1. Termíny zkoušek z Matematické analýzy jsou v úterý a ve středu, z Programování každý den, z Lineární algebry jen ve středu, z Kombinatoriky a grafů každý den mimo středy a z Algoritmů a datových struktur v úterý a ve středu. Každý den zvládnete složit nejvýše jednu zkoušku. Lze všechny zkoušky složit za týden?

2. Ukažte, že každý bipartitní d-regulární graf má perfektní párováni použitím Hallovy věty.

3. Pro každé $d \geq 3$ nalezněte souvislý d-regulární graf se sudým počtem vrcholů, který nemá perfektní párování.

4. *Latinský obdélník* je matice $m \times n$ (kde $m \leq n$), v každém jejím řádku se vyskytují všechna čísla 1, ..., n a čísla v každém sloupci jsou navzájem různá. Ukažte, že pokud $m < n$, pak k libovolnému latinskému obdélníku velikosti $m \times n$ jde přidat řádek tak, že vznikne latinský obdélník velikosti $(m + 1) \times n$.

5. Mějme balíček karet (13 různých hodnot ve 4 barvách) a rozložme je libovolně na 13 hromádek po čtyřech. Ukažte, že z každé hromádky lze odebrat jednu kartu tak, aby odebrané karty měly navzájem různé hodnoty.

6. Ukažte, že je-li G bipartitní graf s partitami A a B, pak největší párování v G má velikost

$$|A| - \max\{|X| - |N(X)| : X \subseteq A\}.$$

7. Nechť G je bipartitní graf. Množina $Z \subseteq V(G)$ *pokrývá hrany*, pokud každá hrana G je incidentní s alespoň jedním vrcholem ze Z. Ukažte, že velikost největšího párování v G je rovno velikosti nejmenší množiny, která pokrývá jeho hrany.

8. Jak lze určit velikost největší nezávislé množiny v bipartitním grafu?

9. Nechť M je párování v grafu G a $P = v_1v_2 \dots v_n$ je cesta v G. Říkáme, že P je *zlepšující*, pokud v_1 a v_n nejsou incidentní z žádnou hranou M a pokud $v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{n-2}v_{n-1} \in E(M)$. Ukažte, že M je největší párování v G právě tehdy, pokud pro něj neexistuje žádná zlepšující cesta.

10. Vymyslete algoritmus pro nalezení největšího toku v následujících variantách:

    - v grafu je více než jeden zdroj a stok (vrcholy, v nichž může tok vznikat, resp. se ztrácet)
    - hrany jsou neorientované, tj. hranou může tok o velikosti omezené její kapacitou téct libovolným směrem
    - vrcholy mají kapacity, tj. u každého vrcholu je předepsáno, kolik maximálně do něj smí vtékat
    - hrany mají kromě kapacity předepsanou i minimální hodnotu toku, který po nich musí téct (těžké)

11. Navrhněte algoritmus, který pro zadání obdobné prvnímu příkladu (omezení zkoušek na dny v týdnu) určí nejmenší počet týdnů potřebný ke splnění všech zkoušek.

12. Ukažte, že má-li graf orientaci s maximálním vstupním stupněm nanejvýš k, pak má také orientaci s maximálním stupněm nanejvýš $2k$ bez orientovaného cyklu.