(2,5 **bodu**) Nechť $d_n$ je počet různých posloupností $m_1, m_2, \ldots, m_t$ přirozených čísel, kde $1 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_t$ a $m_1 + \ldots + m_t = n$. Například 6 lze vyjádřit jako 6, $1+5$, $2+4$ a $1+2+3$, a proto $d_6 = 4$. Ukažte, že $d_n = [x^n](1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$ (nekonečný součin, ale rozmyslete si, že k určení koeficientu u $x^n$ stačí vyhodnotit konečně mnoho členů).

(2,5 **bodu**) Nechť $l_n$ je počet různých posloupností $c_1, \ldots, c_t$ přirozených čísel, kde $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_t$ a čísla $c_1, \ldots, c_t$ jsou lichá. Například 6 lze vyjádřit jako $1+5$, $3+3$, $1+1+1+3$ a $1+1+1+1+1+1$, a proto $l_6 = 4$. Ukažte, že $l_n = [x^n]\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots$

(2,5 **bodu**) Ukažte, že pro každé $n$ platí $d_n = l_n$.

(2,5 **bodu**) Nechť $m_n$ je počet perfektních párování úplného grafu na $n$ vrcholech, a $M(x) = \sum_{n \geq 0} m_n \frac{x^n}{n!}$. Ukažte, že $M(x) = e^{x^2/2}$ (bez využití explicitního vzorce pro $m_n$).