Linkovanost a topologické minory

Zdeněk Dvořák

4. ledna 2018

1 Hajósova hypotéza

Hypotéza 1 (Hajós). *Každý graf neobsahující podrozdělení K_k jako podgraf má barevnost nejvýše $k-1$.*

Nechť $R(a,a)$ je nejmenší přirozené číslo takové, že každý graf s alespoň $R(a,a)$ vrcholy obsahuje kliku nebo nezávislou množinu velikosti alespoň a. Takové číslo existuje dle Ramseyovy věty a $R(a,a)$ roste exponencielně v a. Existuje tedy a_0 takové, že $R(a,a) > 2a(a+1)^2$ pro každé $a \ge a_0$.

Věta 1. *Hajósova hypotéza neplatí pro žádné $k \ge 2a_0^2$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že pro nějaké $k \ge 2a_0^2$ má každý graf bez podrozdělení K_k barevnost nejvýše $k-1$.

Nechť $a = \lfloor\sqrt{k/2}\rfloor \ge a_0$ a $n = ak \le 2a(a+1)^2$. Jelikož $a \ge a_0$, máme $R(a,a) > n$, a proto existuje graf G na n vrcholech neobsahující ani kliku ani nezávislou množinu velikosti a. Jelikož $\alpha(G) < a$, graf G má barevnost větší než $n/a = k$. Dle předpokladu tedy G obsahuje podrozdělení K_k. Nechť X je množina větvicích vrcholů tohoto podrozdělení. Nejvýše $n-k$ podrozdělených hran K_k může procházet vrcholy G nepatřícími do X, podgraf $G[X]$ má tedy alespoň $\binom{k}{2} - (n-k) > \frac{k^2}{2} - n = \frac{k^2}{2}(1 - 2n/k^2)$ hran. Z Turánovy věty plyne, že $G[X]$ obsahuje kliku s alespoň $\frac{k^2}{2n} = \frac{k}{2a} \ge a$ vrcholy, což je spor. □

2 Souvislost a linkovanost

Graf je *k-linkovaný*, jestliže pro každých $2k$ navzájem různých vrcholů s_1, …, s_k, t_1, …, t_k v něm existují navzájem vrcholově disjunktní cesty P_1, …, P_k, kde P_i spojuje s_i s t_i pro $i = 1, \ldots, k$. Takovýmto cestám budeme říkat *$(s-t)$-linkování.* Naším cílem je dokázat následující výsledek.

Věta 2. *Je-li G $2k$-souvislý a obsahuje-li minor K_{4k}, pak G je k-linkovaný.*

Pro potřeby indukce budeme dokazovat následující silnější tvrzení.

Věta 3. *Nechť G je graf, $S = \{s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k\}$ podmnožina jeho vrcholů a H_1, …, H_{4k} navzájem vrcholově disjunktní neprázdné podgrafy G splňující následující podmínky:*

(a) *Pro $1 \leq i \leq 4k$, jestliže H_i není souvislý, pak každá jeho komponenta obsahuje vrchol z S.*

(b) *Pro $1 \leq i < j \leq 4k$, jestliže G neobsahuje hranu s jedním koncem ve $V(H_i)$ a druhým ve $V(H_j)$, pak jak H_i tak H_j obsahují vrchol z S.*

(c) *Pro všechny podgrafy $A, B \subseteq G$, jestliže $G = A \cup B$, $S \subseteq V(A)$ a existuje $i \in \{1, \dots, 4k\}$ tž. $H_i \subseteq B - V(A)$, pak $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k$.*

Potom G obsahuje $(s-t)$-linkování.

