Úvod do vybíravosti grafů, Nullstellensatz, polynomiální metoda

Zdeněk Dvořák

12. prosince 2017

1 Vybíravost

Přiřazení seznamů grafu G je funkce L, která každému vrcholu G přiřadí množinu barev. *L-obarvení* je dobré obarvení φ grafu G tž. $\varphi(v) \in L(v)$ pro každý vrchol $v \in V(G)$. *Vybíravost* $\chi_l(G)$ je nejmenší přirozené číslo k takové, že G je L-obarvitelný pro každé přiřazení L seznamů velikosti alespoň k.

Pozorování 1.

$$\begin{aligned} \chi_l(G) &\geq \chi(G) \\ \chi_l(G) &\leq d+1 \text{ \textit{je-li} } G \text{ \textit{d-degenerovaný}} \\ \chi_l(C_n) &= \chi(C_n) \end{aligned}$$

Lemma 2.

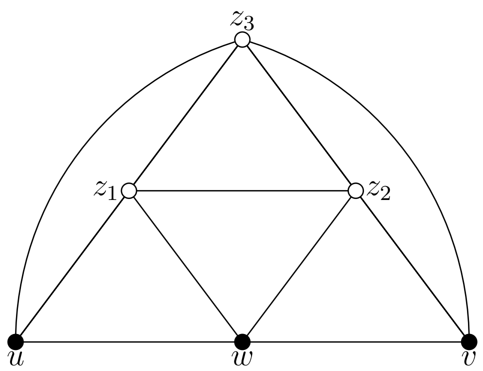
$$\chi_l(K_{n,n^n}) > n.$$

Důkaz. Nechť vrcholy jsou $v_1, \ldots, v_n$ a $w_{i_1,\ldots,i_n}$ pro $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$. Vrcholu v_k přiřadíme seznam $L(v_k) = \{c_{k,1}, \ldots, c_{k,n}\}$. Vrcholům $w_\star$ přiřadíme všechny n-prvkové seznamy, které protínají seznam každého z vrcholů $v_1, \ldots,$ v_n v právě jednom prvku; tedy $L(w_{i_1,\ldots,i_n}) = \{c_{1,i_1}, c_{2,i_2}, \ldots, c_{n,i_n}\}$. Obarvíme-li vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ barvami $c_{1,i_1}, \ldots, c_{n,i_n}$, pak nelze obarvit $w_{i_1,\ldots,i_n}$ z jeho seznamu. □

2 Vybíravost rovinných grafů

Lemma 3. *Existují rovinné grafy vybíravosti alespoň* 5.

Důkaz. Nechť G_{uwv} je následující graf:



Nechť $L_{1,p,a}$ je přiřazení seznamů tž. $L_{1,p,a}(z_1) = \{1, p, 5, 6\}$, $L_{1,p,a}(z_2) = \{a, p, 5, 6\}$ a $L_{1,p,a}(z_3) = \{1, a, 5, 6\}$. Pak předbarvení (u, w, v) barvami $(1, p, a)$ nelze rozšířit na $L_{1,p,a}$-obarvení grafu G_{uwv}.

Nechť G_{uv} je graf vzniklý ze dvou kopií G_{uwv} sdílejících cestu uwv. Nechť $L_{1,a}$ je přiřazení seznamů odpovídající $L_{1,p,a}$ v jedné z kopií a $L_{1,q,a}$ ve druhé a $L_{1,a}(w) = \{1, a, p, q\}$. Pak předbarvení (u, v) barvami $\{1, a\}$ nelze rozšířit na $L_{1,a}$-obarvení grafu G_{uv}.

Nechť G vznikne z 16 kopií G_{uv} sdílejících vrcholy u a v. Nechť $L(u) = \{1, 2, 3, 4\}$, $L(v) = \{a, b, c, d\}$, a L odpovídá $L(i, l)$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a $l \in \{a, b, c, d\}$ na 16 kopiích G_{uv}. Pak G není L-obarvitelný. □

Věta 4 (Thomassen)**.** *Každý rovinný graf je* 5*-vybíravý. Platí i následující silnější tvrzení: nechť G je rovinný graf, P je cesta s nejvýše dvěma vrcholy obsažená v hranici vnější stěny G, a L je přiřazení seznamů velikosti* 5 *vrcholům G nesousedícím s vnější stěnou, seznamů velikosti* 3 *vrcholům G nepatřícím do P a sousedícím s vnější stěnou, a jednoprvkových navzájem různých seznamů vrcholům P. Pak G je L-obarvitelný.*

Důkaz. Indukcí dle $|V(G)|$. Bez újmy na obecnosti G je souvislý. Je také 2-souvislý, jinak uvažme $G = G_1 \cup G_2$, kde G_1 a G_2 se protínají v jednom vrcholu v a $P \subseteq G_1$. Z indukčního předpokladu lze L-obarvit G_1, změnit seznam v na jednoprvkový daný obarvením G_1 a rozšířit obarvení na G_2. Nechť K je kružnice ohraničující vnější stěnu G. Lze předpokládat, že K je indukovaná: jinak by měla chordu uv a $G = G_1 \cup G_2$ pro vlastní podgrafy G_1 a G_2 protínající se v hraně uv, tž. $P \subseteq G_1$. Z indukčního předpokladu lze L-obarvit G_1, změnit seznamy u a v na jednoprvkové dané obarvením G_1 a rozšířit obarvení na G_2. Lze také předpokládat $|V(P)| = 2$, jinak můžeme smazat barvy ze seznamu některého vrcholu K.

