Stromové rozklady

Zdeněk Dvořák

25. října 2017

Definice 1. Stromový rozklad *grafu G je dvojice (T,β) taková, že*

- *T je strom,*
- *β je funkce přiřazující každému vrcholu T podmnožinu vrcholů v G,*
- *pro každé $v \in V(G)$ existuje $x \in V(T)$ tž. $v \in \beta(x)$,*
- *pro každé $uv \in E(G)$ existuje $x \in V(T)$ tž. $u, v \in \beta(x)$, a*
- *pro každé $v \in V(G)$ indukuje $\{x \in V(T) : v \in \beta(x)\}$ souvislý podstrom T.*

Lemma 1. *Je-li (T,β) stromový rozklad grafu G a je-li H souvislý podgraf G, pak $\{x \in V(T) : V(H) \cap \beta(x) \neq \emptyset\}$ indukuje souvislý podstrom T_H stromu T.*

Důkaz. Indukcí dle $|V(H)|$. Pro $|V(H)| = 1$ platí z definice stromového rozkladu. Jestliže $|V(H)| > 1$, pak existuje $v \in V(H)$ tž. $H - v$ je souvislý (např. libovolný list kostry H). Nechť u je soused v v H.

Z indukčního předpokladu je T_{H-v} souvislý podstrom T. Dle definice stromového rozkladu je T_v souvislý podstrom. Navíc $T_{H-v} \cap T_v \neq \emptyset$, jelikož $uv \in E(G)$, a proto existuje $x \in V(T)$ tž. $u, v \in \beta(x)$. Proto $T_H = T_{H-v} \cup T_v$ je souvislý. □

Lemma 2. *Je-li (T,β) stromový rozklad G a K je klika v G, pak existuje $x \in V(T)$ tž. $K \subseteq \beta(x)$.*

Důkaz. Indukcí dle velikosti K. Pro $|K| \le 2$ platí z definice stromového rozkladu. Nechť $K = \{v_1, \ldots, v_k\}$ pro nějaké $k \ge 3$. Nechť $K_1 = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ a $K_2 = \{v_2, \ldots, v_k\}$. Z indukčního předpokladu existují vrcholy $x_1, x_2 \in V(T)$ tž. $K_1 \subseteq \beta(x_1)$ a $K_2 \subseteq \beta(x_2)$. Nechť x je poslední vrchol na cestě z x_1 do x_2 v T tž. $v_1 \in \beta(x)$. Zjevně $\{v_2, \ldots, v_{k-1}\} \in \beta(x)$. Kdyby $v_k \notin \beta(x)$, pak T neobsahuje žádný vrchol y splňující $v_1, v_k \in \beta(y)$, což je spor, jelikož $v_1 v_k \in E(G)$. Proto $K \subseteq \beta(x)$. □

1 Stromová šířka

Definice 2. Šířka *stromového rozkladu* (T, β) *je* $\max\{|\beta(v)| : v \in V(T)\} - 1$. Stromová šířka $\mathrm{tw}(G)$ *grafu* G *je nejmenší šířka jeho stromového rozkladu.*

Pozorování 3. *Graf* G *má stromovou šířku nejvýše* t *právě tehdy, lze-li ho vyrobit pomocí* $(\leq t)$*-sum z grafů s nejvýše* $t+1$ *vrcholy.*

Lemma 4. *Je-li* H *minor* G*, pak* $\mathrm{tw}(H) \leq \mathrm{tw}(G)$*.*

Důkaz. Nechť (T, β) je stromový rozklad G šířky $t = \mathrm{tw}(G)$. Nechť φ je model H v G. Definujme β' tak, že pro $x \in V(T)$ vrchol $v \in V(H)$ patří do $\beta'(x)$ právě tehdy, když $\varphi(v) \cap \beta(x) \neq \emptyset$. Pak (T, β') je stromový rozklad H šířky nejvýše t. □

Pozorování 5. $\mathrm{tw}(K_n) = n - 1$.