Důkaz věty 2 za pomoci věty 3. Mějme libovolné $S = \{s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k\} \subseteq V(G)$. Z předpokladů G obsahuje minor K_{4k}, tedy existují disjunktní neprázdné souvislé podgrafy $H_1, \dots, H_{4k} \subset V(G)$ takové, že mezi každými dvěma z nich vede hrana; tyto podgrafy zjevně splňují podmínky (a) a (b) věty 3. Jelikož G je $2k$-souvislý, každý jeho řez má velikost alespoň $2k$, a proto G splňuje i podmínku (c). Věta 3 tedy implikuje, že G obsahuje $(s-t)$-linkování, jak jsme požadovali. □

Důkaz věty 3. Budeme postupovat indukcí, předpokládáme tedy, že tvrzení platí pro všechny vlastní minory G. Uvažme nejprve případ, že existují podgrafy $A, B \subseteq G$ a $i \in \{1, \dots, 4k\}$ takové, že $G = A \cup B$, $S \subsetneq V(A)$, $H_i \subseteq B - V(A)$ a $|V(A) \cap V(B)| = 2k$. Položme $S' = V(A) \cap V(B)$ a $H'_j = H_j \cap B$ pro $1 \leq j \leq 4k$. Z Mengerovy věty a podmínky (c) plyne, že existují navzájem vrcholově disjunktní cesty $S_1, \dots, S_k, T_1, \dots, T_k \subset G$ s jedním koncem v S a druhým v S', kde s_j je konec S_j a t_j je konec T_j pro $1 \leq j \leq k$. Konec S_j v S' označme s'_j a konec T_j v S' označme t'_j.

Jelikož $S \subset V(A)$ a $H_i \subseteq B - V(A)$, vidíme, že H_i je disjunktní s S a $H'_i = H_i$. Mějme libovolné $j \in \{1, \dots, 4k\}$ různé od i. Jelikož H_i je disjunktní s S, dle podmínky (b) G obsahuje hranu e spojující H_i s H_j. Tato hrana má jeden konec (ten v H_i) obsažen v $B - V(A)$, proto $e \notin E(A)$, a jelikož $G = A \cup B$, máme $e \in E(B)$. Proto druhý konec e patří do $B \cap H_j$, a H'_j je tedy neprázdné. Ukažme, že B s množinou S' a podgrafy H'_1, …, H'_{4k} splňuje podmínky věty 3:

(a) Mějme libovolné $j \in \{1, \dots, 4k\}$, a předpokládejme, že H'_j obsahuje komponentu F disjunktní s S'. Pak F je i komponenta H_j: v jiném případě by H_j obsahovalo hranu e s jedním koncem v $V(F) \subseteq V(B) \setminus$

$S' = V(B) \setminus V(A)$ a druhým koncem v $H_j - V(B)$, a taková hrana e by nemohla patřit ani do A ani do B. Jelikož $V(F) \subseteq V(B) \setminus V(A)$ a $S \subset V(A)$, vidíme, že F neobsahuje žádný vrchol z S. Z podmínky (a) pro G a H_j tedy plyne, že H_j je souvislý, a tedy $H_j = F$. Pak ale i $H'_j = F$ je souvislý.

(b) Mějme libovolné různé $j, m \in \{1, \ldots, 4k\}$. Pokud H'_j i H'_m obsahují vrchol z S', pak je podmínka (b) zjevně splněna. BÚNO tedy předpokládejme, že $H'_j \subseteq B - S' = B - V(A)$. Speciálně dle předchozího bodu víme, že $H'_j = H_j$ a H_j tedy neobsahuje vrchol z S. Díky podmínce (b) pro G, H_j a H_m proto v G existuje hrana e spojující H_j a H_m. Konec e v H_j leží v $B - V(A)$, proto $e \notin E(A)$ a tedy $e \in E(B)$. Hrana e tedy v B spojuje vrchol H'_j s vrcholem z $H_m \cap B = H'_m$.

(c) Nechť $B = A' \cup B'$, $S' \subseteq V(A')$ a existuje $j \in \{1, \ldots, 4k\}$ tž. $H'_j \subseteq B' - V(A')$. Pak $G = (A \cup A') \cup B'$, $S \subseteq V(A \cup A')$ a $H_j = H'_j \subseteq B' - V(A') = B' - (V(A) \cup V(A'))$. Z podmínky (c) pro G tedy máme $|(V(A) \cup V(A')) \cap V(B')| \geq 2k$. Jelikož $(V(A) \cup V(A')) \cap V(B') = V(A') \cap V(B')$, podgrafy A' a B' splňují podmínku (c) pro B.