Nechť $V(P) = \{p, q\}$ a v je soused p v K různý od q. Nechť $\{a, b\} \subseteq L(v) \setminus L(p)$ jsou dvě libovolné barvy. Nechť L' je přiřazení seznamů tž. $L'(x) = L(x) \setminus \{a, b\}$ pro sousedy x vrcholu $v$neležící na K, a $L'(x) = L(x)$ pro ostatní vrcholy x. Pak $G - v$ je L'-obarvitelný z indukčního předpokladu a vrcholu v lze dát barvu a nebo b jinou než barva jeho souseda v K různého od p (jelikož K je indukovaný cyklus, v má právě dva sousedy v K). $\square$

3 Chevalley-Warningova věta a regulární podgrafy

Lemma 5. *Pro libovolné prvočíslo p a $j = 0, \dots, p-2$ platí*

$$\sum_{x \in Z_p} x^j = 0.$$

Důkaz. Rovnice $x^j = 1$ má nejvýše $j \leq p-2$ řešení v Z_p, a proto existuje prvek $g \neq 0$ takový, že $g^j \neq 1$. Jelikož funkce $x \mapsto gx$ je bijekcí na Z_p, platí $gZ_p = Z_p$, a proto

$$\sum_{x \in Z_p} x^j = \sum_{x \in Z_p} (gx)^j = g^j \sum_{x \in Z_p} x^j.$$

Jelikož $g^j \neq 1$, dostáváme

$$\sum_{x \in Z_p} x^j = 0.$$

$\square$

Věta 6. *Nechť p je prvočíslo a $f_1, \dots, f_r$ jsou polynomy nad Z_p v n proměnných, celkových stupňů $d_1, \dots, d_r$, a nechť platí $\sum_{i=1}^r d_i < n$. Pak počet řešení systému $f_1(\vec{x}) = 0, \dots, f_r(\vec{x}) = 0$ je dělitelný p.*

Důkaz. Z malé Fermatovy věty máme $x^{p-1} = 1$ pro každé $x \in Z_p \setminus \{0\}$. Uvažujme polynom $f(\vec{x}) = \prod_{i=1}^r (1 - f_i^{p-1}(\vec{x}))$. Pak $f(\vec{x}) = 1$ jestliže $\vec{x}$ je řešení uvažovaného systému, a jinak $f(\vec{x}) = 0$. Chceme tedy ukázat, že $\sum_{\vec{x} \in Z_p^n} f(\vec{x}) = 0$.

Celkový stupeň polynomu f je nejvýše $(p-1)\sum_{i=1}^r d_i < (p-1)n$. Jelikož f je polynom v n proměnných, v každém jeho členu se tedy vyskytuje proměnná, jejíž stupeň je nejvýše $p-2$. Existují tedy polynomy $g_{i,j}$ pro $i = 1, \dots, n$ a $0 \leq j \leq p-2$ tž. v $g_{i,j}$ se nevyskytuje proměnná x_i a

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{p-2} g_{i,j} x_i^j.$$

Povšimněme si, že

$$\sum_{\vec{x} \in Z_p^n} g_{i,j} x_i^j = \left(\sum_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in Z_p^{n-1}} q_{i,j} \right) \sum_{x_i \in Z_p} x_i^j = 0$$

Pak

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{x} \in Z_p^n} f(\vec{x}) &= \sum_{\vec{x} \in Z_p^r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{p-2} g_{i,j} x_i^j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{p-2} \sum_{\vec{x} \in Z_p^r} g_{i,j} x_i^j = 0. \end{aligned}$$

□

Věta 7. *Nechť G je multigraf v němž všechny vrcholy mají stupeň 4 nebo 5. Jestliže G není 4-regulární, pak má 3-regulární podmultigraf.*

Důkaz. Nechť $r = |V(G)|$. Pro $v \in V(G)$ si zadefinujme polynom

$$f_v = \sum_{e \text{ incidentní s } v} x_e^2.$$

nad Z_3. Počet proměnných je $|E(G)| > 2r = \sum_{v \in V(G)} \deg(f_v)$, dle Věty 6 je tedy počet řešení systému $f_v(\vec{x}) = 0$ pro $v \in V(G)$ dělitelný 3. Systém má triviální nulové řešení, má tedy i (alespoň dvě) nenulová řešení. Položme $X = \{e \in E(G) : x_e \neq 0\}$ pro nějaké takové řešení. Jelikož $x^2 = 1$ pro $x \in Z_3 \setminus \{0\}$ a G má maximální stupeň nejvýše 5, $f_v(\vec{x}) = 0$ je ekvivalentní tomu, že v má stupeň 0 nebo 3 v podgrafu $(V(G), X)$. □

Podmínka že G není 4-regulární je nutná, například trojúhelník se zdvojenými hranami nemá žádný 3-regulární podgraf.

