Hypergrafové removal lemma a Szemérediho věta

Zdeněk Dvořák

7. prosince 2017

1 Hypergrafové removal lemma a jeho důsledek

Definice 1. *Dvojice* (V, E) *je* k-uniformní hypergraf*, je-li* E *množina neuspořádaných* k*-tic prvků z* V*.*

Jako $K_n^{(k)}$ označme *úplný* k*-uniformní hypergraf na* n *vrcholech*, tj. $V\big(K_n^{(k)}\big) = \{1, \ldots, n\}$ a $E\big(K_n^{(k)}\big) = \{e \subseteq \{1, \ldots, n\}, |e| = k\}$.

Věta 1 (Hypergrafové removal lemma)**.** *Pro každé* $k > 0$ *a* $\alpha > 0$ *existují* $\beta > 0$ *a* n_0 *takové, že každý* k*-uniformní hypergraf* G *s* $n \ge n_0$ *vrcholy buď*

- *obsahuje alespoň* βn^{k+1} *podhypergrafů isomorfních* $K_{k+1}^{(k)}$*, nebo*
- *existuje* $X \subseteq E(G)$ *velikosti nevýše* αn^k *tž.* $G - X$ *neobsahuje žádný podhypergraf isomorfní* $K_{k+1}^{(k)}$*.*

Pro $k = 2$ je to Removal lemma pro trojúhelníky (Věta 2) z druhé přednášky.

Lemma 2. *Pro každé* $\delta > 0$ *a* $k > 0$ *existuje* n_1 *tž. platí následující. Jestliže* $n \ge n_1$ *a* $A \subseteq \{1, \ldots, n\}^k$ *má velikost alespoň* δn^k*, pak existuje* $\vec{x} \in A$ *a* $d \ne 0$ *tž.* $\vec{x} + (d, 0, 0, \ldots) \in A$*,* $\vec{x} + (0, d, 0, \ldots) \in A$*, …*

Důkaz. Nechť $\alpha = \frac{\delta}{2(2k)^k}$. Nechť $\beta > 0$ a n_0 jsou odpovídající konstanty z hypergrafového removal lemma. Nechť $n_1 = \lceil \max(n_0, 1/\beta) \rceil$.

Nechť G je k-uniformní hypergraf s vrcholy $\{v_{c,i} : 1 \le c \le k, 1 \le i \le n\} \cup \{v_{k+1,i} : 1 \le i \le kn\}$ a hranami definovanými následovně:

- $v_{1,x_1} v_{2,x_2} \ldots v_{k,x_k}$ je hrana, jestliže $(x_1, \ldots, x_k) \in A$.

- pro $1 \le j \le k$, $v_{1,x_1} \dots v_{j-1,x_{j-1}} v_{j+1,x_{j+1}} \dots v_{k,x_k} v_{k+1,z}$ je hrana, jestliže $(x_1, \dots, x_{j-1}, z - x_1 - \dots - x_{j-1} - x_{j+1} - \dots - x_k, x_{j+1}, \dots, x_k) \in A$.

Položme $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ a $d = z - x_1 - \dots - x_k$. Pak $\{v_{1,x_1}, v_{2,x_2}, \dots, v_{k,x_k}, v_{k+1,z}\}$ indukuje $K_{k+1}^{(k)}$ právě tehdy, když $\vec{x} \in A$, $\vec{x} + (d, 0, 0, \dots) \in A$, $\vec{x} + (0, d, 0, \dots) \in A, \dots$ Takový podhypergraf $K_{k+1}^{(k)}$ nám tedy dává požadované řešení, jestliže $d \neq 0$. Označme jako T množinu podhypergrafů $K_{k+1}^{(k)}$ s $d = 0$; máme $|T| = |A| \le n^k$, tvrzení tedy platí, jestliže G obsahuje více než n^k podhypergrafů $K_{k+1}^{(k)}$.

