Burnsideovo lemma

26. května 2021

- Akce α grupy Γ na množině $\mathscr{A}$: Funkce $\Gamma \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ tž.
    - $\alpha(\mathrm{id}, x) = x$
    - $\alpha(\pi_1 \circ \pi_2, x) = \alpha(\pi_1, \alpha(\pi_2, x))$.
- Orbita $[x]$ prvku $x \in \mathscr{A}$: $\{\alpha(\pi, x) : \pi \in \Gamma\}$
- $\mathscr{A}/\Gamma$: množina všech orbit
- $\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in \mathscr{A} : \alpha(\pi, x) = x\}$: množina pevných bodů π.
- $\mathrm{Stab}(x) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = x\}$: stabilizátor x.

Theorem (Burnsideovo lemma)

Pro akci konečné grupy Γ na množině $\mathscr{A}$ platí

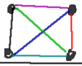
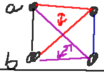
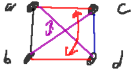
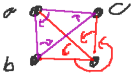
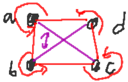
$$|\mathscr{A}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

Pro $w : \mathscr{A}/\Gamma \to X$,

$$\sum_{o \in \mathscr{A}/\Gamma} w(o) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\pi)} w([x]).$$

Příklad: Určete počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech.

- $\mathscr{A}$ = grafy na 4 vrcholech, Γ = permutace vrcholů
- $\alpha(\pi, (\{1,\ldots,4\}, E)) = (\{1,\ldots,4\}, \{\pi(u)\pi(v) : uv \in E\})$

permutace	#perm.	efekt na hrany	# pevných bodů
id	1		2^6
(ab)	6		2^4
(ab)(cd)	3		2^4
(abc)	8		2^2
(abcd)	6		2^2

$|\mathscr{A}/\Gamma| = \frac{1}{24}(2^6 + 9\cdot 2^4 + 14\cdot 2^2) = 11$

Mějme akci α grupy Γ na množině $\mathscr{A}$. Pro $x, y \in \mathscr{A}$ definujme

$$\mathrm{Map}(x,y) = \{\pi \in \Gamma : \alpha(\pi, x) = y\}.$$

Ukažte, že:

- $\mathrm{Map}(x,y) \neq \emptyset$ právě když $y \in [x]$.
- Pro každé $x \in \mathscr{A}$ a $\pi \in \Gamma$ existuje právě jedno $y \in \mathscr{A}$ tž. $\pi \in \mathrm{Map}(x,y)$.
- Jestliže $\alpha(\sigma, y) = y'$, pak funkce $f : \Gamma \to \Gamma$ definovaná jako $f(\pi) = \sigma \circ \pi$ je bijekce mezi $\mathrm{Map}(x,y)$ a $\mathrm{Map}(x,y')$.
- Pro každé $y \in [x]$ platí $|\mathrm{Map}(x,y)| = |\mathrm{Stab}(x)|$.

S použitím předchozího cvičení dokažte, že pro každé $x \in \mathscr{A}$ platí

$$|[x]| \cdot |\mathrm{Stab}(x)| = |\Gamma|.$$

Každou ze stěn krychle obarvěme jednou z k barev. Kolik takových obarvení existuje, když obarvení, která se liší pouze rotací krychle, považujeme za stejná?

Pišme $G(x) = \sum_{n=0}^{6} g_n x^n$, kde g_n je počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech s n hranami. S pomocí vážené varianty Burnsideova lemmatu vyjádřete $G(x)$.