Aplikace stability

Zdeněk Dvořák

3. listopadu 2020

Z minulé přednášky:

Věta 1. *Nechť F je graf barevnosti $r+1$, $r \ge 1$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\beta > 0$ tž. pro dostatečně velké n, je-li G graf s n-vrcholy a alespoň $(1-1/r-\beta)n^2/2$ hranami neobsahující F jako podgraf, pak existuje rozdělení $V(G)$ na části A_1, \dots, A_r tž.*

$$\sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\| \le \varepsilon n^2.$$

Důsledek 2. *Nechť F je graf barevnosti $r+1$, $r \ge 1$, a $\gamma > 0$. Nechť je G graf s n vrcholy a $\mathrm{ex}(n;F)$ hranami neobsahující F jako podgraf. Je-li n dost velké, pak G má minimální stupeň alespoň $(1-1/r-\gamma)n$.*

Pozorování 3. *Nechť G je úplný r-partitní graf na n vrcholech s partitami A_1, \dots, A_r. Pak*

$$\|G\| = \Big(1 - 1/r - \sum_{i=1}^{r}(1/r - |A_i|/n)^2\Big)\frac{n^2}{2}.$$

Důsledek 4. *Nechť $r \ge 1$ je přirozené číslo. Nechť G je graf s n vrcholy a alespoň $(1-1/r-\varepsilon)n^2/2$ hranami a A_1, \dots, A_r je rozdělení $V(G)$ na části tž.*

$$\sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\| \le \varepsilon n^2.$$

Pak $|A_i - n/r| \le \sqrt{3\varepsilon}n$ pro každé i a G obsahuje nejvýše $\frac{3}{2}\varepsilon n^2$ nehran s konci v různých částech.

Důkaz. Nechť G obsahuje μn^2 nehran s konci v různých částech. Dle Pozorování 3 máme

$$\begin{aligned}(1-1/r-\varepsilon)\frac{n^2}{2} \le \|G\| &\le \varepsilon n^2 - \mu n^2 + \Big(1-1/r-\sum_{i=1}^{r}(1/r-|A_i|/n)^2\Big)\frac{n^2}{2} \\ &= (1-1/r-\varepsilon)\frac{n^2}{2} + \Big(3\varepsilon - 2\mu - \sum_{i=1}^{r}(1/r-|A_i|/n)^2\Big)\frac{n^2}{2},\end{aligned}$$

a proto

$$2\mu + \sum_{i=1}^{r}(1/r-|A_i|/n)^2 \le 3\varepsilon,$$

z čehož plynou požadované nerovnosti. □

Hrana $e \in E(F)$ je kritická, jestliže $\chi(F-e) < \chi(F)$. Například všechny hrany lichého cyklu jsou kritické.

Věta 5. *Nechť F je graf barevnosti $r+1$, $r \ge 1$. Jestliže F má kritickou hranu, pak pro dostatečně velké n platí $\mathrm{ex}(n;F) = t_r(n)$ a jediný graf s n vrcholy a $\mathrm{ex}(n;F)$ hranami neobsahující F jako podgraf je $T_r(n)$.*

Důkaz. Nechť $k = |F|$, $\beta = \frac{1}{3kr^2}$ a $\varepsilon = \beta^2/3$. Nechť G je graf neobsahující F s n vrcholy tž. $\|G\| = \mathrm{ex}(n;F)$. Nechť $A_1, \ldots, A_r$ je rozdělení $V(G)$ na části tž.

$$m = \sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\|$$

je minimální. Nechť e je kritická hrana F a nechť w je vrchol F incidentní s e.

Dle Věty 1 a Důsledků 2 a 4 pro dostatečně velké n platí, že $m \le \varepsilon n^2$, G má minimální stupeň alespoň $(1-1/r-\varepsilon)n$, $|A_i - n/r| \le \varepsilon n$ pro každé i, a G obsahuje nejvýše εn^2 nehran s konci v různých částech.