Jelikož $S \subsetneq A$ a $|V(A) \cap V(B)| = |S|$, vidíme, že existuje vrchol $v \in V(A) \setminus V(B)$, a B je proto vlastní podgraf G. Z indukčního předpokladu tedy B obsahuje $(s' - t')$-linkování $P'_1, \ldots, P'_k$. Položíme-li $P_j = S_j \cup P'_j \cup T_j$ pro $1 \leq j \leq k$, pak $P_1, \ldots, P_k$ je $(s - t)$-linkování v G.

Zbývá tedy případ, kdy

($\star$) každé dva podgrafy $A, B \subseteq G$ takové, že $G = A \cup B$, $S \subsetneq V(A)$ a $H_i \subseteq B - V(A)$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, 4k\}$, splňují $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k + 1$.

Nechť e je hrana G. Jestliže oba konce e leží v S, pak $G - e$ splňuje všechny předpoklady věty 3:

(a) Triviálně plyne z (a) pro G, pokud e není most v H_i. Pokud e je most v H_i, pak obě komponenty vzniklé odebráním e obsahují vrchol z S.

(b) Triviálně plyne z (b) pro G, pokud e není jediná hrana mezi H_i a H_j. Pokud e je hrana mezi H_i a H_j, pak H_i i H_j obsahují vrchol z S.

(c) Triviálně plyne z (c) pro G.

Z indukce $G - e$ obsahuje $(s - t)$-linkování, a tedy i G obsahuje $(s - t)$-linkování. Můžeme proto předpokládat, že e má alespoň jeden konec mimo S.

Jestliže e má oba konce v $V(H_i)$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, 4k\}$, nebo jestliže e má alespoň jeden konec v $V(G) \setminus (V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_{4k}))$, pak uvažme graf G/e vzniklý kontrakcí hrany e, s podgrafy $H'_j = H_j/e$ pro $j = 1, \ldots, 4k$. Vlastnosti (a) a (b) jsou triviálně splněné. Nechť $G/e = A' \cup B'$, kde $S \subsetneq V(A')$ a $H'_m \subseteq B' - V(A')$ pro nějaké $m \in \{1, \ldots, 4k\}$, a jako A a B označme podgrafy G takové, že $G = A \cup B$, $A' = A/e$ a $B' = B/e$. Pak $S \subsetneq V(A)$ a $H_m \subseteq B - V(A)$. Dle ($\star$) máme $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k+1$, a proto $|V(A') \cap V(B')| \geq 2k$. Graf G/e tedy splňuje podmínky věty 3, a z indukce proto obsahuje $(s-t)$-linkování. Dekontrakcí hrany e dostáváme $(s-t)$-linkování v G.

Zbývá proto případ, že S je nezávislá množina a každá hrana G spojuje vrcholy v různých podgrafech H_i a H_j. Speciálně pro každé $i = 1, \ldots, 4k$, $V(H_i)$ je nezávislá množina, a z podmínky (a) plyne, že buď $V(H_i) \subseteq S$, nebo H_i je jen jeden vrchol. Zjevně také můžeme předpokládat, že každý vrchol G patří buď do S nebo do $H_1 \cup \ldots \cup H_{4k}$, jinak ho můžeme smazat. Z podmínky (b) tedy plyne, že $G - S$ je klika.

