Regularity lemma a jeho aplikace

Zdeněk Dvořák

26. října 2015

Definice 1. *Rozklad V_0, V_1, ..., V_m vrcholů grafu G na disjunktní množiny je ε-*regulární *jestliže*

- $|V_0| \leq \varepsilon |V(G)|$,
- $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_m|$, *a*
- *existuje nejvýše εm^2 dvojic (V_i, V_j) s $1 \leq i < j \leq m$, které* ***nejsou*** *ε-regulární.*

Řád *ε-regulárního rozdělení je roven m.*

Věta 1 (Szemerédiho Regularity lemma)**.** *Pro každé $m_0 > 0$ a $\varepsilon > 0$ existuje $M \geq m_0$ tak, že platí následující. Každý graf G s alespoň m_0 vrcholy má ε-regulární rozklad řádu alespoň m_0 a nanejvýš M.*

1 Aplikace Regularity lemmatu

Věta 2 (Removal lemma pro trojúhelníky)**.** *Pro každé $0 < \alpha \leq 1$ existují $\beta > 0$ a n_0 takové, že každý graf G s $n \geq n_0$ vrcholy buď*

- *obsahuje alespoň βn^3 trojúhelníků, nebo*
- *existuje $X \subseteq E(G)$ velikosti nevýše αn^2 tž. $G - X$ neobsahuje žádný trojúhelník.*

Důkaz. Zvolme ε tak, že $\sqrt[3]{14\varepsilon} + 3\varepsilon = \alpha$, a položme $m_0 = \lceil 1/\varepsilon \rceil$. Nechť M je horní mez na počet částí z Regularity lemmatu pro tyto hodnoty, $n_0 = m_0$ a $\beta = \varepsilon \left(\frac{1-\varepsilon}{M}\right)^3$.

Dle Regularity lemmatu existuje ε-regulární rozklad V_0, V_1, ..., V_m grafu G pro nějaké $m_0 \leq m \leq M$. Označme $k := |V_1| = \ldots = |V_m|$ a povšimněme si, že $(1-\varepsilon)n/m \leq k \leq n/m$.

- Nechť X_1 je množina hran grafu G, které mají alespoň jeden konec ve V_0. Platí $|X_1| \le |V_0|n \le \varepsilon n^2$.

- Nechť $X_2 = E(G[V_1]) \cup E(G[V_2]) \cup \ldots \cup E(G[V_m])$. Platí $|X_2| \le mk^2 \le m(n/m)^2 = n^2/m \le n^2/m_0 \le \varepsilon n^2$.

- Nechť X_3 obsahuje všechny hrany mezi částmi V_i a V_j tž. $1 \le i < j \le m$ a $d(V_i, V_j) \le \sqrt[3]{14\varepsilon}$. Máme $|X_3| \le m^2(\sqrt[3]{14\varepsilon}k^2) \le \sqrt[3]{14\varepsilon}m^2(n/m)^2 = \sqrt[3]{14\varepsilon}n^2$.

- Nechť X_4 obsahuje všechny hrany mezi částmi V_i a V_j tž. $1 \le i < j \le m$ a (V_i, V_j) není ε-regulární. Jelikož uvažujeme ε-regulární rozdělení, takových párů je nejvýše εm^2, a proto $|X_4| \le (\varepsilon m^2)k^2 \le \varepsilon m^2(n/m)^2 = \varepsilon n^2$.

Položme $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$. Jelikož $|X| \le (\sqrt[3]{14\varepsilon} + 3\varepsilon)n^2 = \alpha n^2$, jestliže $G - X$ neobsahuje žádný trojúhelník, pak Removal lemma platí pro G.