Lemma 6. *Pro graf* G *platí:*

- $\mathrm{tw}(G) = 0$*, právě když* $E(G) = \emptyset$*, tj.* K_2 *není minor* G*.*
- $\mathrm{tw}(G) \leq 1$*, právě když* G *je les, tj.* K_3 *není minor* G*.*
- $\mathrm{tw}(G) \leq 2$*, právě když* K_4 *není minor* G*.*

Důkaz. Stačí zkonstruovat stromové rozklady. Pro grafy bez minoru K_4 plyne z Lemma 4 z poznámek k 5-té přednášce. □

Definice 3. Bramble $\mathcal{B}$ *v grafu* G *je množina neprázdných podmnožin* $V(G)$ *taková, že pro libovolné* $X, Y \in \mathcal{B}$ *je podgraf* G *indukovaný* $X \cup Y$ *souvislý (a speciálně, každá* $X \in \mathcal{B}$ *indukuje souvislý podgraf).* Řád *bramble* $\mathcal{B}$ *je velikost nejmenší množiny* $Z \subseteq V(G)$ *takové, že* $X \cap Z \neq \emptyset$ *pro každé* $X \in \mathcal{B}$*.*

Lemma 7. *Nechť* (T, β) *je stromový rozklad* G *a* $\mathcal{B}$ *je bramble v* G*. Pak existuje* $v \in V(T)$ *tž.* $\beta(v)$ *protíná všechny množiny z* $\mathcal{B}$*.*

Důkaz. Pro hranu $uv \in E(T)$ nadefinujme $T_{u,v}$ jako podstrom $T - uv$ obsahující v.

Pro spor předpokládejme, že pro každé $u \in V(T)$ existuje $X \in \mathcal{B}$ disjunktní s $\beta(u)$. Jelikož $G[X]$ je souvislý, $\{x : \beta(x) \cap X \neq \emptyset\}$ indukuje souvislý podstrom T_X stromu T dle Lemma 1. Existuje tedy soused v vrcholu u v T takový, že $T_X \subseteq T_{u,v}$. Označme $\pi(u) := v$ a $X(u) := X$.

Jelikož T je strom, existuje $uv \in E(T)$ tž. $\pi(u) = v$ a $\pi(v) = u$. Jelikož $X(u) \cup X(v)$ indukuje souvislý podgraf G, existují vrcholy $w \in X(u)$ a $z \in X(v)$ tž. $w = z$ nebo $wz \in E(G)$, a z definice stromového rozkladu existuje $x \in V(T)$ tž. $w, z \in \beta(x)$. Ale stromy $T_{X(u)} \subseteq T_{u,v}$ a $T_{X(v)} \subseteq T_{v,u}$ jsou disjunktní, což je spor. □

Důsledek 8. *Nechť (T, β) je stromový rozklad G a $\mathcal{B}$ je bramble v G řádu k. Pak (T, β) má šířku alespoň $k - 1$.*

Mřížka o rozměrech $n \times n$ je graf s množinou vrcholů $\{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n\}$ tž. dva vrcholy (i_1, j_1) a (i_2, j_2) sousedí právě tehdy, když $|i_2 - i_1| + |j_2 - j_1| = 1$.

Lemma 9. *Mřížka o rozměrech $n \times n$ má stromovou šířku alespoň $n - 1$.*

Důkaz. Nechť R_i je i-tý řádek a S_j je j-tý sloupec mřížky. Nechť $\mathcal{B} = \{R_i \cup S_j : 1 \leq i, j \leq n\}$. Pak $\mathcal{B}$ je bramble řádu n. □

Důsledek 10. *Existují grafy bez minoru K_5 s libovolně velkou stromovou šířkou.*

2 Chordální grafy

Definice 4. *Graf G je* chordální*, jestliže neobsahuje žádný indukovaný cyklus délky alespoň 4.*

Vrchol v je *simpliciální*, jestliže jeho okolí indukuje kliku.

Lemma 11 (Viz KG2)**.** *Graf je G chordální právě tehdy, jestliže každý jeho indukovaný podgraf obsahuje simpliciální vrchol.*

Důsledek 12. *Graf G je chordální právě tehdy, když má stromový rozklad (T, β) takový, že $\beta(x)$ je klika v G pro každé $x \in V(T)$.*

Důkaz. Dokazujeme indukcí dle počtu vrcholů G. Nechť G je chordální a v je jeho simpliciální vrchol. Z indukce má $G - v$ stromový rozklad (T', β') takový, že $\beta'(x)$ je klika v $G - v$ pro každé $x \in V(T')$. Okolí v v G je klika K, a dle Lemma 2 existuje $z \in V(T')$ takové, že $K \subseteq \beta'(x)$. Nechť T vznikne z T' přidáním listu y sousedícího s z, a nechť β je definováno jako $\beta(x) = \beta'(x)$ pro $x \in V(T')$ a $\beta(y) = K \cup \{v\}$. Pak (T, β) je stromový rozklad G s požadovanými vlastnostmi.

