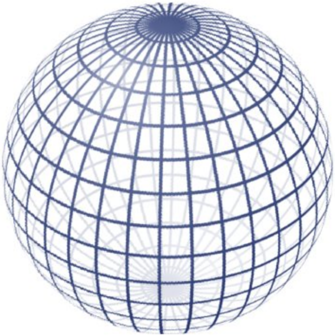
Grafy na plochách

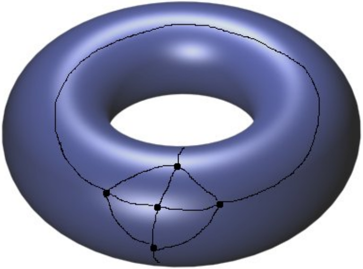
Z. Dvořák

MFF UK

Co je plocha?

Něco, na co se dají kreslit grafy:





Cíle:

- přesnější popis ploch
- vlastnosti grafů na plochách

Kdy jsou plochy stejné?

Definice

Homeomorfismus je bijekce $f : A \to B$ taková, že f i f^{-1} jsou spojité. Existuje-li, A a B jsou homeomorfní.

Příklady:

- posunutí, otočení, zrcadlení, zmenšení a zvětšení jsou homeomorfismy
- složení homeomorfismů je homeomorfismus
- disk $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ a čtverec $\{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1\}$ jsou homeomorfní
- rovina $\{(x, y, -1)\}$ a sféra bez jednoho bodu $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq 1\}$ jsou homeomorfní
  - projekce z bodu $(0, 0, 1)$

Kdy jsou plochy stejné?

Definice

Homeomorfismus je bijekce $f : A \to B$ taková, že f i f^{-1} jsou spojité. Existuje-li, A a B jsou homeomorfní.

Homeomorfismus zachovává nakreslitelnost grafu:

- obraz spojité jednoduché křivky je spojitá jednoduchá křivka
- obraz nakreslení grafu je nakreslení grafu

Homeomorfní plochy budeme považovat za stejné.

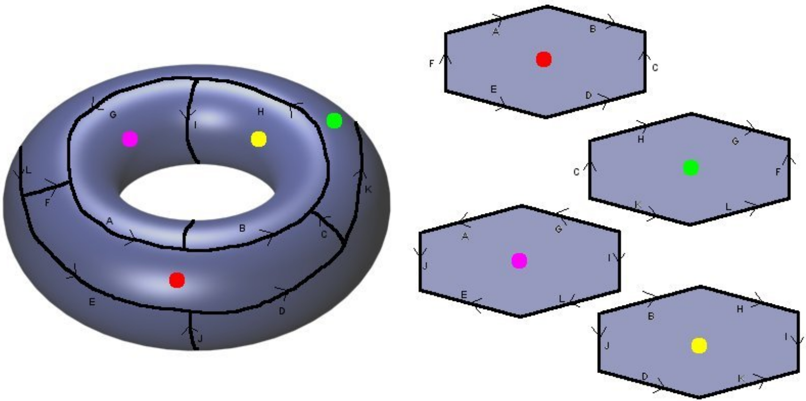
Co je plocha?

Definice

Plocha je kompaktní souvislá dvojrozměrná varieta bez hranice.

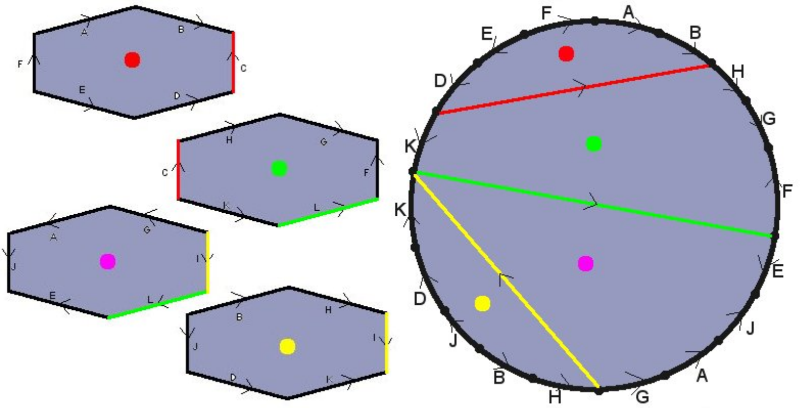
- dvojrozměrná varieta bez hranice: každý bod má okolí homeomorfní otevřenému disku
- kompaktní:
  - intuitivně: není nekonečně složitá
  - formálně: z každého pokrytí otevřenými množinami lze vybrat konečné pokrytí
- proto lze plochu „rozstříhat“ na konečně mnoho kusů homeomorfních uzavřenému disku