Nechť G obsahuje nejvýše $n^k < \frac{1}{n}(2kn)^{k+1} = \frac{1}{n}|V(G)|^{k+1} \le \beta |V(G)|^{k+1}$ podhypergrafů $K_{k+1}^{(k)}$. Dle Věty 1 existuje $X \subseteq E(G)$ velikosti nejvýše $\alpha |V(G)|^k = \frac{\delta}{2} n^k$ taková, že $G - X$ neobsahuje žádný podhypergraf $K_{k+1}^{(k)}$. Povšimněme si, že hypergrafy v T jsou navzájem hranově disjunktní, a protože každý z nich musí obsahovat hranu z X, dostáváme $|X| \ge |T|$. To je spor, jelikož $|T| = |A| \ge \delta n^k$. □

2 Aritmetické posloupnosti v hustých podmnožinách čísel

Věta 3 (Szemerédi)**.** *Pro každé $\gamma > 0$ a $k > 0$ existuje n_1 tž. platí následující. Jestliže $n \ge n_1$ a $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ má velikost alespoň γn, pak $b, b+d, \dots, b+kd \in B$ pro nějaká $b, d > 0$.*

Důkaz. Nechť $\delta = \left(\frac{\gamma}{4k^2}\right)^{k-1} \frac{\gamma}{2}$ a zvolme n_1 tak, aby platilo Lemma 2 a $n_1 \ge 4k^2/\gamma$.

Položme $A = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k \in B\}$. Odhadněme velikost A: pro každé $b \in B$ můžeme zvolit $x_2, \dots, x_k \le \frac{b}{k^2}$ libovolně a dopočítat x_1 tak, aby $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = b$; jestliže $b \ge 2k^2$, dostáváme tedy alespoň $\left\lfloor \frac{b}{k^2} \right\rfloor^{k-1} \ge \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} b^{k-1}$ prvků z A. Proto

$$\begin{aligned} |A| &\ge \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} \sum_{b \in B, b \ge 2k^2} b^{k-1} \\ &\ge \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} \sum_{b \in B, b \ge \gamma n/2} b^{k-1} \\ &\ge \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{k-1} n^{k-1} |\{b \in B : b \ge \gamma n/2\}| \\ &\ge \left(\frac{\gamma}{4k^2}\right)^{k-1} \frac{\gamma}{2} n^k = \delta n^k. \end{aligned}$$

Dle Lemma 2 tedy existuje $\vec{x} \in A$ a $d \neq 0$ tž. $\vec{x} + (d, 0, 0, \ldots) \in A$, $\vec{x} + (0, d, 0, \ldots) \in A, \ldots$ Nechť $a = x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k$. Pak $a \in B$, $a + d \in B$, $\ldots$, $a + kd \in B$. $\square$

Věta 4. *Existují libovolně velká přirozená čísla N a množiny $A \subseteq \{0, \ldots, N-1\}$ neobsahující 3-prvkovou aritmetickou posloupnost tž.*

$$|A| \geq \frac{N}{16^{\sqrt{\log_2 N}}}.$$

Důkaz. Nechť n je přirozené číslo. Položme $d = 2^{n-1}$ a $N = (2d)^n$. Povšimněme si, že $\log_2 N = n(1 + \log_2 d) = n^2$.

Pro $0 \leq k \leq n(d-1)^2$, položme $S_k = \{\vec{x} \in \{0, \ldots, d-1\}^n : \|\vec{x}\| = \sqrt{k}\}$. Jelikož S_k je podmnožina sféry, S_k neobsahuje 3-prvkovou aritmetickou posloupnost (tj. pro každé $\vec{x}, \vec{z} \in S_k$ platí $\frac{\vec{x}+\vec{z}}{2} \notin S_k$). Navíc $\{0, \ldots, d-1\}^n \subseteq \bigcup_{k=0}^{n(d-1)^2} S_k$, a proto existuje k tž. $|S_k| \geq \frac{d^n}{n(d-1)^2+1} > d^{n-2}/n$. Zafixujme takové k.

Pro $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, \ldots, 2d-2\}^n$ zadefinujme $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} (2d-1)^{i-1} x_i$. Zjevně $f(\vec{x}) \in \{0, \ldots, N-1\}$. Dále si povšimněme, že f je bijekce a pokud $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \{0, \ldots, d-1\}^n$, pak $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y})$ a $2f(\vec{z}) = f(2\vec{z})$. Proto $f(S_k)$ neobsahuje 3-prvkovou aritmetickou posloupnost a $|f(S_k)| = |S_k| > d^{n-2}/n$. Zvolíme-li $A = f(S_k)$, dostáváme

$$\frac{|A|}{N} > \frac{d^{n-2}/n}{(2d)^n} = \frac{1}{n 2^n d^2} \geq \frac{1}{4^{n+\log_2 d}} > \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{16^{\sqrt{\log_2 N}}}.$$

$\square$

3 Hales-Jewettova věta

Nechť A je nějaká konečná množina. Budeme se zabývat k-ticemi prvků z A obarvenými pomocí c barev, tedy funkcí $f : A^k \to [c]$. Množinu A^k si můžeme představit jako k-rozměrnou krychli. Nyní nadefinujeme *kombinatorickou přímku* v této krychli. Nechť $p = (a_1, \ldots, a_k)$ je k-tice tž. $a_i \in A \cup \{\star\}$ a pro alespoň jedno a_i platí $a_i = \star$. Pro $a \in A$ definujme $p(a)$ jako k-tici získanou z p nahrazením všech $\star$ hodnoutou a. Kombinatorická přímka popsaná p je definována jako $p(A) = \{p(a) : a \in A\}$.

