1. Zformulujte a dokažte variantu Removal lemma pro K_4.

2. Ukažte, že pro každé $p > 0$ existují $c, \varepsilon > 0$ takové, že platí následující. Nechť G je graf a (A, B) je ε-regulární pár v G. Nechť $|A| = |B| = n$ a $d(A, B) \geq p$, a $A' \subseteq A$ a $B' \subseteq B$ jsou podmnožiny tž. $|A'| = |B'| \geq (1 - \varepsilon)n$, každý vrchol A' má alespoň $(p - 2\varepsilon)n$ sousedů v B' a každý vrchol B' má alespoň $(p - 2\varepsilon)n$ sousedů v A'. Pak bipartitní podgraf G s partitami A' a B' obsahuje alespoň cn navzájem hranově disjunktních perfektních párování.

3. Dokažte následující: pro každé $\alpha > 0$ existují $c, n_0 > 0$ takové, že každý graf G s $n \geq n_0$ vrcholy a alespoň αn^2 hranami obsahuje cn-regulární bipartitní graf jako podgraf.

4. *Vnoření* grafu H do grafu G je prostá funkce $f : V(H) \to V(G)$ tž. pro každou hranu $uv \in E(H)$ platí $f(u)f(v) \in E(G)$. Vnoření tedy ukazuje, že H je podgraf G. Ukažte, že pro každé $p, c, \Delta > 0$ existují $\alpha, \varepsilon > 0$ tak, že platí následující.

   Nechť $A_1, \ldots, A_c$ jsou disjunktní podmnožiny vrcholů G stejné velikosti n tž. každý pár (A_i, A_j) pro $1 \leq i < j \leq c$ je ε-regulární a $d(A_i, A_j) \geq p$. Nechť H je graf maximálního stupně Δ, φ je obarvení H barvami $\{1, \ldots, c\}$, H_0 je jeho indukovaný podgraf a f_0 je vnoření H_0 do G tž. pro každé $v \in V(H_0)$ platí $f_0(v) \in A_{\varphi(v)}$. Pro každý vrchol $v \in V(H) \setminus V(H_0)$ nadefinujme $H_0(v)$ jako množinu sousedů v v H patřících do $V(H_0)$, a jako $S(v)$ množinu všech vrcholů v $A_{\varphi(v)}$, které v G sousedí se všemi vrcholy v $f_0(H_0(v))$.

   Jestliže $n \geq \alpha|V(H)|$ a každé $v \in V(H) \setminus V(H_0)$ splňuje $|S(v)| \geq (p - \varepsilon)^{|H_0(v)|}n$, pak f_0 lze rozšířit na vnoření celého H do G.