Rozstříhání plochy



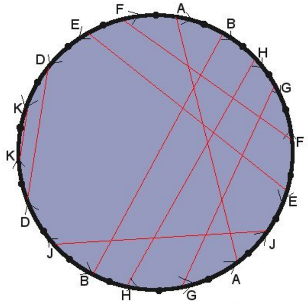
Lepíme zpět

Kusy plochy můžeme nejdřív poslepovat do jednoho souvislého kusu, který je homeomorfní disku:



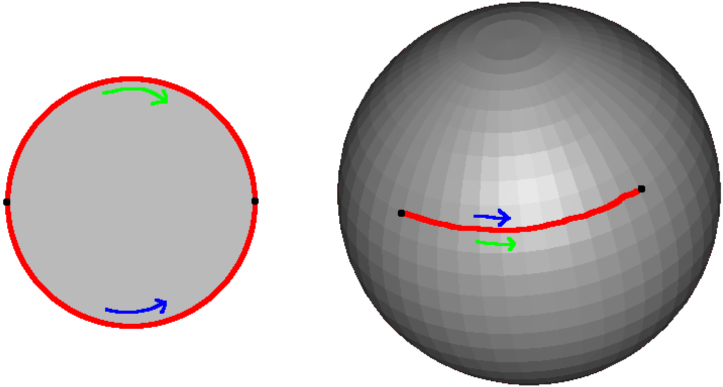
Mnohoúhelníková reprezentace plochy

Plochu lze zadat mnohoúhelníkem P s orientovanými hranami a párováním M mezi jeho hranami:

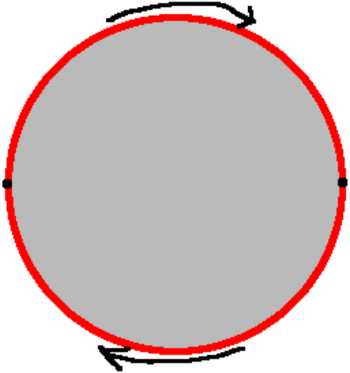


- odpovídající plochu dostaneme, jestliže pro každé $\{u_1 v_1, u_2 v_2\} \in M$ zidentifikujeme hrany $u_1 v_1$ a $u_2 v_2$
- polygon lze také zadat řetězcem; např. $ABHGF^{-1}EJ^{-1}A^{-1}G^{-1}H^{-1}B^{-1}JDKK^{-1}D^{-1}E^{-1}F$
  - X označuje hranu po směru hodinových ručiček, X^{-1} proti směru
  - každé písmeno právě dvakrát – určuje párování M

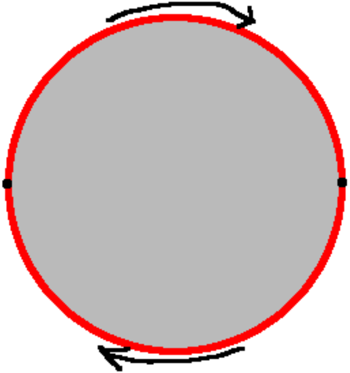
Dvojúhelníky



Jde hrany dvojúhelníka slepit opačně?

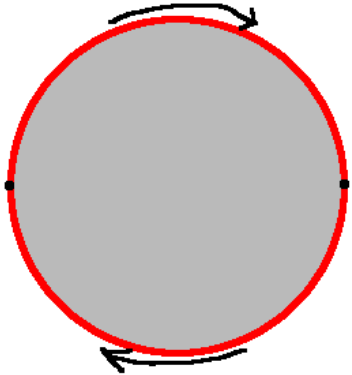


Jde hrany dvojúhelníka slepit opačně?



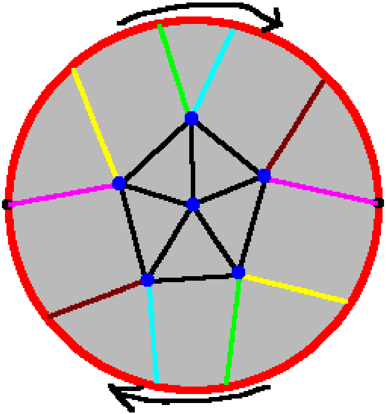
Ano, ale je potřeba 4-rozměrný prostor.

