WQO

Zdeněk Dvořák

26. února 2016

Definice 1. *Nechť* $\preceq$ *je částečné uspořádání množiny* X*. Říkáme, že* $\preceq$ *je* WQO *na* X*, jestliže pro každou nekonečnou posloupnost* $x_1, x_2, \ldots$ *prvků z* X *existují* $i < j$ *tž.* $x_i \preceq x_j$*.*

Říkejme, že posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ je *špatná*, jestliže neexistují $i < j$ tž. $x_i \preceq x_j$; tj. $\preceq$ je WQO právě tehdy, když pro něj neexistuje špatná posloupnost.

Lemma 1. *Nechť* $\preceq$ *je částečné uspořádání množiny* X*. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) $\preceq$ *je WQO na* X*.*

(b) $\preceq$ *nemá nekonečný antiřetězec ani nekonečný klesající řetězec na* X*.*

(c) Každá nekonečná posloupnost prvků z X *má nekonečnou neklesající (vybranou) podposloupnost.*

Důkaz. Nekonečný antiřetězec i nekonečný klesající řetězec by porušoval podmínku z definice WQO, proto (a) implikuje (b).

Nechť x_1, x_2, … je nekonečná posloupnost prvků z X. Nechť K je úplný graf s množinou vrcholů $\mathbf{N}$, a nechť ψ je obarvení jeho hran definované tak, že pro $i < j$ je

$$\psi(ij) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x_i \preceq x_j \\ 1 & \text{jestliže } x_j \prec x_i \\ 2 & \text{jestliže } x_i \text{ a } x_j \text{ jsou v uspořádání } \preceq \text{ neporovnatelné.} \end{cases}$$

Dle Ramseyovy věty existuje v tomto obarvení nekonečná monochromatická klika Q. Jestliže hrany Q mají barvu 1, pak podposloupnost odpovídající $V(Q)$ je nekonečný klesající řetězec, a jestliže mají barvu 2, pak podposloupnost odpovídající $V(Q)$ je nekonečný antiřetězec. Platí-li (b), pak ani jedna z těchto možností nenastane, a proto hrany Q mají barvu 0 a podposloupnost odpovídající $V(Q)$ je neklesající. Tedy (b) implikuje (c).

Triviálně, (c) implikuje (a). □

1 Odvozená uspořádání

Definice 2. *Nechť* $\preceq_1$ *a* $\preceq_2$ *jsou částečná uspořádání na množinách* A_1 *a* A_2. *Pak jejich* kartézský součin *je uspořádání* $\preceq$ *množiny* $A_1 \times A_2$ *definované tak, že* $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ *právě tehdy, když* $x_1 \preceq_1 y_1$ *a* $x_2 \preceq_2 y_2$.

Lemma 2. *Kartézský součin WQO je WQO.*

Důkaz. Používejme značení jako v Definici 2. Nechť $(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_3, d_3), \ldots$ je libovolná nekonečná posloupnost prvků $A_1 \times A_2$. Uvažme posloupnost $c_1, c_2, \ldots$. Jelikož $\preceq_1$ je WQO, dle Lemma 1(c) existuje nekonečná neklesající podposloupnost $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, \ldots$. Uvažme posloupnost $d_{i_1}, d_{i_2}, d_{i_3}, \ldots$. Jelikož $\preceq_2$ je WQO, existují $j < k$ tž. $d_{i_j} \preceq_2 d_{i_k}$. Dle volby podposloupnosti platí i $c_{i_j} \preceq_1 c_{i_k}$, a proto $(c_{i_j}, d_{i_j}) \preceq (c_{i_k}, d_{i_k})$. □

Definice 3. *Nechť* $\preceq$ *je částečné uspořádání množiny* X. *Jako* $S(X)$ *označme množinu všech konečných posloupností prvků z* X *(pro odlišení jim budeme říkat* řetězce*) a jako* $\preceq_S$ *definujme částečné uspořádání* $S(X)$ *tak, že* $a_1 a_2 \ldots a_k \preceq_S b_1 b_2 \ldots b_m$ *právě tehdy, když existuje rostoucí funkce* $f : [k] \to [m]$ *tž.* $a_i \preceq b_{f(i)}$ *pro* $i = 1, \ldots, k$.

Příklady:

- Nechť $x \preceq y$ právě tehdy, když $x = y$. Pak $A \preceq_S B$ právě tehdy, když A je (vybraná) podposloupnost B.
- Nechť $\preceq$ je relace „být minorem“ na třídě konečných grafů. Nechť G_1 a G_2 jsou grafy, a A_1 a A_2 jsou posloupnosti jejich komponent. Jestliže $A_1 \preceq_S A_2$, pak G_1 je minor G_2 (ale opačná implikace nemusí nutně platit).

