Tutteho polynom

5. května 2021

Definice

Pro toto cvičení: kostra v (souvislém či nesouvislém) grafu G je maximální acyklický podgraf.

- $k(V, E) =$ *počet komponent grafu* (V, E)
- *Rank* $r(V, E) = |V| - k(V, E) =$ *počet hran libovolné kostry grafu* (V, E).
- *Nulita* $n(V, E) = |E| - r(V, E) =$ *počet hran mimo libovolnou kostru grafu* (V, E).

$r = 8$ $n = 5$

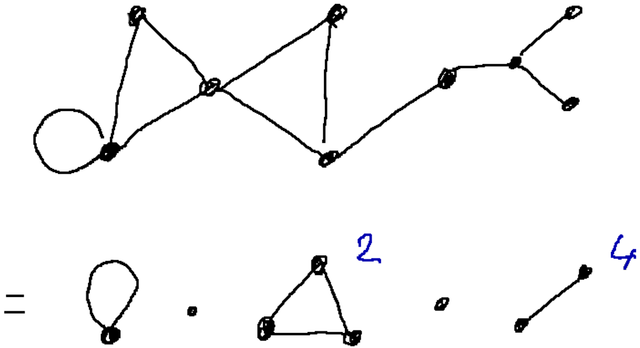
Definice

Tutteho polynom grafu G je

$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E(G)} (x-1)^{r(G)-r(F)} (y-1)^{n(F)}.$$

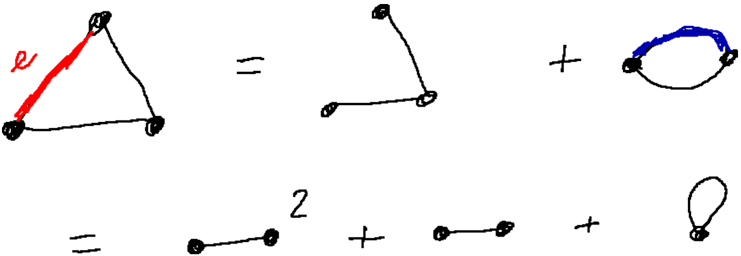
Lemma

Jestliže $|V(G_1 \cap G_2)| \leq 1$, *pak* $T_{G_1 \cup G_2} = T_{G_1} \cdot T_{G_2}$.

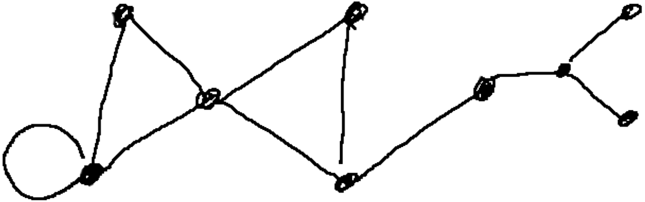


Věta

$$T_G = \begin{cases} 1 & \textit{jestliže } E(G) = \emptyset \\ xT_{G-e} = xT_{G/e} & \textit{jestliže } e \in E(G) \textit{ je most} \\ yT_{G-e} = yT_{G/e} & \textit{jestliže } e \in E(G) \textit{ je smyčka} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \textit{jestliže } e \in E(G) \textit{ není most ani smyčka} \end{cases}$$



$$= x^2 + x + y$$



=

$$= y\,(x^2+x+y)^2 \cdot x^4$$

Definice

Chromatický polynom $\mathrm{ch}_G(b)$ = *počet obarvení G pomocí barev* $\{1,\ldots,b\}$.

$$A_{uv} = \{f : V(G) \to \{1,\ldots,b\}, f(u) = f(v)\}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_G(b) &= b^{|V(G)|} - \Big|\bigcup_{e\in E(G)} A_e\Big| = b^{|V(G)|} - \sum_{\emptyset\neq F\subseteq E(G)} (-1)^{|F|+1}\Big|\bigcap_{e\in F} A_e\Big| \\
&= b^{|V(G)|} - \sum_{\emptyset\neq F\subseteq E(G)} (-1)^{|F|+1} b^{k(F)} \\
&= \sum_{F\subseteq E(G)} (-1)^{|F|} b^{k(F)} = b^{k(G)} \sum_{F\subseteq E(G)} (-1)^{|F|} b^{r(G)-r(F)} \\
&= (-1)^{r(G)} b^{k(G)} \sum_{F\subseteq E(G)} (-1)^{|F|-r(F)} (-b)^{r(G)-r(F)} \\
&= (-1)^{r(G)} b^{k(G)} \sum_{F\subseteq E(G)} (-1)^{n(F)} (-b)^{r(G)-r(F)} \\
&= (-1)^{r(G)} b^{k(G)} T_G(1-b, 0)
\end{aligned}$$

Ukažte, že pro souvislý graf G platí:

- $r(F) = r(G)$ pro $F \subseteq E(G)$ právě když $(V(G), F)$ je souvislý
- $n(F) = 0$ pro $F \subseteq E(G)$ právě když $(V(G), F)$ je les
- $T_G(1,2) =$ počet souvislých podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2,1) =$ počet acyklických podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2,2) = 2^{|E(G)|}$

Dokažte (z definice, bez použití vztahu k Tutteho polynomu), že

$$\mathrm{ch}_G(b) = \begin{cases} b^{|V(G)|} & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ (b-1)\mathrm{ch}_{G/e}(b) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ 0 & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ \mathrm{ch}_{G-e} - \mathrm{ch}_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

S použitím předchozího cvičení dokažte vztah

$$\mathrm{ch}_G(b) = (-1)^{r(G)} b^{k(G)} T_G(1-b, 0)$$

indukcí podle počtu hran grafu G.

Nechť G je souvislý graf nakreslený v rovině a $G^\star$ je jeho duál. Ukažte, že $T_G(x, y) = T_{G^\star}(y, x)$.