Jde hrany dvojúhelníka slepit opačně?



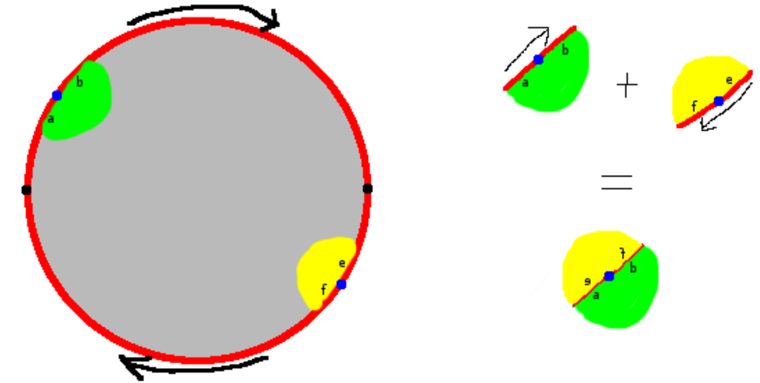
Ano, ale je potřeba 4-rozměrný prostor.
MŠMT varuje: pokusy představit si 4-rozměrný prostor škodí zdraví!

Lze tak kreslit grafy?



Je to plocha?

Každý bod má otevřené homeomorfní otevřenému disku:



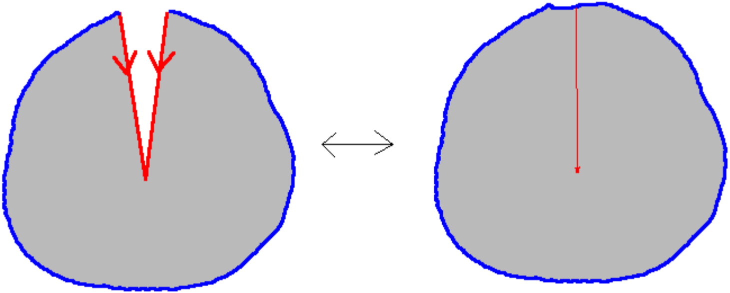
Tuto plochu nazýváme projektivní rovina.

Čtyřúhelníky

- $AA^{-1}\dots$ – viz dvojúhelníky
- $ABAB$ – projektivní rovina
- $ABA^{-1}B^{-1}$ – torus
- $ABA^{-1}B$ – Kleinova láhev
- $AABB$ – Kleinova láhev

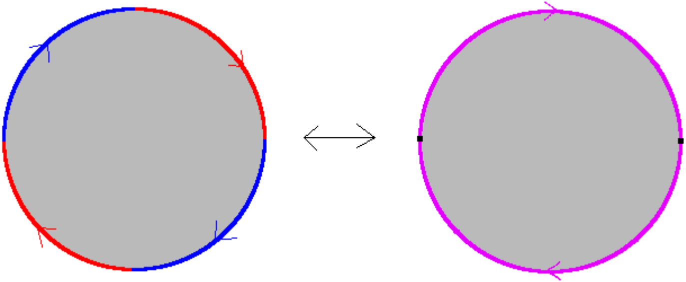
Čtyřúhelníky

- $AA^{-1} \dots$ – viz dvojúhelníky
- $ABAB$ – projektivní rovina
- $ABA^{-1}B^{-1}$ – torus
- $ABA^{-1}B$ – Kleinova láhev
- $AABB$ – Kleinova láhev



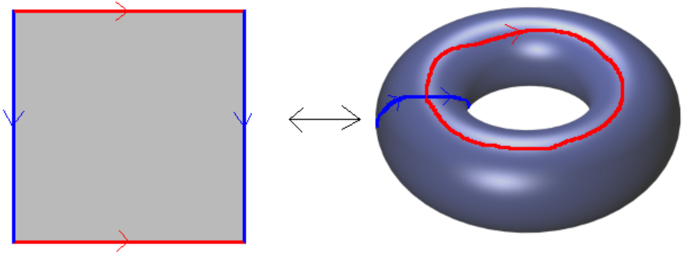
Čtyřúhelníky

- $AA^{-1}\dots$ – viz dvojúhelníky
- $ABAB$ – projektivní rovina
- $ABA^{-1}B^{-1}$ – torus
- $ABA^{-1}B$ – Kleinova láhev
- $AABB$ – Kleinova láhev