Opačné tvrzení viz domácí úkol. □

Důsledek 13. *Graf G má stromovou šířku nejvýše t právě tehdy, když je podgrafem chordálního grafu klikovosti $t + 1$.*

3 Bramble a minory

Lemma 14. *Je-li $\mathcal{B}$ bramble v grafu G, pak existuje cesta P v G protínající všechny prvky $\mathcal{B}$.*

Důkaz. Cestu P konstruujeme tak, aby vždy existovala množina $X \in \mathcal{B}$, která ji protíná v právě jednom vrcholu x (konstrukci zahájíme s triviální cestou skládající se z jednoho vrcholu obsaženého v nějaké z množin bramble). Jestliže existuje $X' \in \mathcal{B}$ disjunktní s P, pak prodloužíme P nejkratší cestou z x do X' uvnitř $G[X \cup X']$; výsledná cesta protíná X' v právě jednom vrcholu, požadovaný invariant je tedy zachován. Takto cestu P prodlužujeme, dokud neprotne všechny množiny z $\mathcal{B}$. $\square$

Pozorování 15. *Nechť $\mathcal{B}$ je bramble v grafu G a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Pak $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ jsou bramble v G a součet jejich řádů je větší nebo roven řádu bramble $\mathcal{B}$.*

Lemma 16. *Nechť $\mathcal{B}$ je bramble řádu alespoň $2k^2$ v grafu G a $P \subseteq G$ je cesta protínající všechny prvky $\mathcal{B}$. Pak existuje množina $A \subseteq V(P)$ velikosti $2k$ tž. pro každou k-prvkovou podmnožinu $X \subseteq A$ existuje v G k vrcholově disjunktních cest z X do $A \setminus X$.*

Důkaz. Rozložme P na vrcholově disjunktní podcesty $P_1, \ldots, P_{2k}$ následovně: nechť pro $i = 1, \ldots, 2k$ je P_i nejkratší počáteční úsek $P - V(P_1 \cup \ldots \cup P_{i-1})$ takový, že bramble $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ skládající se z množin z $\mathcal{B} \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{i-1})$, které protnou P_i, má řád k. To lze, jelikož dle pozorování 15 má bramble $\mathcal{B} \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{i-1})$ řád alespoň $(2k - (i-1))k \geq k$. Nechť A je množina obsahující právě jeden (libovolný) vrchol z $P_1, \ldots, P_{2k}$.

Kdyby pro nějakou k-prvkovou podmnožinu $X \subseteq A$ neexistovalo v G k vrcholově disjunktních cest z X do $A \setminus X$, pak by dle Mengerovy věty existovala množina $S \subseteq V(G)$ velikosti menší než k tž. v $G - S$ neexistuje žádná cesta z $A \setminus S$ do $A \setminus (X \cup S)$. Jelikož $|X|, |A \setminus X| \geq k$ a $|S| < k$, existují $i, j \in \{1, \ldots, 2k\}$ tž. P_i i P_j jsou disjunktní s S, $X \cap P_i \neq \emptyset$ a $(A \setminus X) \cap P_j \neq \emptyset$. Jelikož $\mathcal{B}_i$ i $\mathcal{B}_j$ mají řád k a $|S| < k$, existují $B_i \in \mathcal{B}_i$ a $B_j \in \mathcal{B}_j$ disjunktní s S. Pak ale podgraf $P_i \cup P_j \cup G[B_i \cup B_j]$ je souvislý, disjunktní s S, a protíná jak X tak $A \setminus X$, což je spor. Proto mezi X a $A \setminus X$ existuje k vrcholově disjunktních cest. $\square$

Žebřík Z_k je graf skládající se z cest $u_1 \ldots u_k$ a $v_1 \ldots v_k$ a hran $u_i v_i$ pro $i = 1, \ldots, k$.