4 Nullstellensatz

Použijeme následující základní tvrzení z algebry (lze dokázat indukcí dle počtu proměnných).

Lemma 8. *Nechť $p(x_1, \dots, x_n)$ je polynom v n proměnných, v němž každý výskyt proměnné x_i má stupeň nejvýše d_i pro $i \in \{1, \dots, n\}$, a nechť S_i je množina komplexních čísel velikosti alespoň $d_i + 1$. Jestliže $p \neq 0$, pak existují hodnoty $s_1 \in S_1$, …, $s_n \in S_n$ tž. $p(s_1, \dots, s_n) \neq 0$.*

Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace. Grafový polynom $P_{\vec{G}}$ je definován jako

$$P_{\vec{G}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(v_i, v_j) \in E(\vec{G})} (x_j - x_i).$$

Povšimněme si, že $P_{\vec{G}}(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ právě když funkce přiřazující vrcholům G barvy c_1, …, c_n je dobré obarvení G.

Věta 9. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace. Nechť d_1, …, d_n jsou přirozená čísla a L je přiřazení seznamů G tž. $|L(v_i)| > d_i$ pro $1 \leq i \leq n$. Jestliže se člen $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ se v polynomu $P_{\vec{G}}$ vyskytuje s nenulovým koeficientem, pak G je L-obarvitelný.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $|L(v_i)| = d_i + 1$ a prvky $L(v_i)$ jsou komplexní čísla. Zadefinujme $p_i(x) = \prod_{c \in L(v_i)}(x - c)$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak $p_i(c) = 0$ pro všechna $c \in L(v_i)$. Nechť $q_i = x^{d_i+1} - p_i$; pak q_i je polynom stupně nejvýše d_i a $q_i(c) = c^{d_i+1}$ pro všechna $c \in L(v_i)$. Nechť P je polynom vzniklý z $P_{\vec{G}}$ opakovanou substitucí q_i za x^{d_i+1} pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak $P(c_1, \dots, c_n) = P_{\vec{G}}(c_1, \dots, c_n)$ pro libovolná $c_1 \in L(v_1)$, …, $c_n \in L(v_n)$ a stupeň proměnné x_i v P je nejvýše d_i. Navíc koeficient $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ je stejný v P jako v $P_{\vec{G}}$, jelikož všechny členy $P_{\vec{G}}$ mají stejný celkový stupeň (rovný $|E(G)|$) a substituce vytváří pouze členy menšího stupně. Proto $P \neq 0$ a $P_{\vec{G}}(c_1, \dots, c_n) = P(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ pro nějaké $c_1 \in L(v_1)$, …, $c_n \in L(v_n)$ z Lemmatu 8. Pak obarvení vrcholů G barvami c_1, …, c_n je dobré L-obarvení. □

Nechť $\vec{G}$ je pevná orientace grafu G, a nechť $\vec{G}'$ je orientace G, která se od $\vec{G}$ liší na právě p hranách. Pak definujme $\operatorname{sgn}(\vec{G}') = (-1)^p$.

Pozorování 10. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná pevná orientace. Nechť $\mathcal{O}_{d_1, \dots, d_n}$ je množina všech orientací grafu G v nichž v_i má vstupní stupeň d_i pro $i = 1, \dots, n$. Koeficient členu $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je až na znaménko roven*

$$\sum_{\vec{G}' \in \mathcal{O}_{d_1, \dots, d_n}} \operatorname{sgn}(\vec{G}').$$

Každé dvě orientace se stejnými vstupními stupni se liší obrácením hran v nějakém Eulerovském podgrafu. Dostáváme tedy následující.

Důsledek 11. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace tž. v_i má vstupní stupeň d_i pro každé i. Nechť $\mathcal{E}$ je* *množina všech podmnožin $E(\vec{G})$ tvořících Eulerovský podgraf. Pak koeficient členu $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je až na znaménko roven*

$$\sum_{X \in \mathcal{E}} (-1)^{|X|}.$$

Je-li G bipartitní, pak každý Eulerovský podgraf jeho orientace má sudý počet hran (a nějaký takový existuje – prázdný), proto dostáváme následující.

Důsledek 12. *Nechť G je neorientovaný bipartitní graf s vrcholy $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace tž. v_i má vstupní stupeň d_i pro každé i. Pak koeficient členu $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je nenulový, a tedy G lze L-obarvit pro libovolné přiřazení seznamů L tž. $|L(v_i)| > d_i$ pro každé i.*

Speciálně rovinné bipartitní grafy mají orientaci s vstupním stupněm nejvýše 2, a jsou tedy 3-vybíravé.