Pokud existuje párování mezi S a $V(G - S)$, které pokrývá S, pak toto párování spolu s hranami v klice $G - S$ obsahuje $(s-t)$-linkování. Jinak z Hallovy věty existuje $S' \subseteq S$ taková, že všichni sousedi S' leží v množině $Y \subseteq V(G - S)$ a $|Y| < |S'|$. Pak ale položíme $A = G[S \cup Y]$ a $B = G - S'$ a máme $G = A \cup B$, $S \subseteq V(A)$ a $|V(A) \cap V(B)| = |(S \setminus S') \cup Y| < 2k$. Navíc $|V(A)| = |S| + |Y| \leq 4k - 1$, a tedy existuje H_i disjunktní s $V(A)$. Podgrafy A a B jsou však ve sporu s podmínkou (c), a tento případ tedy nemůže nastat. □

3 Linkovanost a topologické minory

Důsledek 4. *Každý $12k(4k+1)$-souvislý graf je k-linkovaný.*

Důkaz. Graf G má minimální stupeň alespoň $12k(4k+1)$, má tedy alespoň $6k(4k+1)|V(G)|$ hran. Dle věty 12 z minulých poznámek tedy G obsahuje K_{4k} jako minor, a věta 2 tedy implikuje dokazované tvrzení. □

Lemma 5. *Nechť $d \geq 1$ je přirozené číslo. Má-li graf G alespoň $2d|V(G)|$ hran, pak G obsahuje $(d+1)$-souvislý podgraf H minimálního stupně alespoň $2d+1$.*

Důkaz. Nechť H je nejmenší podgraf G takový, že $|V(H)| \geq 2d$ a $|E(H)| > 2d(|V(H)| - d)$. Jestliže $|V(H)| = 2d$, pak $|E(H)| > 2d^2 > \binom{|V(H)|}{2}$, což je spor. Proto $|V(H)| \geq 2d+1$. Z minimality H nahlédneme, že odebrání libovolného vrcholu vede k odebrání více než $2d$ hran, a proto H má minimální stupeň alespoň $2d+1$.

Uvažme libovolný řez S v H; pak existují indukované podgrafy $A, B \subsetneq H$ takové, že $S = V(A \cap B)$, $H = A \cup B$ a $V(A) \neq S \neq V(B)$. Sousedi libovolného vrcholu ve $V(A)\backslash V(B)$ patří do A, a proto $|V(A)| > 2d$. Obdobně $|V(B)| > 2d$. Z minimality H plyne, že $|E(A)| \leq 2d(|V(A)| - d)$ a $|E(B)| \leq 2d(|V(B)| - d)$. Z toho dostáváme

$$\begin{aligned} |E(H)| &\leq |E(A)| + |E(B)| \\ &\leq 2d(|V(A)| + |V(B)| - 2d) \\ &= 2d(|V(H)| - d + |V(A) \cap V(B)| - d). \end{aligned}$$

Jelikož $|E(H)| > 2d(|V(H)| - d)$, vyvodíme, že $|S| = |V(A) \cap V(B)| > d$. Jelikož toto platí pro libovolný řez S, graf G je $(d + 1)$-souvislý. □

Důsledek 6. *Nechť $k \geq 1$ a $d = 12\binom{k}{2}\left(4\binom{k}{2} + 1\right) + k = O(k^4)$. Každý graf G s alespoň $2d|V(G)|$ hranami obsahuje podrozdělení K_k.*

Důkaz. Dle lemma 5 G obsahuje d-souvislý podgraf H. Nechť $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ je libovolná podmnožina vrcholů H velikosti k. Graf $H - S$ je $(d - k)$-souvislý a dle Důsledku 4 je $\binom{k}{2}$-linkovaný. Pro $1 \leq i < j \leq k$ si zvolme vrcholy s_{ij} a t_{ij} ve $V(H - S)$ tak, že $v_i s_{ij}, v_j t_{ij} \in E(H)$ a vrcholy $s_{12}, t_{12}, s_{13}, t_{13}, \ldots, s_{k-1,k}, t_{k-1,k}$ jsou navzájem různé (to lze, jelikož H má dostatečně velký minimální stupeň H). Z linkovanosti dostáváme navzájem disjunktní cesty P_{ij} spojující vrcholy s_{ij} a t_{ij} pro $1 \leq i < j \leq k$, a ty spolu s hranami do S tvoří podrozdělení K_k. □

4 Alternativní důkaz

Množina $S \subseteq V(G)$ je *linkovaná*, jestliže pro každé navzájem různé vrcholy $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k \in S$ existuje $(s - t)$-linkování v G.