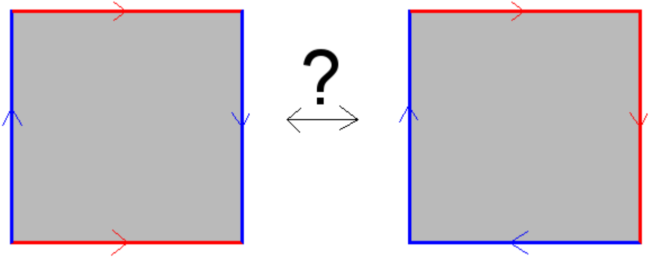
Čtyřúhelníky

- $AA^{-1}\dots$ – viz dvojúhelníky
- $ABAB$ – projektivní rovina
- $ABA^{-1}B^{-1}$ – torus
- $ABA^{-1}B$ – Kleinova láhev
- $AABB$ – Kleinova láhev

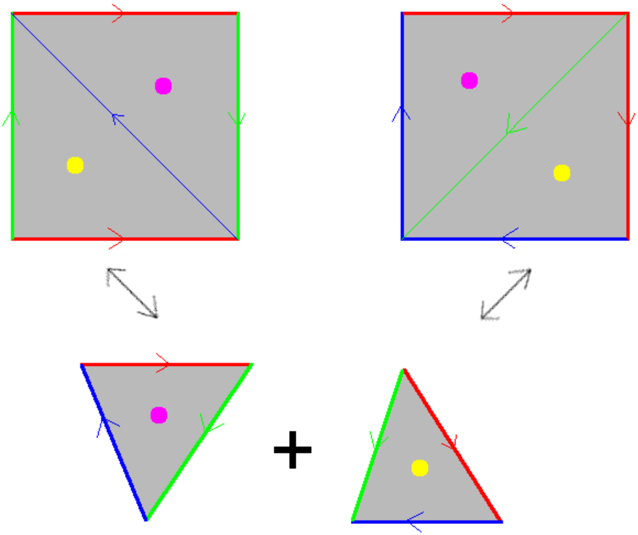


Čtyřúhelníky

- $AA^{-1}\ldots$ – viz dvojúhelníky
- $ABAB$ – projektivní rovina
- $ABA^{-1}B^{-1}$ – torus
- $ABA^{-1}B$ – Kleinova láhev
- $AABB$ – Kleinova láhev



$ABA^{-1}B$ je homeomorfní $AABB$

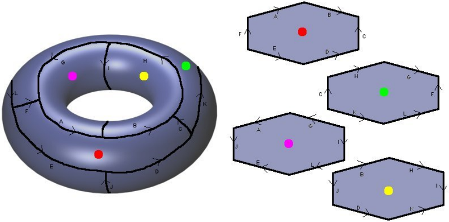


Klasifikace ploch

- Jak poznat, že dvě plochy jsou homeomorfní?
- Jsou sféra, projektivní rovina, torus a Kleinova láhev navzájem nehomeomorfní?

Stěny

- stěna grafu G nakresleného na ploše Σ je souvislá komponenta $\Sigma \setminus G$
- množinu stěn značme $F(G)$
- homeomorfní obraz stěny je stěna



Eulerova formule

Je-li G souvislý graf nakreslený na sféře, pak

$$|E(G)| - |V(G)| - |F(G)| + 2 = 0.$$

Rod plochy

Definice

Nakreslení grafu G na ploše je buňkové, je-li každá stěna homeomorfní otevřenému disku.

Pozorování: má-li G buňkové nakreslení, pak je souvislý.

Věta

Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak

$$|E(G_1)| - |V(G_1)| - |F(G_1)| = |E(G_2)| - |V(G_2)| - |F(G_2)|.$$

Definice

Rod plochy Σ je celé číslo g takové, že každý graf G buňkově nakreslený na Σ splňuje $|E(G)| - |V(G)| - |F(G)| + 2 = g$.

Homeomorfismus zachovává nakreslení, a tedy i rod.

Důkaz věty

- označme $t(G) = |E(G)| - |V(G)| - |F(G)|$
- buňkové nakreslení grafu G na ploše je uzavřeně buňkové, je-li hranice každé stěny cyklus

Lemma

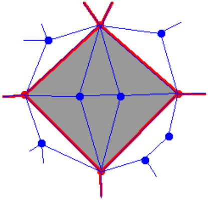
Jsou-li grafy G a H uzavřeně buňkově nakreslené na stejné ploše a $H \subseteq G$, pak $t(G) = t(H)$.