Příklad: nechť $A = \{1, 2, 3\}$ a $k = 2$, A^2 je tedy dvojrozměrná tabulka o rozměrech 3×3. Možné kombinatorické přímky jsou např. $p_1 = (1, \star)$ dávající přímku $p_1(A) = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$, $p_2 = (\star, 2)$ dávající přímku $p_2(A) = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$ a $p_3 = (\star, \star)$ dávající přímku $p_3(A) = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.

Věta 5 (Hales-Jewett)**.** *Pro každé n a c existuje k tž. pro množinu A velikosti n a každé obarvení A^k pomocí c-barev existuje monochromatická kombinatorická přímka.*

Důsledek 6. *Pro každé c a d existuje n tž. v libovolném obarvení čísel $1, \ldots,$ n pomocí c barev existuje monochromatická aritmetická posloupnost délky d.*

Důkaz. Nechť $A = \{1, \ldots, d\}$ a k je konstanta z Hales-Jewettovy věty pro $|A|$ a c. Položme $n = kd$. Každé k-tici $(a_1, \ldots, a_k)$ prvků A přiřaďme barvu čísla $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Nechť p je popis monochromatické kombinatorické přímky, která existuje dle Hales-Jewettovy věty, takže čísla $\sum p(0)$, $\sum p(1)$, $\ldots$, $\sum p(d-1)$ mají všechna stejnou barvu. Tato čísla tvoří aritmetickou posloupnost s krokem rovným počtu $\star$ v p. $\square$

K důkazu Hales-Jewettovy věty budeme potřebovat další definice. Nechť p je k-tice prvků $A \cup \{\star_1, \ldots, \star_d\}$, v níž se každý symbol $\star_1, \ldots, \star_d$ vyskytuje alespoň jednou. Pak $p(a_1, \ldots, a_d)$ je k-tice získaná z p nahrazením všech $\star_i$ hodnotou a_i, a množinu $\{p(a_1, \ldots, a_d) : (a_1, \ldots, a_d) \in A^d\}$ označujeme jako *d-rozměrný podprostor generovaný p*. Nechť x a y jsou různé prvky A. Říkáme, že k-tice $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ a $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ jsou *xy-podobné*, jestliže pro každé i buď $a_i = b_i$ nebo $\{a_i, b_i\} = \{x, y\}$. Říkáme, že jsou *xy-sousední*, jestliže jsou xy-podobné a liší se pouze v jednom prvku. Pro k_1-tici $\vec{c}$ a k_2-tici $\vec{e}$ jako $\vec{c}\vec{e}$ označme jejich zřetězení; $\vec{c}\vec{e}$ je tedy $(k_1 + k_2)$-tice.

Lemma 7. *Pro každé k, n, c existuje K tž. pro množinu A velikosti n a různé prvky $x, y \in A$ platí následující. Nechť $f : A^K \to [c]$ je libovolné obarvení. Pak existuje k-rozměrný podprostor generovaný nějakou K-ticí p takový, že $f(p(\vec{a})) = f(p(\vec{b})$ pro každé xy-sousední $\vec{a}, \vec{b} \in A^k$.*

Důkaz. Nechť $K_0 = 0$ a $K_i = K_{i-1} + c^{n^{k+K_{i-1}}}$ pro $i \geq 1$, a nechť $K = K_k$. Pro $i = k, k-1, \ldots, 1, 0$ nalezneme $(K - K_i)$-tici p_i definující $(k-i)$-rozměrný podprostor, splňující následující podmínku:

($\star$) Pro každou K_i-tici $\vec{c} \in A^{K_i}$ a pro každé xy-sousední $\vec{a}, \vec{b} \in A^{k-i}$ platí $f(\vec{c}p_i(\vec{a})) = f(\vec{c}p_i(\vec{b})$.

Pak $p = p_0$ splňuje podmínku lemmatu.