Lemma 7. *Nechť G je $4k$-souvislý graf mající minor H takový, že každé dva vrcholy H mají alespoň $5k$ společných sousedů. Nechť S' je množina alespoň $4k$ vrcholů G. Pak existuje linkovaná podmnožina S velikosti $2k$.*

Důkaz. Nechť B_1, ..., B_m jsou disjunktní podmnožiny $V(G)$ indukující souvislé podgrafy G tž. H vznikne z G jejich kontrakcí (a smazáním přebytečných hran a vrcholů). Položme $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Zjevně $m > 5k$. Jelikož G je $4k$-souvislý, existuje $4k$ cest se začátky v S' a koncovými vrcholy v navzájem různých množinách z $\mathcal{B}$. Systém cest $\mathcal{P}$ s těmito vlastnostmi nazývejme $(S', \mathcal{B})$-*propojení.* Pro $P \in \mathcal{P}$ označme jako $b(P)$ kolikrát cesta P vstoupí do nějaké množiny z $\mathcal{B}$; přičemž začíná-li P v nějaké množině z $\mathcal{B}$, počítá se to jako jeden vstup. Označme $b(\mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} b(P)$, a zvolme $(S', \mathcal{B})$-propojení $\mathcal{P}$ minimalizující $b(\mathcal{P})$.

Pokud nějaká cesta $P \in \mathcal{P}$ prochází skrz $B \in \mathcal{B}$, pak nějaká jiná cesta musí v B končit, jinak bychom mohli P v B ukončit a snížit $b(\mathcal{P})$. Proto cesty z $\mathcal{P}$ protínají právě $4k$ množin z $\mathcal{B}$. Nechť $\mathcal{J}$ jsou množiny z $\mathcal{B}$, které protne právě jedna cesta (která v nich nutně končí) a $\mathcal{V}$ jsou množiny protnuté více než jednou cestou. Tvrdíme, že

($\star\star$) Pro každé $B \in \mathcal{V}$ existuje cesta $P \in \mathcal{P}$ procházející B, která jako následující po B protne množinu z $\mathcal{J}$ (a skončí v ní).

Předpokládejme pro spor, že ($\star\star$) neplatí. Jelikož H má minimální stupeň alespoň $5k$, existuje $B' \in \mathcal{B} \setminus (\mathcal{J} \cup \mathcal{V})$ propojené hranou e s B. Nějakou cestu $P \in \mathcal{P}$ protínající B lze v rámci B useknout a protáhnout přes e tak, aby výsledná cesta P' končila v B'. Nechť' $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{P'\}$. Z minimality $b(\mathcal{P})$ máme $b(\mathcal{P}') \geq b(\mathcal{P})$. Jestliže P nekončí v B, znamená to, že končí v následující množině $B'' \in \mathcal{B}$, kterou potká. Dle předpokladu neplatnosti ($\star\star$) máme $B'' \in \mathcal{V}$, a tedy existuje cesta P'' protínající B'' různá od P; v $\mathcal{P}'$ ale můžeme P'' ukončit v B'', ve sporu s minimalitou $b(\mathcal{P})$. Jestliže P končí v B, máme $b(\mathcal{P}') = b(\mathcal{P}) + 1$. Jelikož $B \in \mathcal{V}$, existuje nějaká cesta $P_1 \neq P$ protínající B, tu můžeme v $\mathcal{P}'$ ukončit v B a dostáváme tak $(S', \mathcal{B})$-propojení $\mathcal{P}''$ s $b(\mathcal{P}'') \leq b(\mathcal{P}') - 1$. Z minimality $b(\mathcal{P})$ plyne, že P_1 končí v následující množině $B'' \in \mathcal{B}$, kterou po B potká. Pak ale v $\mathcal{P}''$ v množině B'' žádná cesta nekončí a z předpokladu neplatnosti ($\star\star$) množinu B'' protíná nějaká jiná cesta P_2; tu můžeme v B'' ukončit a dostat $(S', \mathcal{B})$-propojení ve sporu s minimalitou $b(\mathcal{P})$.

