Orientace grafu G je orientovaný graf $\vec{G}$ vzniklý z G tak, že každou hranu naorientujeme v jednom (libovolném) směru. *Orientovaný uzavřený tah* v $\vec{G}$ je posloupnost $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_m, e_m$ vrcholů a hran taková, že e_i je hrana orientovaná z v_i do v_{i+1} pro $i = 1, \ldots, m-1$ a e_m je hrana orientovaná z v_m do v_1. Speciálně každá smyčka tvoří orientovaný uzavřený tah. Orientovaný graf je *acyklický*, jestliže neobsahuje orientovaný uzavřený tah. Jako $a(G)$ označme počet acyklických orientací grafu G.

(2,5 bodu) Ukažte, že

$$a(G) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ 2a(G-e) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ 0 & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ a(G-e) + a(G/e) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

(2,5 bodu) Ukažte, že $a(G) = T_G(2, 0)$. Můžete použít vztahy z předchozího cvičeni, i pokud je neumíte dokázat.

(2,5 bodu) Ukažte, že mají-li dva grafy pro každé přirozené číslo b stejný počet obarvení barvami $\{1, \ldots, b\}$, pak také mají stejný počet acyklických orientací.

(2,5 bodu) Nechť G je souvislý graf. Každou jeho hranu smažeme náhodně nezávisle s pravděpodobností p. Ukažte, že pravděpodobnost, že výsledný graf je souvislý, je rovna $(1-p)^{r(G)} p^{n(G)} T_G(1, 1/p)$. Hint: $r(G) - r(F) = 0$ platí pro $F \subseteq E(G)$ právě když graf $(V(G), F)$ je souvislý.