Lemma 17. *Nechť $\mathcal{B}$ je bramble v grafu G. Má-li $\mathcal{B}$ řád alespoň $2k^4$, pak G obsahuje podrozdělení Z_k.*

Důkaz. Dle lemmat 14 a 16 existuje v G cesta P a množina $A \subseteq V(P)$ velikosti $2k^2$ taková, že pro každou k^2-prvkovou podmnožinu $X \subseteq A$ existuje v G k^2 vrcholově disjunktních cest z X do $A \setminus X$. Nechť P_1 je počáteční úsek P obsahující právě k^2 vrcholů z A, a $P_2 = P \setminus V(P_1)$. Pak v G existuje k^2 vrcholově disjunktních cest $Q_1, \ldots, Q_{k^2}$ se začátky v P_1 a konci v P_2. Nechť $x_1, \ldots, x_{k^2}$ a $y_1, \ldots, y_{k^2}$ jsou začátky a konce těchto cest na P_1 a P_2, uspořádané podle jejich pořadí na P_1 či P_2. BÚNO pro $j = 1, \ldots, k^2$ cesta Q_j začíná v x_j; nechť její konec je y_{i_j}. V posloupnosti $i_1, i_2, \ldots, i_{k^2}$ existuje rostoucí či klesající podposloupnost délky k, řekněme $i_{j_1}, \ldots, i_{j_k}$ pro nějaké $j_1 < \ldots < j_k$. Pak P_1, P_2 a cesty $Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_k}$ tvoří podrozdělení Z_k v G. $\square$

4 Erdős-Posova vlastnost

Nechť $\mathcal{F}$ je třída grafů. Říkáme, že $\mathcal{F}$ má *Erdős-Pósovu vlastnost*, jestliže existuje nějaká funkce f taková, že pro každý graf G a přirozené číslo k buď G obsahuje více než k vrcholově disjunktních podgrafů patřících do $\mathcal{F}$, nebo existuje $Z \subseteq V(G)$ velikosti nejvýše $f(k)$ tž. $G - Z$ neobsahuje žádný podgraf patřící do $\mathcal{F}$.

Lemma 18. *Nechť t je přirozené číslo. Má-li každý graf z $\mathcal{F}$ nevýše t vrcholů, pak $\mathcal{F}$ má Erdős-Pósovu vlastnost.*

Důkaz. Můžeme položit $f(k) = tk$. Nechť G je libovolný graf a $\{F_1, \ldots, F_m\}$ je maximální množina vrcholově disjunktních podgrafů G patřících do $\mathcal{F}$. Pak každý podgraf G patřící do $\mathcal{F}$ protne $Z = V(F_1 \cup \ldots \cup F_m)$, a je-li $m \leq k$, pak $|Z| \leq f(k)$. $\square$

Nechť $\mathcal{C}$ je třída všech cyklů. Chceme ukázat, že $\mathcal{C}$ má Erdős-Pósovu vlastnost; tj. že buď G obsahuje více než k vrcholově disjunktních cyklů, nebo existuje množina Z nejvýše $f(k)$ vrcholů taková, že $G - Z$ je les.

Pozorování 19. *Nechť $k \geq 1$ je přirozené číslo. Nechť $\mathcal{B}$ je množina všech podgrafů grafu G, které indukují souvislý podgraf obsahující více než $k/2$ vrcholově disjunktních cyklů. Jestliže G neobsahuje více než k vrcholově disjunktních cyklů, pak $\mathcal{B}$ je bramble v G.*

Věta 20. *Třída $\mathcal{C}$ všech cyklů má Erdős-Pósovu vlastnost.*

Důkaz. Nechť I je multimnožina nezáporných přirozených čísel. Říkáme, že I je *k-omezená*, jestliže $\max I \leq k/2$ a $\sum I \leq k$. Nadefinujme $f(0) = 0$ a $f(k) = 2(2k+2)^4 + \max\{\sum_{i \in I} f(i) : I\ k\text{-omezená}\}$ pro $k \geq 1$.