Uvažme případ, že $G - X$ obsahuje trojúhelník $v_1 v_2 v_3$, kde $v_j \in V_{i_j}$ pro $j \in \{1, 2, 3\}$. Jelikož $X_1 \subseteq X$, máme $i_1, i_2, i_3 \ne 0$, a jelikož $X_2 \subseteq X$, indexy i_1, i_2 a i_3 jsou navzájem různé. Jelikož $X_3 \cup X_4 \subseteq X$, páry (V_{i_1}, V_{i_2}), (V_{i_2}, V_{i_3}) a (V_{i_1}, V_{i_3}) jsou ε-regulární a mají hustotu alespoň $\sqrt[3]{14\varepsilon}$. Dle Lemma 8 z minulé přednášky graf G obsahuje alespoň $(d(V_{i_1}, V_{i_2})d(V_{i_2}, V_{i_3})d(V_{i_1}, V_{i_3}) - 13\varepsilon)k^3 \ge \varepsilon k^3 \ge \varepsilon \left(\frac{1-\varepsilon}{M}\right)^3 n^3 = \beta n^3$ trojúhelníků. Opět tedy Removal lemma platí pro G. □

Lemma 3. *Pro každé přirozená čísla c a Δ a reálné číslo $d > 0$ existují $\alpha > 0$ a $\varepsilon > 0$ tak, že platí následující. Nechť H je graf maximálního stupně nejvýše Δ a barevnosti nejvýše c. Nechť $A_1, \ldots, A_c$ jsou navzájem disjunktní podmnožiny vrcholů nějakého grafu G takové, že $n := |A_1| = \ldots = |A_c|$ a (A_i, A_j) je ε-regulární pár s $d(A_i, A_j) \ge d$ pro každé $i \ne j$. Jestliže $|H| \le \alpha n$, pak $H \subseteq G$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, že $(d - \varepsilon)^\Delta > \Delta\varepsilon$, a položme $\alpha = (d - \varepsilon)^\Delta - \Delta\varepsilon$.

Nechť $\varphi : V(H) \to [c]$ je obarvení grafu H. Nechť $v_1, \ldots, v_m$ jsou vrcholy H. Postupně budeme volit navzájem různé vrcholy $x_1, \ldots, x_m \in V(G)$ tak, že pro každé $k \le m$ platí

(A) $x_k \in A_{\varphi(v_k)}$ a

(B) pro $i < j \le k$, jestliže $v_i v_j \in E(H)$, pak $x_i x_j \in E(G)$.

Podaří-li se nám to, dostaneme H jako podgraf G.

Pro $i > k$ si jako $S(i, k)$ označme množinu $\{x_j : j \le k, v_i v_j \in E(H)\}$, $s(i, k) := |S(i, k)|$ a jako $C(i, k)$ si označme množinu všech vrcholů v $A_{\varphi(v_i)}$

takových, že sousedí se všemi vrcholy v $S(i,k)$. Vrcholy $x_1, x_2, \ldots$ dále budeme volit tak, aby pro každé $i > k$ platilo

(C) $|C(i,k)| \geq (d-\varepsilon)^{s(i,k)} n$.

Tyto nerovnosti triviálně platí pro $k = 0$. Řekněme, že už jsme určili x_1, $\ldots$, x_{k-1}. Aby platilo (A) a (B), stačí zvolit $x_k \in C(k, k-1)$. Musíme ale zajistit, aby platilo i (C). Uvažme libovolné $i > k$. Jestliže v_i nesousedí s v_k, pak $S(i,k) = S(i,k-1)$ a $C(i,k) = C(i,k-1)$ nezávisle na volbě x_k, a proto (C) platí pro i. Jestliže v_i sousedí s v_k, pak dle Lemma 6 z minulé přednášky existuje nejvýše εn vrcholů z v $A_{\varphi(v_k)}$ takových, že z má méně než $(d-\varepsilon)|C(i,k-1)|$ sousedů v $C(i,k-1)$. Vyhneme-li se při volbě x_k těmto vrcholům, zajistíme, že $|C(i,k)| \geq (d-\varepsilon)C(i,k-1) \geq (d-\varepsilon)^{s(i,k)} n$, a bude tedy platit podmínka (C).

