1 a k_2 s kružnicí k . Nakonec body B_i jsou průsečíky úseček PA_i s kružnicemi k_i různé od A_i (kde $i = 1, 2$). Dokažte, že přímka B_1B_2 se dotýká obou kružnic k_1 a k_2 .