Lemma 3. *Jestliže* $\preceq$ *je WQO na* X, *pak* $\preceq_S$ *je WQO na* $S(X)$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje špatná posloupnost řetězců s prvky z X. Zvolme špatnou posloupnost $A_1, A_2, \ldots$ tak, že

- A_1 je nejkratší řetězec, kterým začíná špatná posloupnost,
- A_2 je nejkratší řetězec, pro který existuje špatná posloupnost začínající A_1, A_2,
- A_3 je nejkratší řetězec, pro který existuje špatná posloupnost začínající A_1, A_2, A_3,

atd.

Protože $A_1, A_2, \ldots$ je špatná, prázdný řetězec není jejím prvkem. Označme jako a_i první prvek řetězce A_i a jako B_i podřetězec A_i vzniklý smazáním prvního prvku. Nechť $Y = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Uvažme případ, že by existovala nekonečná špatná posloupnost $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots$ pro uspořádání $\preceq_S$ na Y. Nechť $k = \min\{i_1, i_2, \ldots\}$. Kdyby $k \neq i_1$, můžeme z této posloupnosti zahodit konečně mnoho prvků tak, aby index prvního prvku zbylé posloupnosti byl k; BÚNO tedy $k = i_1$. Pak posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots$ je špatná, ale B_{i_1} je kratší než $A_k = A_{i_1}$, což je spor s volbou $A_1, A_2, \ldots$.

Tedy neexistuje žádná špatná posloupnost řetězců z Y, a proto $\preceq_S$ je WQO na Y. Nechť $\leq$ je kartézský součin $\preceq$ a $\preceq_S$ na $X \times Y$. Dle Lemma 2 je $\leq$ WQO. Uvažme posloupnost $(a_1, B_1), (a_2, B_2), \ldots$; existují $i < j$ tž. $(a_i, B_i) \leq (a_j, B_j)$. Pak ale $a_i \preceq a_j$ a $B_i \preceq_S B_j$, a proto $A_i \preceq_S A_j$. To je spor s předpokladem, že $A_1, A_2, \ldots$ je špatná posloupnost. □

2 Cvičení

Nechť T_1 a T_2 jsou dva zakořeněné stromy. Zobrazení $f : V(T_1) \to V(T_2)$ je *monotónní*, jestliže pro každé $u, v \in V(T_1)$ platí, že u potomkem v v T_1 právě tehdy, když $f(u)$ je potomkem $f(v)$ v T_2.

1. Nechť X je množina zakořeněných stromů, a $\preceq$ je definováno na X tak, že $T_1 \preceq T_2$, když existuje monotónní zobrazení $f : V(T_1) \to V(T_2)$ (tedy podrozdělení T_1 je zakořeněným podstromem T_2). Ukažte, že $\preceq$ je WQO na X:
   - Uvažte pro spor vhodně minimalizovanou špatnou posloupnost stromů $S_1, S_2, \ldots$.
   - Nechť Y je množina všech vlastních zakořeněných podstromů stromů $S_1, S_2, \ldots$; ukažte, že z minimality plyne, že $\preceq$ je WQO na Y.
   - Dle Lemma 3 je i $\preceq_S$ WQO na $S(Y)$. Nechť r_i je kořen S_i, a nechť F_i je řetězec, jehož prvky jsou komponenty $S_i - r_i$. Jelikož $F_1, F_2, \ldots$ je posloupnost prvků z $S(Y)$, existují $i < j$ tž. $F_i \preceq_S F_j$. Ukažte, že $S_i \preceq S_j$.
2. S využitím výsledku předchozího cvičení ukažte, že relace „být minorem“ je WQO na stromech.
3. S využitím výsledku předchozího cvičení a Lemma 3 ukažte, že relace „být minorem“ je WQO na lesech.

4. Nechť $\leq$ je WQO na množině A, a nechť B je množina dvojic (T, q), kde T je zakořeněný strom a $q : V(T) \to A$ přiřazuje každému vrcholu „barvu“ z A. Nechť $\preceq$ je definováno na X tak, že $(T_1, q_1) \preceq (T_2, q_2)$, když existuje monotónní zobrazení $f : V(T_1) \to V(T_2)$ tž. $q_1(v) \leq q_2(f(v))$ pro každé $v \in V(T_1)$. Ukažte, že $\preceq$ je WQO na B.

5. K zamyšlení: jak by tyto důkazy bylo potřeba modifikovat, aby fungovaly i pro grafy se stromovou dekompozicí omezené šířky?