1. Rozhodněte, zda platí následující: Nechť A je podmnožina přirozených čísel taková, že $|\{a \in A : a \leq n\}| \geq n/2$ pro každé $n \geq 1$. Pak A obsahuje nekonečnou aritmetickou posloupnost.

2. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $p > q > 0$ a pro každé $\gamma > 0$ existuje n_1 tž. platí následující. Jestliže $n \geq n_1$ a $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ má velikost alespoň γn, pak $b, b + qd, b + pd \in B$ pro nějaká $b, d > 0$. K důkazu smíte použít pouze tvrzení z přednášky, která jsme dokázali (tj. můžete použít Lemma 2 ze čtvrté přednášky pro $k = 2$, ale nikoliv například Szemerédiho větu pro $k \geq 3$).

3. Nechť G_1 a G_2 jsou náhodné 3-uniformní hypergrafy s množinou vrcholů $\{1, \ldots, n\}$ a hranami získanými takto:

   - Každá trojice vrcholů v G_1 tvoří hranu náhodně nezávisle s pravděpodobností 1/8.
   - Vezměme náhodný graf H_2 takový, že každá dvojice vrcholů tvoří hranu náhodně nezávisle s pravděpodobností 1/2. Nechť trojice vrcholů tvoří hranu G_2, jestliže indukují v H_2 trojúhelník.

   Nechť A, B, C a D jsou navzájem disjunktní podmnožiny množiny $\{1, \ldots, n\}$. Určete střední hodnotu

   - počtu hran $\{a, b, c\} \in E(H_1)$ takových, že $a \in A$, $b \in B$ a $c \in C$
   - počtu hran $\{a, b, c\} \in E(H_2)$ takových, že $a \in A$, $b \in B$ a $c \in C$
   - počtu čtveřic $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ tž. $\{a, b, c, d\}$ indukuje $K_4^{(3)}$ v H_1
   - počtu čtveřic $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ tž. $\{a, b, c, d\}$ indukuje $K_4^{(3)}$ v H_2