Jelikož v_k má stupeň nejvýše Δ, musíme se při volbě x_k vyhnout nejvýše $\Delta\varepsilon n$ vrcholům dle předchozího odstavce. Dále se musíme vyhnout již zafixovaným vrcholům x_1, $\ldots$, x_{k-1}, kterých je méně než αn. I tak je ale možné zvolit $x_k \in C(k,k-1)$, jelikož $|C(k,k-1)| \geq (d-\varepsilon)^{s(k,k-1)} n \geq (d-\varepsilon)^{\Delta} n = \alpha n + \Delta\varepsilon n$. □

Věta 4 (Erdös-Stone). *Nechť H je graf barevnosti $c \geq 2$. Pro každé $\beta > 0$ existuje n_0 takové, že každý graf G s $n \geq n_0$ vrcholy a alespoň $\left(1 - \frac{1}{c-1} + \beta\right) \frac{n^2}{2}$ hranami obsahuje H jako podgraf.*

Důkaz. Nechť $\Delta = \Delta(H)$ a $d = \beta/4$. Nechť ε_1 a α jsou konstanty takové, že platí Lemma 3 (kde ε_1 hraje roli ε). Položme $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \beta/12)$ a $m_0 = \lceil 1/\varepsilon \rceil$. Nechť M je horní mez na počet částí z Regularity lemmatu pro tyto hodnoty, a nechť $n_0 = \max\left(m_0, \frac{M|V(H)|}{(1-\varepsilon)\alpha}\right)$.

Dle Regularity lemmatu existuje ε-regulární rozklad $V_0, V_1, \ldots, V_m$ grafu G pro nějaké $m_0 \leq m \leq M$. Označme $k := |V_1| = \ldots = |V_m|$ a povšimněme si, že $(1-\varepsilon)n/m \leq k \leq n/m$.

- Nechť X_1 je množina hran grafu G, které mají alespoň jeden konec ve V_0. Platí $|X_1| \leq |V_0| n \leq \varepsilon n^2$.

- Nechť $X_2 = E(G[V_1]) \cup E(G[V_2]) \cup \ldots \cup E(G[V_m])$. Platí $|X_2| \leq mk^2 \leq m(n/m)^2 = n^2/m \leq n^2/m_0 \leq \varepsilon n^2$.

- Nechť X_3 obsahuje všechny hrany mezi částmi V_i a V_j tž. $1 \leq i < j \leq m$ a $d(V_i, V_j) \leq d$. Máme $|X_3| \leq dm^2 \leq dm^2(n/m)^2 = dn^2$.

- Nechť X_4 obsahuje všechny hrany mezi částmi V_i a V_j tž. $1 \leq i < j \leq m$ a (V_i, V_j) není ε-regulární. Jelikož uvažujeme ε-regulární rozdělení, takových párů je nejvýše εm^2, a proto $|X_4| \leq (\varepsilon m^2)k^2 \leq \varepsilon m^2(n/m)^2 = \varepsilon n^2$.

Položme $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$. Jelikož $|X| \leq (d+3\varepsilon)n^2 < \beta\frac{n^2}{2}$, graf $G-X$ má více než $\left(1 - \frac{1}{c-1}\right)\frac{n^2}{2}$ hran. Zkonstruujme pomocný graf G' s množinou vrcholů $[m]$ a $ij \in E(G')$ právě když (V_i, V_j) má nenulovou hustotu hran v $G - X$. Máme

$$|E(G-X)| \leq k^2|E(G')| \leq \frac{n^2}{m^2}|E(G')|,$$

a proto G' má více než $\left(1 - \frac{1}{c-1}\right)\frac{m^2}{2}$. Dle Turánovy věty G' obsahuje kliku velikosti c; ze symetrie můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že vrcholy této kliky jsou $1, \ldots, c$. Páry (V_i, V_j) pro $1 \leq i < j \leq c$ jsou tedy ε-regulární a mají hustotu alespoň d, a jelikož $k \geq (1-\varepsilon)n/m \geq (1-\varepsilon)n_0/M \geq |V(H)|/\alpha$, z Lemma 3 plyne, že $H \subseteq G$. $\square$