Nechť G je graf neobsahující více než k vrcholově disjunktních cyklů a $\mathcal{B}$ je bramble z pozorování 19. Kdyby $\mathcal{B}$ měla řád alespoň $2(2k+2)^4$, pak dle lemma 17 G obsahuje podrozdělení Z_{2k+2} a má tedy $k+1$ vrcholově disjunktních cyklů, což je spor. Proto existuje množina $Z_0 \subseteq V(G)$ velikosti méně než $2(2k+2)^4$ protínající všechny prvky $\mathcal{B}$. Jinak řečeno, žádná z komponent $G - Z_0$ neobsahuje více než $k/2$ vrcholově disjunktních cyklů. Nechť $C_1, \ldots, C_m$ jsou komponenty $G - Z_0$, a nechť pro $i = 1, \ldots, m$ je $k_i \leq k/2$ maximální počet vrcholově disjunktních cyklů v $G[C_i]$. Z indukce existuje $Z_i \subseteq C_i$ velikosti nejvýše $f(k_i)$ tž. $G[C_i] - Z_i$ je les. Položme $Z = Z_0 \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_m$. Pak $G - Z$ je les. Navíc, jelikož G neobsahuje více než k vrcholově disjunktních cyklů, máme $\sum_{i=1}^m k_i \leq k$, a proto

$$|Z| = |Z_0| + \sum_{i=1}^{m} |Z_i| \leq 2(2k+2)^4 + \sum_{i=1}^{m} f(k_i) \leq f(k).$$

□

5 Bramble a stromová šířka

Separace grafu G je dvojice (A, B), kde $A, B \subseteq V(G)$, $A \cup B = V(G)$, a každá hrana G je obsažena buď v $G[A]$ nebo v $G[B]$ (tedy neexistuje hrana mezi $A \setminus B$ a $B \setminus A$. *Velikost* separace (A, B) je $|A \cap B|$.

Lemma 21. *Nechť (T, β) je stromový rozklad grafu G a $w \in V(T)$. Nechť (A, B) je separace velikosti k tž. $\beta(w) \subseteq A$ a $\beta(w)$ nelze oddělit od $A \cap B$ odebráním méně než k vrcholů. Pak existuje stromový rozklad (T, β') grafu $G[B]$ tž.*

- *$\beta'(w) = A \cap B$,*
- *každý vrchol $v \in V(T)$ splňuje $|\beta'(v)| \leq |\beta(v)|$ a*
- *každý list $v \in V(T)$ různý od w splňuje $\beta'(v) \subseteq \beta(v)$.*

Důkaz. Dle Mengerovy věty existuje k disjunktních cest $P_1, \ldots, P_k$ v G z $\beta(w)$ do $A \cap B$. Jelikož $|A \cap B| = k$ a $\beta(w) \subseteq A$, tyto cesty jsou obsaženy v $G[A]$. Nechť z_i je konec cesty P_i v $A \cap B$. Nadefinujme $\beta'(v) = \beta(v) \cap B$ pro listy v stromu T různé od w a $\beta'(v) = (\beta(v) \cap B) \cup \{z_i : V(P_i) \cap \beta(v) \neq \emptyset\}$ pro všechny další vrcholy $v \in V(T)$. Tvrdíme, že toto dává stromový rozklad $G[B]$ splňující podmínky. Jediná netriviální k ověření je, že $\{x \in V(T) : z_i \in \beta'(x)\}$ indukuje souvislý podstrom pro každé $z_i \in A \cap B$. Nicméně $\{x \in V(T) : V(P_i) \cap \beta(x) \neq \emptyset\}$ indukuje souvislý podstrom dle Lemma 1, a $\{x \in V(T) : z_i \in \beta'(x)\}$ se od něj liší pouze odebráním některých listů. □

Lemma 22. *Nechť* $\mathcal{B}$ *je bramble v grafu* G *taková, že neexistuje bramble* $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ *řádu alespoň* k*. Pak existuje stromový rozklad* (T, β) *grafu* G *takový, že každý vrchol* $v \in V(T)$ *splňující* $|\beta(v)| \geq k$ *je list* T *a existuje* $X \in \mathcal{B}$ *disjunktní s* $\beta(v)$*.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí dle $2^{|V(G)|} - |\mathcal{B}|$, předpokládejme proto, že platí pro všechny bramble s víc než $|\mathcal{B}|$ prvky. Nechť $Z \subseteq V(G)$ je nejmenší množina protínající všechny prvky $\mathcal{B}$; jelikož řád $\mathcal{B}$ je menší než k, máme $|Z| < k$. Tvrzení platí triviálně, jestliže $V(G) = Z$ (T lze zvolit jako jednovrcholový strom), proto předpokládejme, že $V(G) \neq Z$.

