Nechť $\mathcal{A}$ je množina řetězců písmen $\texttt{a}$, $\texttt{b}$, $\texttt{c}$ neobsahujících podřetězec $\texttt{aa}$. Pro řetězec s jako $|s|$ označme jeho délku. Nechť $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ je vytvořující funkce množiny $\mathcal{A}$, tj. pro každé $n \geq 0$ je a_n je počet řetězců písmen $\texttt{a}$, $\texttt{b}$, $\texttt{c}$ délky n neobsahujících podřetězec $\texttt{aa}$. Speciálně $a_0 = 1$ (počítáme i prázdný řetězec $\varnothing$).

(2 **body**) Ukažte, že pro kadé $n \geq 0$ je počet řetězců v $\mathcal{A} \setminus \{\varnothing, \texttt{a}\}$ délky n roven počtu dvojic řetězců (s_1, s_2), kde $|s_1| + |s_2| = n$ a

- $s_1 \in \{\texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{ab}, \texttt{ac}\}$
- $s_2 \in \mathcal{A}$.

(2 **body**) S použitím předchozího cvičení ukažte, že

$$A(x) = 1 + x + (2x + 2x^2)A(x),$$

a tedy

$$A(x) = \frac{1+x}{1-2x-2x^2}.$$

(1 **bod**) Ukažte, že pro libovolná reálná čísla α a β a přirozené číslo n platí

$$[x^n]\frac{\alpha}{1-\beta x} = \alpha\beta^n.$$

(2 **body**) Nechť $\beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$; povšimněte si, že platí $(1-\beta_1 x)(1-\beta_2 x) = 1 - 2x - 2x^2$. Najděte reálná čísla α_1 a α_2 taková, že

$$A(x) = \frac{\alpha_1}{1-\beta_1 x} + \frac{\alpha_2}{1-\beta_2 x},$$

a s použitím předchozího cvičení najděte explicitní vzorec pro a_n.

(2 **body**) Pro $k \leq n$ jako $b_{n,k}$ označme počet řetězců z $\mathcal{A}$ délky n obsahujících právě k-krát písmeno $\texttt{a}$. Nechť $B(x,y) = \sum_{k\leq n} b_{n,k} x^n y^k$. Ukažte, že

$$B(x,y) = \frac{1+xy}{1-2x-2x^2 y}.$$

(2 **body**) Nechť $C(x,y) = \frac{d}{dy} B(x,y)$. Ukažte, že průměrný počet p_n výskytů písmene $\texttt{a}$ v řetězci z $\mathcal{A}$ délky n je roven

$$\frac{[x^n]C(x,1)}{a_n}.$$

(2 **body**) Popište, jak byste odvodili explicitní vzorec pro p_n z předchozího cvičení (výpočty nemusíte provádět).