1. Dokažte, že každý graf G s alespoň 4 vrcholy a alespoň $2|V(G)| - 2$ hranami obsahuje K_4 jako minor.

2. Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ splňující následující. Pro každé $k \geq 3$ existuje graf G s alespoň $ck^2|V(G)|$ hranami, který neobsahuje podrozdělení K_k jako podgraf (nápověda: G lze zvolit jako úplný bipartitní graf).

3. Ukažte, že je-li G 3-souvislý graf obsahující podrozdělení K_5 jako podgraf, pak buď $G = K_5$ nebo G obsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ jako podgraf (nápověda: nechť H je podrozdělení K_5 obsahující cestu $xv_1 \dots v_t y$, kde $\deg(x) = \deg(y) = 4$, $\deg(v_1) = \dots = \deg(v_t) = 2$ a $t \geq 1$. Je-li H podgraf G, pak jelikož $\{x, y\}$ není řez v G, musí G obsahovat cestu P z $\{v_1, \dots, v_t\}$ do zbytku H. Pak $H \cup P$ obsahuje podrozdělení $K_{3,3}$).

4. S použitím výsledku předcházejícího cvičení a Kuratowského věty ukažte, že G neobsahuje $K_{3,3}$ jako minor právě tehdy, když G je (≤ 2)-suma kopií rovinných grafů a K_5.

5. S použitím výsledku předcházejícího cvičení ukažte, že každý graf minimálního stupně alespoň 6 obsahuje $K_{3,3}$ jako minor.