Kombinatorika a grafy II - 2. série s nápovědou

Nápověda: 15.12.2009 Deadline: 5.1.2010

Řešení příkladů pište **čitelně** a pečlivě. Je možno odevzdávat na cvičení, na přednášce i při náhodném setkání s kterýmkoli cvičícím. Všechny papíry podepište a uveďte, na které cvičení chodíte a který příklad řešíte. V případě nejasností v zadání se ozvěte.

Příklad 1 [2 body]

Určete minimální množinu zakázaných minorů pro třídu grafů s nanejvýš jedním cyklem.

Graf F je minor grafu G (neboli G obsahuje F jako minor), pokud lze F získat z G mazáním hran a/nebo vrcholů a kontrahováním hran.

Grafy $\mathcal{F}$ jsou zakázané minory pro třídu grafů $\mathcal{G}$, pokud grafy z $\mathcal{G}$ neobsahují žádný (zakázaný) graf z $\mathcal{F}$ jako minor a každý graf mimo $\mathcal{G}$ obsahuje nějaký (zakázaný) graf z $\mathcal{F}$ jako minor.

Hledaná množina by měla být minimální v tom smyslu, že z ní nelze žádný minor odebrat. Nezapomeňte dokázat, že zakázání vámi nalezenýh minorů už zajistí, že má graf nanejvýš jeden cyklus. Pozor na to, že zkoumaná třída obsahuje i grafy acyklické či nesouvislé.

Nápověda: Pokud graf obsahuje alespoň dva (ne nutně disjunktní) cykly, je možné vybráním nejkratších, vymazáním všeho ostatního, kontrakcí dlouhých cest v těchto cyklech a případnými dalšími minorovými operacemi získat zakázaný minor.

Příklad 2 [2 body]

Dokažte, že přidáním libovolné hrany do maximálně rovinného grafu G na alespoň šesti vrcholech vytvoříte v G zároveň podrozdělení K_5 i $K_{3,3}$.

Graf je maximálně rovinný, pokud do něj už nelze přidat hranu a zachovat přitom rovinnost.

Nápověda: Všimněte si, že v takovémto maximálně rovinném grafu je každá stěna trojúhelník. Pokud byla přidána hrana uv, pak u a v nutně ležely v různých stěnách. Též si můžete všimnout, že takový graf je 3-souvislý. Ve vzniklém nerovinném grafu už nutně leží podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Všimněte si, že vrcholy u a v jsou od sebe odděleny nějakou kružnicí; uvažte nejkratší takovou. Libovolný vrchol na této kružnici spolu se čtyřmi jeho sousedy (dva na kružnici, jeden vně, jeden uvnitř) jsou pak dobrými kandidáty na větvící body podrozdělení K_5.

Příklad 3 [1 bod]

Dokažte, že tzv. kolové grafy (wheels) W_{2n} (tedy se sudou délkou "obvodu" a lichým počtem vrcholů) jsou perfektní.

Kolový graf W_k se skládá z kružnice délky k a jediného dalšího vrcholu připojeného ke každému vrcholu té kružnice.

Nápověda: Uvažujte dva druhy indukovaných podgrafů: ty neobsahující středový vrchol, a ty se středovým vrcholem ale bez některého obvodového. Druhý typ grafů lze získat acyklickým lepením trojúhelníků a hran.

Příklad 4 [2 body]

Kolik existuje různých obarvení stěn osmistěnu n barvami? Jako různá obarvení bereme taková, která na sebe není možné převést otáčením osmistěnu. Řešení vyjádřete jako polynom v n. Obarvení stěn zde může být libovolné, nemusí tedy splňovat žádné podmínky na nesousednost stejných barev.

Nápověda: Řešení pomocí Burnsideova lemmatu: Jako grupu vezměte grupu rotací osmistěnu (bez zrcadlení; grupa má 24 prvků). Jako prvky množiny všechna obarvení stěn n barvami. Pro každou rotaci (stačí po typech rotací) spočítejte, kolik obarvení stěn se touto rotací nezmění (vždy n^c pro nějaké c) a dosaďte do BL.

Příklad 5 [3 body]

Spočítejte, kolik existuje neisomorfních bipartitních grafů na 3 červených a 3 modrých vrcholech. Partity jsou určeny barvami vrcholů. Isomorfismus zde zachovává nejen hrany, ale i barvy vrcholů (a tedy i partity).

Nápověda: Řešení pomocí Pólyovy enumerace: Jako grupu vezměte grupu automorfizmů grafu $K_{3,3}$, které neprohazují partity – každý z automorfizmů libovolně permutuje vrcholy v rámci partit. Tato grupa má 36 prvků. Jako množinu objektů vezměte množinu obarvení hran $K_{3,3}$ dvěma barvami (hrana/nehrana). Dále spočtěte cyklický index grupy permutací hran (z cyklického indexu $S_3 \times S_3$ jakožto grupy permutací vrcholů) a dosaďte do nevážené PE. Úlohu je též možné řešit pomocí BL.