Uvažme nejprve případ, že $\Delta(G[A_i]) \ge \beta n$ pro nějaké i. Nechť $v \in A_i$ má alespoň βn sousedů v A_i. Z minimality m plyne, že přesunutím v do libovolné jiné části by se počet hran uvnitř částí nesnížil, a tedy v má alespoň βn sousedů v každé z částí. Nechť $N_1, \ldots, N_r$ jsou množiny sousedů v v A_1, $\ldots$, A_r stejné velikosti alespoň βn a $s = |N_1 \cup \ldots \cup N_r| \ge \beta r n$. Podgraf $G[N_1 \ldots N_r]$ má alespoň

$$\begin{aligned}\big(1-\frac{1}{r}\big)\frac{s^2}{2} - \varepsilon n^2 &\ge \big(1-\frac{1}{r}\big)\frac{s^2}{2} - \frac{\varepsilon}{\beta^2 r^2}s^2 \\ &= \big(1-\frac{1}{r}-\frac{2\varepsilon}{\beta^2 r^2}\big)\frac{s^2}{2} \ge \big(1-\frac{1}{r-1}+\varepsilon\big)\frac{s^2}{2}\end{aligned}$$

hran. Barevnost $F - w$ je r, a pro dost velké n (a tedy i dost velké s) z Erdős-Stoneovy věty tedy $G[N_1 \dots N_r]$ obsahuje $F - w$ jako podgraf. Pak připojením v dostáváme F jako podgraf G, což je spor.

Můžeme tedy předpokládat, že $\Delta(G[A_i]) \le \beta n$ pro každé i. Uvažme libovolný vrchol $v \in A_i$. Jelikož $\Delta(G[A_i]) \le \beta n$ a $|A_i| \ge n/r - \varepsilon n$, v má alespoň $n/r - (\varepsilon + \beta)n$ nesousedů v A_i. Jelikož $\deg(v) \ge (1 - 1/r - \varepsilon)n$, v má nejvýše $(2\varepsilon + \beta)n$ nesousedů v každé jiné části.

Uvažme nyní připad, že nějaké $G[A_i]$ (řekněme pro $i = 1$) má nějakou hranu e'. Z A_1 vyberme k vrcholů B_1 zahrnujících konce e' libovolně. Z každé jiné části A_j vyberme k vrcholů B_j tak, aby vrcholy B_j sousedily se všemi vrcholy $B_1 \cup \ldots \cup B_{j-1}$; to lze, jelikož $k(r-1)(2\varepsilon + \beta)n + k \le n/r - \varepsilon n \le |A_j|$ pro každé j. Pak ale $G[B_1 \cup \ldots \cup B_r]$ obsahuje F jako podgraf, což je spor.

Tedy G je r-partitní s částmi $A_1, \ldots, A_r$. Žádný r-partitní graf neobsahuje F jako podgraf, a z maximality počtu hran G dostáváme $G = T_r(n)$. □

Věta 6. *Nechť G je graf s n vrcholy neobsahující k disjunktních klik velikosti $r + 1$ tž. $\|G\| = \mathrm{ex}(n; kK_{r+1})$. Pro dostatečně velké n je G graf vzniklý z $T_r(n - k + 1)$ přidáním $k - 1$ univerzálních vrcholů, a tedy*

$$\mathrm{ex}(n; kK_{r+1}) = t_r(n - k + 1) + (k - 1)(n - k + 1) + \binom{k-1}{2}.$$

Důkaz. Nechť $\beta = \frac{1}{3r^2}$ a $\varepsilon = \beta^2/8$. Nechť $A_1, \ldots, A_r$ je rozdělení $V(G)$ na části tž.

$$m = \sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\|$$

je minimální. Dle Věty 1 a Důsledků 2 a 4 pro dostatečně velké n platí, že $m \le \varepsilon n^2$, G má minimální stupeň alespoň $(1 - 1/r - \varepsilon)n$, $|A_i - n/r| \le \varepsilon n$ pro každé i, a G obsahuje nejvýše εn^2 nehran s konci v různých částech. Pro každý vrchol $v \in V(G)$ označme jako $i(v)$ index i takový, že $v \in A_i$.