Jako p_k položíme prázdnou 0-tici. Předpokládejme, že už jsme zkonstruovali p_{i+1} a konstruujeme p_i pro nějaké $i < k$. Pro $j = 0, \ldots, K_{i+1} - K_i$ označme jako $\vec{s}_j$ $(K_{i+1} - K_i)$-tici mající na prvních j pozicích x a na zbylých y. Nechť φ_j je obarvení $A^{K_i+k-i-1}$ definované pro $\vec{c} \in A^{K_i}$ a $\vec{e} \in A^{k-i-1}$ jako $\varphi_j(\vec{c}\vec{e}) = f(\vec{c}\vec{s}_j p_{i+1}(\vec{e}))$. Dostáváme tak $K_{i+1} - K_i + 1$ obarvení $A^{K_i+k-i-1}$ pomocí c barev. Různých obarvení této množiny c barvami je ale pouze

$c^{|A^{K_i+k-i-1}|} \leq c^{n^{k+K_i}} = K_{i+1} - K_i$, dvě z těchto obarvení jsou tedy stejná; tedy $\varphi_{j_1} = \varphi_{j_2}$ pro nějaké $j_1 < j_2$. Nechť q_i je $(K_{i+1} - K_i)$-tice mající na prvních j_1 pozicích x, na dalších $j_2 - j_1$ pozicích $\star_i$, a na zbylých $K_{i+1} - K_i - j_2$ pozicích y. Jako p_i položme zřetězení $q_i p_{i+1}$.

Tvrdíme, že p_i splňuje podmínku $(\star)$: uvažme libovolné xy-sousední $\vec{a}, \vec{b} \in A^{k-i}$. Jestliže se $\vec{a}$ a $\vec{b}$ liší na pozici různé od první, pak $(\star)$ pro p_i plyne ze $(\star)$ pro p_{i+1} (z $\vec{a}$ a $\vec{b}$ odstraníme jejich společný první prvek v a za c zřetězíme $q_i(v)$). Nechť se tedy $\vec{a}$ a $\vec{b}$ liší na první pozici a tedy $\vec{a} = x\vec{e}$ a $\vec{b} = y\vec{e}$ pro nějaké $\vec{e}$. Pak

$$\begin{aligned}
f(\vec{c}p_i(\vec{a})) &= f(\vec{c}p_i(x\vec{e})) = f(\vec{c}q_i(x)p_{i+1}(\vec{e})) \\
&= f(\vec{c}\vec{s}_{j_2}p_{i+1}(\vec{e})) = \varphi_{j_2}(\vec{c}\vec{e}) \\
&= \varphi_{j_1}(\vec{c}\vec{e}) = f(\vec{c}\vec{s}_{j_1}p_{i+1}(\vec{e})) \\
&= f(\vec{c}q_i(y)p_{i+1}(\vec{e})) = f(\vec{c}p_i(y\vec{e})) = f(\vec{c}p_i(\vec{b})).
\end{aligned}$$

□

Důkaz Hales-Jewettovy věty. Postupujeme indukcí dle $n = |A|$. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální, nechť tedy $n \geq 2$. Nechť k je konstanta Hales-Jewettovy věty pro $n-1$ a c a nechť K je odpovídající konstanta z Lemma 7. Ukážeme, že Hales-Jewettova věta platí pro libovolné obarvení $f : A^K \to [c]$.

Nechť p je K-tice generující k-rozměrný podprostor A^K takový, že $f(p(\vec{a})) = f(p(\vec{b})$ pro každé xy-sousední $a, b \in A^k$. Z toho plyne, že $f(p(\vec{a})) = f(p(\vec{b})$ pro každé xy-podobné $a, b \in A^k$. Nadefinujme obarvení g množiny $(A \setminus \{x\})^k$ předpisem $g(\vec{a}) = f(p(\vec{a}))$. Z indukčního předpokladu existuje v tomto obarvení monochromatická přímka $q = (q_1, \ldots, q_k)$. Položme $p_1 = p(q_1, \ldots, q_k)$. Tvrdíme, že toto je monochromatická přímka v původním obarvení A^K. Pro $a \in A \setminus \{x, y\}$ máme $f(p_1(a)) = f(p(q(a))) = g(q(a)) = g(q(y)) = f(p(q(y)) = f(p_1(y))$. Navíc, $p_1(x)$ a $p_1(y)$ jsou xy-podobné, a proto $f(p_1(x)) = f(p_1(y))$. □