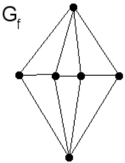
Důkaz věty

Lemma

Jsou-li grafy G a H uzavřeně buňkově nakreslené na stejné ploše a $H \subseteq G$, pak $t(G) = t(H)$.

- pro stěnu $f \in F(H)$, označme G_f podgraf G nakreslený v uzávěru f
- G_f je rovinný a souvislý, proto $|F(G_f)| = |E(G_f)| - |V(G_f)| + 2$

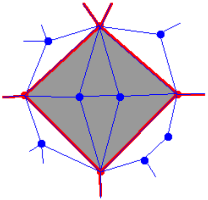


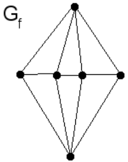


Důkaz věty

Lemma

Jsou-li grafy G a H uzavřeně buňkově nakreslené na stejné ploše a $H \subseteq G$, pak $t(G) = t(H)$.



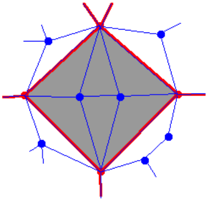


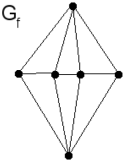
$$|F(G)| = \sum_{f \in F(H)} |F(G_f)| - 1 = \sum_{f \in F(H)} |E(G_f)| - |V(G_f)| + 1$$

Důkaz věty

Lemma

Jsou-li grafy G a H uzavřeně buňkově nakreslené na stejné ploše a $H \subseteq G$, pak $t(G) = t(H)$.





$$|F(G)| = \sum_{f \in F(H)} |F(G_f)| - 1 = \sum_{f \in F(H)} |E(G_f)| - |V(G_f)| + 1$$

- $\sum_{f \in F(H)} E(G_f) = |E(G)| + |E(H)|$
- $\sum_{f \in F(H)} V(G_f) = |V(G)| - |V(H)| + \sum_{v \in V(H)} \deg_H(v) = |V(G)| - |V(H)| + 2|E(H)|$

Důkaz věty

Lemma

Jsou-li grafy G a H uzavřeně buňkově nakreslené na stejné ploše a $H \subseteq G$, pak $t(G) = t(H)$.

$$|F(G)| = \sum_{f \in F(H)} |F(G_f)| - 1 = \sum_{f \in F(H)} |E(G_f)| - |V(G_f)| + 1 = \dots$$

- $\sum_{f \in F(H)} E(G_f) = |E(G)| + |E(H)|$
- $\sum_{f \in F(H)} V(G_f) = |V(G)| - |V(H)| + \sum_{v \in V(H)} \deg_H(v) = |V(G)| - |V(H)| + 2|E(H)|$

$$\begin{aligned} \dots &= (|E(G)| + |E(H)|) - (|V(G)| - |V(H)| + 2|E(H)) + |F(H)| \\ &= |E(G)| - |V(G)| - t(H) \end{aligned}$$

Důkaz věty

Věta

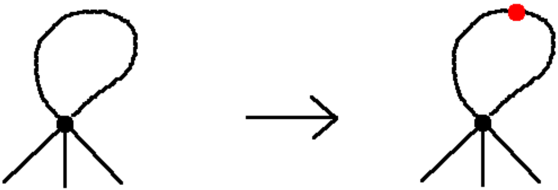
Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak $t(G_1) = t(G_2)$.

- můžeme předpokládat, že G_1 a G_2 nemají smyčky:
  - vznikne-li G' podrozdělením hrany G, pak $|E(G')| = |E(G)| + 1$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)|$, proto $t(G') = t(G)$
- stačí uvažovat uzavřeně buňkově nakreslené grafy:
  - vznikne-li G' přidáním vrcholu do stěny G délky k a spojením se všemi jejími vrcholy, pak $|E(G')| = |E(G)| + k$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)| + k - 1$, proto $t(G') = t(G)$
- můžeme předpokládat, že hrany G_1 a G_2 se nekříží (podrozdělíme hrany v kříženích)
- dle Lemmatu, $t(G_1) = t(G_1 \cup G_2)$ a $t(G_2) = t(G_1 \cup G_2)$

Důkaz věty

Věta

Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak $t(G_1) = t(G_2)$.