Nechť $U, Z \subseteq V(G)$ jsou disjunktní množiny vrcholů G tž. $|U| \le k$, $|Z| \le k(r + 1)$ a každý vrchol $u \in U$ má alespoň βn sousedů v $A_{i(u)}$. Z minimality m plyne, že u má alespoň βn sousedů v každé z částí. Můžeme tedy zvolit navzájem disjunktní množiny $N_{u,t} \subseteq A_t \setminus (U \cup Z)$ pro $u \in U$ a $1 \le t \le r$ tž. u sousedí se všemi vrcholy $N_{u,t}$ a všechny tyto množiny mají stejnou velikost alespoň $(\beta n - k(r + 2))/k \ge \beta n/2$. Označme $s = |N_{u,1} \cup \ldots \cup N_{u,r}| \ge \beta r n/2$. Podgraf $G[N_{u,1} \ldots N_{u,r}]$ má alespoň

$$\begin{aligned}\big(1 - \frac{1}{r}\big)\frac{s^2}{2} - \varepsilon n^2 &\ge \big(1 - \frac{1}{r}\big)\frac{s^2}{2} - \frac{4\varepsilon}{\beta^2 r^2}s^2 \\ &= \big(1 - \frac{1}{r} - \frac{8\varepsilon}{\beta^2 r^2}\big)\frac{s^2}{2} > \big(1 - \frac{1}{r - 1}\big)\frac{s^2}{2}\end{aligned}$$

hran. Z Turánovy věty tedy $G[N_{u,1} \dots N_{u,r}]$ obsahuje K_r jako podgraf. Připojením u dostáváme K_{r+1}, a pro různá $u \in U$ jsou tyto kliky navzájem disjunktní (a disjunktní s Z).

Nechť $U \subseteq V(G)$ je množina všech vrcholů $u \in V(G)$ tž. u má alespoň βn sousedů v $A_{i(u)}$. Jelikož $kK_{r+1} \not\subseteq G$, z předchozího dostáváme $|U| \leq k-1$. Každý vrchol $v \in V(G) \setminus U$ má nejvýše βn sousedů v $A_{i(v)}$. Jelikož $|A_{i(v)}| \geq n/r - \varepsilon n$, v má alespoň $n/r - (\varepsilon + \beta)n$ nesousedů v $A_{i(v)}$. Jelikož $\deg(v) \geq (1 - 1/r - \varepsilon)n$, v má nejvýše $(2\varepsilon + \beta)n$ nesousedů v každé jiné části.

Uvažme nyní případ, že nějaké $G[A_i \setminus U]$ (řekněme pro $i = 1$) obsahuje párování M velikosti $k - |U|$. Pro $j = 2, \dots, r$ z $A_j \setminus U$ vyberme vrcholy $v_{e,j}$ různé pro různé hrany $e \in M$ a sousedící s oběma konci e a s vrcholy $v_{e,2}, \dots, v_{e,j-1}$; to lze, jelikož $r(2\varepsilon + \beta)n + k \leq n/r - \varepsilon n \leq |A_j|$ pro každé j. Tím dostáváme $k - |U|$ disjunktních klik velikosti $r + 1$. Aplikujeme tvrzení s předminulého odstavce, kde Z je sjednocení množin vrcholů těchto klik, a dostáváme $kK_{r+1} \subseteq G$, což je spor.

Proto maximální párování v $G[A_i \setminus U]$ pro $i = 1, \dots, r$ má velikost nejvýše $k - 1 - |U|$, a tedy existuje množina $X \subseteq V(G) \setminus U$ velikosti nejvýše $2(k - 1 - |U|)r$ taková, že $A_i \setminus (U \cup X)$ je nezávislá množina v G pro každé i. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \|G\| &\leq t_r(n - |U|) + 2(k - 1 - |U|)r\beta n + |U|(n - |U|) + \binom{|U|}{2} \\ &\leq t_r(n - k + 1) + (k - 1)(n - k + 1) + \binom{k-1}{2}, \end{aligned}$$

kde rovnost se nabývá právě když $|U| = k - 1$, $G - U$ je $T_r(n - k + 1)$ a vrcholy U sousedí se všemi ostatními vrcholy G. $\square$