

- (2,5 bodu) Necht' α je akce grupy Γ na množině \mathcal{A} . Pro $\pi \in \Gamma$ definujme $\pi' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tak, že $\pi'(x) = \alpha(\pi, x)$ pro každé $x \in \mathcal{A}$. Ukažte, že π' je permutace množiny \mathcal{A} . Dále ukažte, že množina $\Gamma' = \{\pi' : \pi \in \Gamma\}$ s operací skládání permutací tvoří grupu izomorfní grupě Γ .
- (2,5 bodu) *Náhrdelník* je 12 korálků, z nichž každý má jednu z 5 barev, navlečených na do kruhu uzavřenou niť. Kolik různých náhrdelníků existuje, když náhrdelníky, které se liší pouze rotací nebo zrcadlením, považujeme za stejné?
- (2,5 bodu) Uvažujme přiřazení barev $\{1, 2, 3\}$ vrcholům cesty s n vrcholy, kde n je sudé. Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud se liší pouze permutací barev a případně obrácením cesty. Např. obarvení 111231 je stejné jako 222131 (prohození barev 1 a 2) či 213222 (rotace barev $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ a obrácení cesty). Kolik je různých obarvení (v závislosti na n)?
- (2,5 bodu) Definujme $T(x) = \sum_{n \geq 1} t_n x^n$, kde t_n je počet zakořeněných ternárních stromů (každý vrchol je buď list nebo má 3 syny, na pořadí synů nezáleží). Ukažte, že

$$T(x) = x + \frac{x}{6}(T^3(x) + 3T(x)T(x^2) + 2T(x^3)).$$