Podmínka ($\star\star$) tedy platí; každé množině $B \in \mathcal{V}$ tedy můžeme přiřadit množinu $B' \in \mathcal{J}$, pro kterou existuje cesta $P \in \mathcal{P}$ protínající B a následně končící v B'. Toto přiřazení je prosté, proto $|\mathcal{J}| \geq |\mathcal{V}|$, a jelikož $|\mathcal{J}|+|\mathcal{V}| = 4k$, máme $|\mathcal{J}| \geq 2k$. Zvolme $S \subset S'$ velikosti $2k$ tž. cesty $\mathcal{P}$ začínající v S končí v množinách z $\mathcal{J}$. Tvrdíme, že S je linkovaná: nechť $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p \in S$ jsou libovolné navzájem různé vrcholy. Pro $i = 1, \ldots, p$ uvažme množiny $B_i, B'_i \in \mathcal{J}$, v nichž končí cesty $\mathcal{P}$ z s_i a t_i. Jelikož $p \leq k$, $|\mathcal{J} \cup \mathcal{V}| = 4k$, a každé dva vrcholy H mají $5k$ společných sousedů, můžeme vybrat navzájem různé $B''_1, \ldots, B''_i \in \mathcal{B} \setminus (\mathcal{J} \cup \mathcal{V})$ tž. existují hrany z B''_i do B_i i B'_i. Vrcholy s_i a t_i pak můžeme propojit cestou skládající se z cest v $\mathcal{P}$ v nich začínajících a propojených přes B_i, B''_i a B'_i. $\square$

Důsledek 8. *Nechť G je $(16t^2 + 4t)$-souvislý graf mající minor H takový, že každé dva vrcholy H mají alespoň $20t^2 + 4t$ společných sousedů. Pak G obsahuje podrozdělení K_t.*

Důkaz. Nechť Y je libovolná množina $4t$ vrcholů G. Pro každý $y \in Y$ zvolme množinu S_y jeho sousedů velikosti $4t$ tž. $Y \cap S_y = \emptyset$ a $S_y \cap S_{y'} = \emptyset$ pro různé $y, y' \in Y$ (to lze, jelikož Y má minimální stupeň alespoň $16t^2 + 4t$). Nechť $S' = \bigcup_{y \in Y} S_y$ a $k = 4t^2$. Pak $|S'| = 4k$, $G - Y$ je $4k$-souvislý a obsahuje minor vzniklý z H odebráním nejvýše $4t$ vrcholů; v něm každé dva vrcholy mají alespoň $5k$ společných sousedů. Z lemma 7 máme množinu $S \subset S'$ velikosti $2k$, která je linkovaná v $G - Y$. Nechť Y' je množina vrcholů $y \in Y$ tž. $|S_y \cap S| \geq t$. Máme

$$8t^2 = |S| \leq 4t|Y'| + t(4t - |Y'|) = 4t^2 + 3t|Y'|,$$

a proto $|Y'| > t$. Z Y' vyberme libovolných t vrcholů a v $G - Y$ propojme jejich sousedy v S disjunktními cestami tak, abychom dostali podrozdělení K_t; to lze díky linkovanosti S. □

Důsledek 9. *Graf G na n vrcholech s $\Omega(k^4 n)$ hranami obsahuje podrozdělení K_k.*

Důkaz. Z lemma 5 můžeme předpokládat, že G má souvislost a minimální stupeň $\Omega(k^4)$. Dle věty 12 z minulých poznámek G obsahuje minor K_m pro $m = \Omega(k^2)$—v něm každé dva vrcholy mají $\Omega(k^2)$ společných sousedů. Podrozdělení K_k v G tedy existuje dle důsledku 8. □