Uvažme libovolnou komponentu C grafu $G-Z$. Ukážeme, že platí následující tvrzení:

($\star$) Buď G má stromový rozklad splňující podmínky lemmatu, nebo graf $G[Z \cup C]$ má stromový rozklad (T_C, β_C) s vrcholem v_C takovým, že $\beta_C(v_C) = Z$ a každý vrchol $v \in V(T_C)$ splňující $|\beta_C(v)| \geq k$ je list T_C a existuje $X \in \mathcal{B}$ disjunktní s $\beta_C(v)$.

Toto tvrzení zjevně implikuje tvrzení lemmatu: Nechť $C_1, \ldots, C_m$ jsou komponenty $G - Z$. Jako T označme strom vzniklý z $T_{C_1}, \ldots, T_{C_m}$ zidentifikováním vrcholů $v_{C_1}, \ldots, v_{C_m}$, a pro každé $v \in V(T)$ patřící do stromu T_{C_i} definujme $\beta(v) = \beta_{C_i}(v)$. Pak (T, β) je stromový rozklad G splňující požadované podmínky.

Zbývá tedy dokázat platnost tvrzení ($\star$). Jestliže existuje $X \in \mathcal{B}$ tž. $G[X \cup C]$ není souvislý graf, pak nechť T_C je strom se dvěma vrcholy v_C a w_C, $\beta(v_C) = Z$ a $\beta(w_C) = Z' \cup C$, kde Z' je množina vrcholů Z, které mají souseda v C; zjevně X je disjunktní s $\beta(w_C)$, a proto tento stromový rozklad splňuje podmínky ($\star$).

Nechť tedy $G[X \cup C]$ je souvislý graf pro každé $X \in \mathcal{B}$, a $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{C\}$ je tedy bramble. Dle indukčního předpokladu existuje stromový rozklad (T_C, β') grafu G takový, že každý vrchol $v \in V(T_C)$ splňující $|\beta'(v)| \geq k$ je list T_C a existuje $X \in \mathcal{B}'$ disjunktní s $\beta'(v)$. Můžeme předpokládat, že tento rozklad nesplňuje podmínky lemmatu a existuje tedy list v_C stromu T_C takový, že $|\beta'(v_C)| \geq k$ a $\beta'(v_C)$ protíná všechny prvky $\mathcal{B}$; máme tedy $\beta'(v_C) \cap C \neq \emptyset$.

Povšimněme si, že $\beta'(v_C)$ nelze oddělit od Z odebráním méně než $|Z|$ vrcholů – jelikož $\mathcal{B}$ má řád $|Z|$, existuje $X \in \mathcal{B}$ disjunktní s odebranými vrcholy, $G[X]$ je souvislý graf, a X protíná jak Z tak $\beta'(v_C)$. Můžeme tedy aplikovat Lemma 21 s $w = v_C$, $A = V(G) \setminus C$ a $B = Z \cup C$. Tím dostaneme z (T_C, β') rozklad (T_C, β_C) splňující podmínku ($\star$): každý vrchol $v \in V(T_C)$ splňující $|\beta_C(v)| \geq k$ je list T_C (jelikož $|\beta'(v)| \geq |\beta_C(v)|$), a proto $\beta_C(v) \subseteq \beta'(v)$. Navíc dle volby (T_C, β') existuje $X \in \mathcal{B}'$ disjunktní s $\beta'(v)$ a tedy i s $\beta_C(v)$ a nemůže být $X = C$, jelikož $\beta_C(v) \subseteq Z \cup C$ a $|\beta_C(v)| \geq k > |Z|$. $\square$

Aplikujeme-li předchozí lemma s $\mathcal{B} = \emptyset$, dostáváme následující.

Důsledek 23. *Jestliže G nemá žádnou brambli řádu k, pak existuje stromový rozklad G šířky nejvýše $k - 2$.*