Důkaz věty

Věta

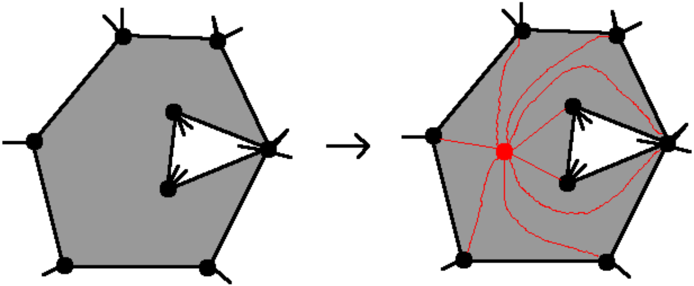
Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak $t(G_1) = t(G_2)$.

- můžeme předpokládat, že G_1 a G_2 nemají smyčky:
  - vznikne-li G' podrozdělením hrany G, pak $|E(G')| = |E(G)| + 1$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)|$, proto $t(G') = t(G)$
- stačí uvažovat uzavřeně buňkově nakreslené grafy:
  - vznikne-li G' přidáním vrcholu do stěny G délky k a spojením se všemi jejími vrcholy, pak $|E(G')| = |E(G)| + k$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)| + k - 1$, proto $t(G') = t(G)$
- můžeme předpokládat, že hrany G_1 a G_2 se nekříží (podrozdělíme hrany v kříženích)
- dle Lemmatu, $t(G_1) = t(G_1 \cup G_2)$ a $t(G_2) = t(G_1 \cup G_2)$

Důkaz věty

Věta

Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak $t(G_1) = t(G_2)$.



Důkaz věty

Věta

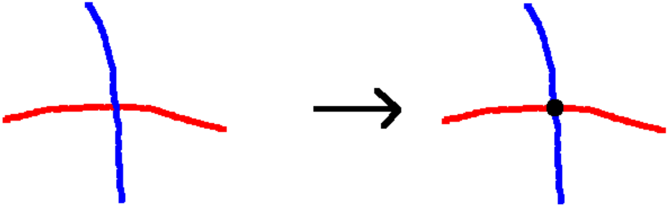
Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak $t(G_1) = t(G_2)$.

- můžeme předpokládat, že G_1 a G_2 nemají smyčky:
  - vznikne-li G' podrozdělením hrany G, pak $|E(G')| = |E(G)| + 1$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)|$, proto $t(G') = t(G)$
- stačí uvažovat uzavřeně buňkově nakreslené grafy:
  - vznikne-li G' přidáním vrcholu do stěny G délky k a spojením se všemi jejími vrcholy, pak $|E(G')| = |E(G)| + k$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)| + k - 1$, proto $t(G') = t(G)$
- můžeme předpokládat, že hrany G_1 a G_2 se nekříží (podrozdělíme hrany v kříženích)
- dle Lemmatu, $t(G_1) = t(G_1 \cup G_2)$ a $t(G_2) = t(G_1 \cup G_2)$

Důkaz věty

Věta

Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak $t(G_1) = t(G_2)$.



Důkaz věty

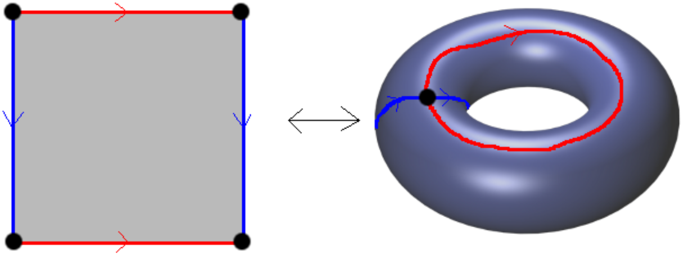
Věta

Jsou-li grafy G_1 a G_2 buňkově nakreslené na stejné ploše, pak $t(G_1) = t(G_2)$.

- můžeme předpokládat, že G_1 a G_2 nemají smyčky:
  - vznikne-li G' podrozdělením hrany G, pak $|E(G')| = |E(G)| + 1$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)|$, proto $t(G') = t(G)$
- stačí uvažovat uzavřeně buňkově nakreslené grafy:
  - vznikne-li G' přidáním vrcholu do stěny G délky k a spojením se všemi jejími vrcholy, pak $|E(G')| = |E(G)| + k$, $|V(G')| = |V(G)| + 1$ a $|F(G')| = |F(G)| + k - 1$, proto $t(G') = t(G)$
- můžeme předpokládat, že hrany G_1 a G_2 se nekříží (podrozdělíme hrany v kříženích)
- dle Lemmatu, $t(G_1) = t(G_1 \cup G_2)$ a $t(G_2) = t(G_1 \cup G_2)$

Jak určit rod plochy?

