

1. Necht'  $\mathcal{B}$  je systém podmnožin  $[n]$  velikosti  $r$  takový, že každé číslo z  $[n]$  je v přesně  $k$  množinách z  $\mathcal{B}$ . Ukažte, že  $|\mathcal{B}| = nk/r$ .
2. Nalezněte vzorec pro  $\sum_{k=1}^n k^3$  pomocí počítání čtveřic  $(x, y, z, u)$  takových, že  $x, y, z \leq u$ .
3. Nalezněte horní odhad pro počet hran grafu na  $n$  vrcholech, který neobsahuje  $K_{a,b}$  jako podgraf.
4. Necht'  $C$  je množina slov složených ze symbolů 0 a 1 délky  $n$  takových, že každé dva z nich se liší na alespoň  $d$  místech. Ukažte, že je-li  $d > n/2$ , pak  $|C| \leq \frac{2d}{2d-n}$ . Hint: necht'  $z_{ijk}$  je 1 pokud se  $i$ -té a  $j$ -té slovo z  $C$  liší na pozici  $k$  a 0 jinak. Necht'  $p_k$  je počet slov z  $C$ , které mají na  $k$ -té pozici 1. Nahlédněte, že  $\sum_{i,j} z_{ijk} = 2p_k(|C| - p_k) \leq |C|^2/2$  a  $\sum_k z_{ijk} \geq d$  pro  $i \neq j$ , a použijte počítání dvěma způsoby.
5. Necht'  $\mathcal{A}$  je systém podmnožin  $[n]$  takový, že žádné dvě množiny v  $\mathcal{A}$  nejsou navzájem disjunktní. Ukažte, že  $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$ , a nalezněte takový systém velikosti  $2^{n-1}$ .
6. Mějme  $n$  navzájem různých přímků a  $n$  navzájem různých bodů v rovině. Ukažte, že počet dvojic  $(x, p)$ , kde  $x$  je jeden z bodů,  $p$  je jedna z přímků a  $x$  leží na  $p$ , je  $O(n^{3/2})$ .