Kostry v grafech

Zdeněk Dvořák

14. prosince 2023

1 Kostry s omezeným maximálním stupněm

Nechť $c(G)$ označuje počet komponent grafu G. Nechť *k-kostra* je kostra maximálního stupně nejvýše k.

Pozorování 1. *Má-li graf G k-kostru, pak pro každou $S \subseteq V(G)$ platí*

$$c(G - S) \leq (k - 1)|S| + 1.$$

Nechť T a Q jsou kostry grafu H a $B \subseteq V(H)$. Říkáme, že T a Q jsou *B-podobné*, jestliže se shodují na hranách incidentních s B a jestliže $T - B$ a $Q - B$ mají stejné komponenty. Jestliže T je k-kostra, říkáme že vrchol $v \in V(H) \setminus B$ je *B-vynucený* jestliže v má stupeň k v každé k-kostře, která je B-podobná T.

Věta 2. *Jestliže $k \geq 2$ je celé číslo a každá podmnožina S vrcholů souvislého grafu G splňuje*

$$c(G - S) \leq (k - 2)|S| + 2,$$

pak G má k-kostru.

Důkaz. Nechť H je maximální indukovaný podgraf G, který má k-kostru T. Pro spor předpokládejme, že $H \neq G$. Zkonstruujme množinu $B \subseteq V(H)$ následujícím algoritmem: Položme $B := \emptyset$, a dokud existuje B-vynucený vrchol x, dávejme $B := B \cup \{x\}$.

Tvrdíme, že $H - B$ a $T - B$ mají stejné komponenty. Jinak by existovala hrana $uv \in E(H)$ mající konce v různých komponentách $T - B$. Jelikož T je souvislý, během konstrukce B nastal okamžik, že pro aktuální množinu B' jsou u a v ve stejné komponentě $T - B'$, ale přidáváme B'-vynucený vrchol x tž. u a v jsou v různých komponentách $T - (B' \cup \{x\})$. Jelikož $u, v \notin B$, vrcholy u a v nejsou B-vynucené, existují tedy k-kostry T_u a T_v B-podobné T tž. u má stupeň nejvýše $k-1$ v T_u a v má stupeň nejvýše $k-1$ v T_v. Nechť

T_{uv} je strom získaný z T tak, že komponentu $T - B$ obsahující u nahradíme odpovídající komponentou $T_u - B$ a komponentu obsahující v nahradíme odpovídající komponentou $T_v - B$. Pak T_{uv} je k-kostra B-podobná T tž. jak u tak v mají stupeň nejvýše $k - 1$. Zjevně T_{uv} je také $(B' \cup \{x\})$-podobná T. Nechť e je hrana na cestě v T_{uv} mezi u a v, která je incidentní s x. Pak $T_{uv} - e + uv$ je k-kostra B'-podobná T v níž x má stupeň nejvýše $k - 1$. To je spor, jelikož algoritmus přidává x do B', a tedy x má být B'-vynucený.

Dále si povšimněme, že každý vrchol $x \in V(H)$, který má souseda $y \in V(G) \setminus V(H)$, je $\emptyset$-vynucený (a tedy B'-vynucený pro každé $B' \subseteq V(H)$), jelikož jinak bychom mohli uvážit k-kostru T_x, v níž x má stupeň nanejvýš $k-1$, a $T_x + xy$ by byla k-kostra $G[V(H) \cup \{x\}]$, ve sporu s maximalitou H. Proto $c(G-B) > c(H-B) = c(T-B)$. Všechny vrcholy B mají stupeň k v T, jelikož jsou B'-vynucené pro nějaké $B' \subseteq B$; při jejich postupném odebírání v pořadí dle prohledávání do hloubky z nějakého vrcholu za každý z nich dostáváme alespoň $k - 2$ nových komponent. Po odebrání prvního vrcholu máme k komponent, a tedy $c(T - B) \geq (k - 2)|B| + 2$. Proto $c(G - B) > (k - 2)|B| + 2$, což je spor s předpoklady věty. □

2 Hranově disjunktní kostry

Nechť G je graf a $F_1, \ldots, F_k$ jsou hranově disjunktní lesy v G s $V(F_1) = \ldots = V(F_k) = V(G)$. Pak k-tice $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ je *k-hvozd*. Definujme $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ a $|\mathcal{F}| = |E(\bigcup \mathcal{F})|$. Pro podgraf $H \subseteq G$ říkáme, že k-hvozd $\mathcal{F}' = (F'_1, \ldots, F'_k)$ je *H-podobný* $\mathcal{F}$, jestliže pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ se F_i a F'_i liší jen na H a $F_i \cap H$ a $F'_i \cap H$ mají stejné komponenty. Hrana $e \in E(H)$ je *$(\mathcal{F}, H)$-volná*, jestliže existuje k-hvozd $\mathcal{F}'$ H-podobný $\mathcal{F}$ tž. $e \notin E(\bigcup \mathcal{F}')$. Nechť e_0 je hrana G nepatřící do $\bigcup \mathcal{F}$. Pak *$\mathcal{F}$-uzávěr* hrany e_0 je maximální souvislý podgraf $H \subseteq G$ takový, že $e_0 \in E(H)$ a každá hrana H je $(\mathcal{F}, H)$-volná.

