Vytvořující funkce

18. května 2021

$\mathbb{R}[\![x]\!]$: Formální mocninné řady s proměnnou x:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Pro $(\mathscr{A}, |.|)$, kde

- $|A| \in \mathbb{Z}_0^+$ pro každé $\alpha \in \mathscr{A}$ a
- pro každé $n \geq 0$ je $\{\alpha \in \mathscr{A} : |A| = n\}$ konečná,

vytvořující funkce $A(x)$ systému $(\mathscr{A}, |.|)$ je FMŘ $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ tž.

$$a_n = |\{\alpha \in \mathscr{A} : |\alpha| = n\}|.$$

Příklad: $\mathscr{A} =$ konečné řetězce z písmen `a` a `b`, $|s| =$ délka řetězce s, $|\{s \in \mathscr{A} : |s| = n\}| = 2^n$, vytvořujíci funkce

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \frac{1}{1 - 2x}.$$

Pro systém $\mathscr{B}$ objektů β na “množině vrcholů” $V(\beta)$, kde $\mathscr{B}$ je uzavřená na přeznačení vrcholů, exponenciální vytvořující funkce $B(x)$ je FMŘ $\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$ tž.

$$b_n = |\{\beta \in \mathscr{B} : V(\beta) = \{1, \ldots, n\}\}|.$$

Příklad: $\mathscr{B} =$ orientované cykly β na množině vrcholů $V(\beta)$, $|\{\beta \in \mathscr{B} : V(\beta) = \{1, \ldots, n\}\}| = (n-1)!$, exponenciální vytvořujíci funkce

$$B(x) = \sum_{n\geq 1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

Obyčejné vytvořující funkce:

Operace	koeficient u x^n	Význam
Součet $A(x)+B(x)$	a_n+b_n	(disjuknatní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$	kartézský součin
$\frac{1}{1-A(x)}$	$\sum_{k\geq 0}[x^n]A^k(x)$	konečné posloupnosti

Exponenciální vytvořující funkce:

Operace	koeficient u $x^n/n!$	Význam
Součet $A(x)+B(x)$	a_n+b_n	(disjuknatní) sjednocení
Součin $A(x)B(x)$	$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$	proložená dvojice
$e^{A(x)}$	$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}[x^n]A^k(x)$	vytvoření z komponent

Příklad:

- s_n = počet zakořeněných stromů s množinou vrcholů $\{1,\dots,n\}$, $S(x) = \sum_{n\geq 1} s_n \frac{x^n}{n!}$.
- l_n = počet zakořeněných lesů s množinou vrcholů $\{1,\dots,n\}$, $L(x) = \sum_{n\geq 0} l_n \frac{x^n}{n!}$.
- $L(x) = e^{S(x)}$
- zakořeněný strom σ s množinou vrcholů $V(\sigma) \approx$ kořen $k \in V(\sigma)$ a zakořeněný les s množinou vrcholů $V(\sigma)\setminus\{k\}$.
- $S(x) = xL(x) = xe^{S(x)}$.
- $\frac{S(x)}{e^{S(x)}} = x$: $S(x)$ je inverzní funkce k funkci $f(y) = \frac{y}{e^y}$.

Nechť $\mathscr{A}$ je množina řetězců z písmen `a`, `b` a `c` takových, že počet výskytů písmene `a` je sudý a písmeno `b` se vyskytuje nejvýše 4-krát, a a_n počet takových řetězců délky n. Najděte explicitní výraz pro exponenciální vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$. Poznámka:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots.$$

Nechť $C(x)$ je exponenciální vytvořující funkce pro orientované cykly délky alespoň 2, a $P(x)$ je exponenciální vytvořující funkce pro permutace bez pevného bodu (tj. bijektivní funkce $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ takové, že $\pi(i) \neq i$ pro $i = 1, \dots, n$). Ukažte, že

$$P(x) = e^{C(x)} = \frac{e^{-x}}{1 - x},$$

a vyvoďte z toho, že počet permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ bez pevného bodu je $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Nechť c_n je počet způsobů, jak rozdělit množinu $\{1, \ldots, n\}$ na neprázdné disjunktní části (na pořadí částí nezáleží), a $C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$. Ukažte, že $C(x) = e^{e^x - 1}$.

Nechť $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, kde $a_0, a_1, \ldots \geq 0$. Nechť tato řada konverguje pro nějaké $x = R > 0$. Ukažte, že pro dostatečně velké n platí $a_n < (1/R)^n$. S pomocí tohoto pozorování ukažte, že pro dostatečně velké n je počet (zakořeněných) stromů na n vrcholech nejvýše $e^n n!$.