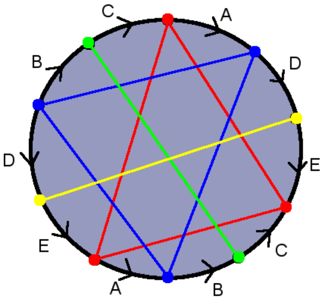
Mnohoúhelníková reprezentace dává buňkově nakreslený graf s jednou stěnou:



Rod toru je $|E(G)| + 2 - |V(G)| - |F(G)| = 2 + 2 - 1 - 1 = 2$.

Rod z mnohoúhelníkové reprezentace

- $|F(G)| = 1$
- $|E(G)|$ je polovina počtu hran mnohoúhelníka
- $|V(G)|$ …zidentifikuji, co je vynucené lepením



$|E(G)| = 5$, $|V(G)| = 4$, tedy rod je $5 + 2 - 4 - 1 = 2$.

Rod z mnohoúhelníkové reprezentace

- $|F(G)| = 1$
- $|E(G)|$ je polovina počtu hran mnohoúhelníka
- $|V(G)|$ ... zidentifikuji, co je vynucené lepením

Formálně:

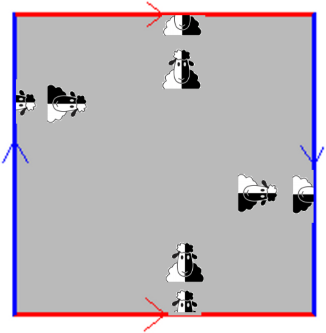
- $x \sim y$ jestliže lepíme xx' s yy' nebo $x'x$ s $y'y$ pro nějaké x' a y'
- $|V(G)|$ je počet tříd ekvivalence dané tranzitivním uzávěrem relace $\sim$

Rod příkladů

- rovina AA^{-1}: $|E| = 1$, $|V| = 2$, rod 0
- projektivní rovina AA: $|E| = 1$, $|V| = 1$, rod 1
- torus $ABA^{-1}B^{-1}$: $|E| = 2$, $|V| = 1$, rod 2
- Kleinova láhev $ABA^{-1}B$: $|E| = 2$, $|V| = 1$, rod 2

Orientovatelnost

Na Kleinově láhvi nelze nadefinovat, co je vlevo a co vpravo:



Pozorování: každá uzavřená jednoduchá křivka má okolí homeomorfní buď otevřenému válci nebo Möbiovu pásku.

Orientovatelnost

Pozorování: každá uzavřená jednoduchá křivka má okolí homeomorfní buď otevřenému válci nebo Möbiovu pásku.

Definice

Plocha Σ je orientovatelná, jestliže každá uzavřená křivka má okolí homeomorfní otevřenému válci; jinak je Σ neorientovatelná.

V mnohoúhelníkové reprezentaci: plocha je neorientovatelná, jestliže zápis obsahuje $\dots X \dots X \dots$ nebo $\dots X^{-1} \dots X^{-1} \dots$

Klasifikace ploch

Věta

- Mají-li dvě plochy stejný rod a orientovatelnost, pak jsou homeomorfní.
- Rod každé orientovatelné plochy je sudý a nezáporný.
- Rod každé neorientovatelné plochy je kladný.

Idea důkazu: rozřezání a slepení mnohoúhelníka do standardního tvaru

- $ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1}\dots$ pro orientovatelné plochy
- $AABBCC\dots$ pro neorientovatelné plochy

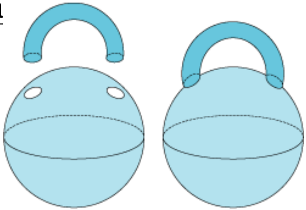
Terminologické poznámky

- rod g se označuje jako Eulerovský rod
- orientovatelnou plochu rodu $2g$ značíme Σ_g, neorientovatelnou plochu rodu g značíme Π_g
  - sféra Σ_0, torus Σ_1, projektivní rovina Π_1, Kleinova láhev Π_2
- pro orientovatelné plochy občas rod definuje jako $g/2$
- $2 - g$ je Eulerova charakteristika

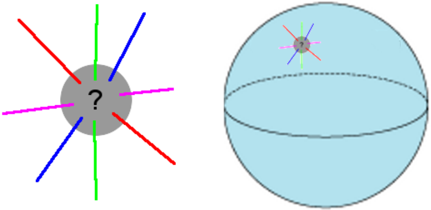
Ucha a křižítka

Jiný popis ploch:

- přidání <u>ucha</u>



- přidání <u>křižítka</u>



Ucha a křižítka

Lemma

Přidání ucha zvyšuje rod o 2 a nemění orientovatelnost. Přidáním křižítka vznikne neorientovatelná plocha o 1 vyššího rodu.