Lemma 3. *Nechť G je graf a $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ je k-hvozd v G tž. $|\mathcal{F}|$ je největší možné. Nechť e_0 je hrana G nepatřící do $\bigcup \mathcal{F}$ a H je $\mathcal{F}$-uzávěr e_0. Pak pro $i = 1, \ldots, k$ je podgraf $H \cap F_i$ souvislý.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že BÚNO $H \cap F_1$ není souvislý. Jelikož H je souvislý, existuje hrana $uv \in E(H)$ s konci v různých komponentách $H \cap F_1$. Jelikož $uv \in E(H)$, hrana uv je $(\mathcal{F}, H)$-volná, a existuje tedy k-hvozd $\mathcal{F}' = (F'_1, \ldots, F'_k)$ H-podobný $\mathcal{F}$ tž. $uv \notin E(\bigcup \mathcal{F}')$. Kdyby u a v byly v různých komponentách F'_1, pak $(F'_1 + uv, F'_2, \ldots, F'_k)$ je k-hvozd ve sporu s maximalitou $|\mathcal{F}|$. Tedy v F'_1 existuje cesta P mezi u a v. Jelikož u a v leží v různých komponentách $F_1 \cap H$ a tedy i v různých komponentách

$F_1' \cap H$, $H \cup P$ je vlastní souvislý nadgraf H. Navíc všechny hrany $H \cup P$ jsou $(\mathcal{F}, H \cup P)$-volné: pro hrany H to plyne z jejich $(\mathcal{F}, H)$-volnosti. Pro každou hranu $e \in E(P) \setminus E(H)$ pak můžeme uvážit k-hvozd $(F_1' - e + uv, F_2', \dots, F_k')$, který je $(H \cup P)$-podobný $\mathcal{F}$ a neobsahuje e. Graf $H \cup P$ je pak ale ve sporu s maximalitou v definici $\mathcal{F}$-uzávěru. □

Nechť $\mathcal{P}$ je rozdělení vrcholů grafu G. Jako $e(\mathcal{P})$ označme počet hran G s konci v různých částech $\mathcal{P}$.

Věta 4. *Graf G má k hranově disjunktních koster právě tehdy, když každé rozdělení $\mathcal{P}$ vrcholů G splňuje $e(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$.*

Důkaz. Nechť G má alespoň k hranově disjunktních koster. Pro libovolnou kostru je graf vzniklý kontrakcí částí $\mathcal{P}$ souvislý a má tedy alespoň $|\mathcal{P}| - 1$ hran; proto $e(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$.

Pro opačnou implikaci budeme postupovat indukcí; nechť věta platí pro všechny grafy G' s méně než $|V(G)|$ vrcholy. Věta zjevně platí pro grafy s jedním vrcholem, předpokládejme tedy $|V(G)| \geq 2$. Je-li $\mathcal{P}$ rozdělení vrcholů G na části velikosti 1, pak $e(\mathcal{P}) = |E(G)|$ a $|\mathcal{P}| = |V(G)|$, graf G má tedy alespoň $k(|V(G)| - 1)$ hran. Nechť $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_k)$ je k-hvozd v G tž. $|\mathcal{F}|$ je největší možné. Jestliže $|\mathcal{F}| = k(|V(G)| - 1)$, pak $F_1, \dots, F_k$ jsou hranově disjunktní kostry.

Předpokládejme tedy, že $|\mathcal{F}| < k(|V(G)| - 1) \leq |E(G)|$, a tedy existuje hrana $e \in E(G) \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Nechť H_0 je podgraf G skládající se jen z hrany e a nechť H je $\mathcal{F}$-uzávěr H_0. Dle Lemma 3 v H existuje k hranově disjunktních koster $F_1 \cap H, \dots, F_k \cap H$. Jelikož $e \in E(H)$, podgraf H má alespoň 2 vrcholy.

Nechť G' je graf vzniklý z G kontrakcí H do jednoho vrcholu h (odstraňujeme smyčky, ale necháváme násobné hrany). Pro každé rozdělení $\mathcal{P}'$ vrcholů G' existuje $\mathcal{P}$ vrcholů G se stejným počtem částí (vzniklé nahrazením h vrcholy $V(H)$) tž. $e(\mathcal{P}') = e(\mathcal{P})$. Proto G' splňuje předpoklady věty, a z indukčního předpokladu má G' k hranově disjunktních koster. Jejich zkombinováním s k hranově disjunktními kostrami v H dostáváme k hranově disjunktních koster v G. □

Důsledek 5. *Každý hranově $2k$-souvislý graf má alespoň k hranově disjunktních koster.*

Věta 6. *Graf G je sjednocením nejvýše k lesů právě tehdy, když každá $U \subseteq V(G)$ splňuje $|E(G[U])| \leq k(|U| - 1)$.*

Důkaz. Je-li G sjednocením nejvýše k lesů, pak i každý jeho indukovaný podgraf H se dá rozložit na k hranově disjunktních lesů, a tedy $|E(H)| \leq k(|V(H)| - 1)$.

Pro opačnou implikaci, nechť $\mathcal{F}$ je k-hvozd v G tž. $|\mathcal{F}|$ je největší možné. Jestliže $G \neq \bigcup \mathcal{F}$, zvolme hranu $e \in E(G) \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Nechť H_0 je podgraf G skládající se jen z hrany e a nechť H je $\mathcal{F}$-uzávěr H_0. Dle Lemma 3 lze v H nalézt k hranově disjunktních koster, z nichž ani jedna neobsahuje e. Proto $|E(H)| \geq k(|V(H)| - 1) + 1$, což je spor. $\square$