

1. Kolik existuje

- permutací velkých písmen anglické abecedy, neobsahujících pod-
slova „PES“, „ESKO“ a „STOP“?
- přirozených čísel menších než tisíc, která jsou dělitelná 6, 8 nebo
15?
- ekvivalencí na množině $[n]$ s k bloky?
- nezáporných celočíselných řešení soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 12 \\x_1 &\leq 4 \\x_2 &\leq 3 \\x_3 &\leq 6 \\x_4 &\leq 5\end{aligned}$$

?

2. Ukažte, že pro každé sudé k platí

$$\sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{t}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \leq \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{t=1}^{k+1} (-1)^{t+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{t}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

3. Mějme vlastnosti v_1, v_2, \dots, v_n a množinu prvků X . Pro $1 \leq i \leq n$ označme jako A_i množinu těch prvků z X , které mají vlastnost v_i . Jako N_t označme

$$\sum_{I \in \binom{[n]}{t}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|,$$

kde $N_0 = |X|$. Pomocí čísel N_t vyjádřete

- počet prvků z X , majících alespoň jednu z vlastností.
- počet prvků z X , nemajících žádnou z vlastností.
- počet prvků z X , majících právě k z vlastností.
- počet prvků z X , majících nejvýše k z vlastností.
- počet prvků z X , majících alespoň k z vlastností.

4. Necht' $D(n)$ je počet permutací $[n]$ bez pevného bodu (tj. takových, že $\pi(i) \neq i$ pro každé i). Ukažte, že

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D(n-k) = n!$$

5. Kolika způsoby lze rozsadit n manželských párů kolem kulatého stolu tak, aby vedle sebe neseděli žádní dva muži, žádné dvě ženy a žádní dva manželé?
6. Necht' $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ je rozklad přirozeného čísla N na prvočísla. Definujme

$$\mu(N) = \begin{cases} (-1)^k & \text{jestliže } a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že platí-li

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

pak

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) f(d).$$