

1. Pro $c, \kappa > 0$ dokažte Regularity lemma (Věta 1 z poznámek) za dodatečného předpokladu, že G má nejvýše $c|V(G)|^{2-\kappa}$ hran (náповěda: zvolte M tak, aby prošla následující úvaha. Má-li G nejvýše M vrcholů, pak ho můžu rozdělit na $|V(G)|$ jednovrcholových částí. Jinak ho rozdělím libovolně na m_0 částí a ukáži ε -regularitu jako v posledním cvičení z minulého úkolu).
2. Zformulujte a dokažte variantu Removal lemma pro K_4 .
3. Dokažte následující: pro každé $\alpha > 0$ existují přirozená čísla $c > 0$ a n_0 taková, že každý graf G s $n \geq n_0$ vrcholy a alespoň αn^2 hranami obsahuje cn -regulární bipartitní graf jako podgraf (náповěda: v rozkladu G z Regularity lemmatu existuje ε -regulární pár (množin velikosti k) velké hustoty d ; vyberte z něj podgraf minimálního stupně alespoň $(d-2\varepsilon)k$ s oběma partitami velikosti $d-\varepsilon$ a použitím Hallovy věty v něm najdete mnoho disjunktních perfektních párování).