Důkaz: rozmyslet si, jak „přestřihnutí“ ucha či „vystřihnutí“ křižítka změní počet vrcholů, hran a stěn grafu na ploše (cvičení).

Důsledek

Koule s a uchy je Σ_a. Koule s a uchy a $b > 0$ křižítky je Π_{2a+b}.

Výsledná plocha nezáleží na vzájemné pozici uch a křižítek.

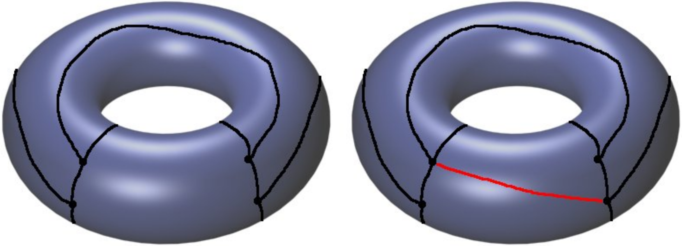
Vlastnosti grafů na plochách

Zobecnění výsledků pro rovinné grafy:

- charakterizace přes zakázaná podrozdělení (podrobněji příště)
- omezený počet hran, minimální stupeň
- barevnost

Počet hran

Každé nakreslení lze rozšířit na buňkové přidáváním hran beze změny počtu stěn:



Lemma

Je-li G nakreslený na ploše rodu g, pak
$|E(G)| \leq |V(G)| + |F(G)| + g - 2$.

Počet hran

Věta

Jestliže G je nakreslený na ploše rodu g, nemá smyčky ani násobné hrany a $|V(G)| \geq 3$, pak $|E(G)| \leq 3|V(G)| + 3g - 6$.

Můžeme předpokládat, že G nemá izolované vrcholy. Pak každá stěna má délku alespoň 3 a $2|E(G)| \geq 3|F(G)|$.

$$
\begin{aligned}
|E(G)| &\leq |V(G)| + |F(G)| + g - 2 \\
&\leq |V(G)| + \frac{2}{3}|E(G)| + g - 2
\end{aligned}
$$

Degenerovanost

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E| \leq 6|V(G)| + 6g - 12$$

Věta

Jestliže G je nakreslený na ploše rodu g a nemá smyčky ani násobné hrany, pak jeho průměrný stupeň je nejvýše $6 + \frac{6g-12}{|V(G)|}$.

Důsledek

Jestliže G je nakreslený na ploše rodu g a nemá smyčky ani násobné hrany, pak $\delta(G) \leq 6 + \frac{6g-12}{|V(G)|}$.

Barevnost

Nechť G je nejmenší graf s $\chi(G) = c \geq 7$, nakreslený na ploše rodu $g > 0$.

- $\delta(G) \geq c - 1$
  - jinak odebereme vrchol stupně $\leq c - 2$ a dostaneme menší graf barevnosti c
- $c - 7 \geq 0$ a $|V(G)| \geq \chi(G) = c$, proto $(c - 7)|V(G)| \geq c(c - 7)$
- $$\begin{aligned} c - 1 &\leq \delta(G) \leq 6 + \frac{6g - 12}{|V(G)|} \\ (c - 7)|V(G)| &\leq 6g - 12 \\ c(c - 7) &\leq 6g - 12 \\ c &\leq \frac{7 + \sqrt{1 + 24g}}{2} \end{aligned}$$

Heawoodova formule

Věta

Je-li G nakreslený na plochu rodu $g > 0$, pak

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24g}}{2} \right\rfloor .$$

- je-li $\chi(G) \leq 6$, nerovnost platí vždy, jinak viz předchozí slajd
- věta platí i pro $g = 0$ (věta o 4 barvách)

Spodní odhad

Věta (Ringel a Youngs)

Úplný graf s $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24g}}{2} \right\rfloor$ vrcholy lze nakreslit na libovolnou plochu rodu g různou od Kleinovy láhve.

- odhad v Heawoodově formuli je těsný pro každé g
- cvičení: K_7 nelze nakreslit na Kleinovu láhev