Extremální kombinatorika

2. června 2021

$$\mathrm{ex}(H,n) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, H \not\subseteq G\}$$

Turánův graf $T_k(n)$: Úplný k-partitní graf s n vrcholy, každá část má velikost $\lfloor n/k \rfloor$ nebo $\lceil n/k \rceil$.

$$t_k(n) = \left|E(T_k(n))\right|$$

Věta (Turán)

$$\mathrm{ex}(K_{k+1}, n) = t_k(n)$$

Lemma

Jestliže $K_{k+1} \not\subseteq G$, pak existuje úplný k-partitní graf H s $V(H) = V(G)$ tž. $\deg_H(v) \geq \deg_G(v)$ pro každé $v \in V(G)$.

$$\mathrm{ex}_m(H,n) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, H \not\preceq_m G\}$$

Věta

$$\mathrm{ex}_m(K_k,n) < 2^{k-3}n.$$

Systém $\mathscr{A}$ množin je protínající, jestliže $A \cap B \neq \emptyset$ pro každé $A, B \in \mathscr{A}$.

$$f(n,k) = \max\left\{ |\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq \binom{[n]}{k}, \mathscr{A} \text{ protínající} \right\}$$

Věta (Erdős-Ko-Rado)

Jestliže $n \geq 2k$, pak

$$f(n,k) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Ukažte, že pro každý graf H a přirozená čísla $n_1 \leq n_2$ platí

$$\frac{\mathrm{ex}(H, n_1)}{\binom{n_1}{2}} \geq \frac{\mathrm{ex}(H, n_2)}{\binom{n_2}{2}}.$$

(Hint: Pro graf G s n_2 vrcholy tž. $H \not\subseteq G$ počítejte dvěma způsoby počet dvojic (X, e), kde $X \subseteq V(G)$ je množina velikosti n_1 a $e \in E(G[X])$).

Vyvoďte, že limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(H,n)}{\binom{n}{2}}$ vždy existuje.

Dokažte, že jestliže $K_{k+1} \not\subseteq G$ a G není úplný k-partitní graf, pak existuje úplný k-partitní graf H s $V(H) = V(G)$ tž. $\deg_H(v) \geq \deg_G(v)$ pro každé $v \in V(G)$ a $|E(H)| > |E(G)|$.

S pomocí tohoto tvrzení dokažte, že je-li G graf s n vrcholy, $K_{k+1} \not\subseteq G$, a $|E(G)| = \mathrm{ex}(K_{k+1}, n)$, pak G je isomorfní $T_k(n)$.

Označme

$$f(n) = \max\left\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq 2^{[n]}, \mathscr{A} \text{ protínající}\right\}.$$

Ukažte, že $f(n) = 2^{n-1}$ (hint: každé množině $X \in \mathscr{A}$ přiřaďte jednoznačně množinu X', která jistě do $\mathscr{A}$ nepatří).

Ukažte, že jestliže G je graf s n vrcholy, $K_4 \not\preceq G$ a v je vrchol G stupně 3, pak G má minor s $n-1$ vrcholy a alespoň $|E(G)|-2$ hranami.

S pomocí tohoto tvrzení dokažte, že jestliže G je graf s $n \geq 4$ vrcholy a alespoň $2n-2$ hranami, pak $K_4 \preceq_m G$.