Kombinatorika a grafy II - série 1.

Nápověda: 10.11. Deadline: 24.11.

Řešení příkladů pište **čitelně** a pečlivě. Je možno odevzdávat na cvičení, na přednášce i při náhodném setkání s kterýmkoli cvičícím. Všechny papíry podepište a uveďte, na které cvičení chodíte a který příklad řešíte. V případě nejasností v zadání se ozvěte.

Příklad 1 [1 bod]

Mějme bipartitní graf G s partitami V_1 a V_2. Nechť A je množina vrcholů maximálního stupně. Ukažte, že v G existuje párování, které obsahuje všechny vrcholy $V_1 \cap A$.

Nápověda:

Uvaž množinu vrcholů $A \setminus V_1$ a ověř Hallovu podmínku.

Příklad 2 [1 bod]

Mějme bipartitní graf G s partitami V_1 a V_2. Nechť pro každou $S \subseteq V_1$ platí

$$|N(S)| \geq |S| - d.$$

Dokažte, že G obsahuje párování velikosti $|V_1| - d$.

Nápověda:

Zkus nějaké vrcholy přidat a hledat perfektní párování.

Příklad 3 [2 body]

Pro každé (stačí sudé) k nalezněte k-regulární hranově $(k-2)$-souvislý graf na sudém počtu vrcholů, který nemá perfektní párování.

Nápověda:

Zkonstruujte udělátko pro lichou komponentu a množinu S, aby bylo patrné, že výsledný graf porušuje Tutteho podmínku.

Příklad 4 [2 body]

Ukažte, že hrany grafu K_{2n} lze rozložit na $2n-1$ perfektních párování.

Nápověda:

Je potřeba šikovně konstruovat párování, aby se celý graf rozložil. Zkus všechny vrcholy až na jeden rozmístit do kruhu...

Příklad 5 [2 body]

Určete hranovou barevnost pro graf K_n.

Nápověda:

Pro liché a sudé to vyjde jinak.

Příklad 6 [2 body]

Ukažte, že pro každý linegraph G platí, že $\chi(G) \in \{\omega(G), \omega(G)+1\}$.

Nápověda:

Hranová barevnost.