Stabilita Erdős-Stoneova odhadu

Zdeněk Dvořák

6. listopadu 2020

Věta 1 (Erdős-Stone)**.** *Nechť F je graf barevnosti $r+1$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tž. každý graf s $n \ge n_0$ vrcholy a alespoň $(1-1/r+\varepsilon)\frac{n^2}{2}$ hranami obsahuje F jako podgraf.*

Úplný multipartitní graf $T_r(n)$ neobsahuje F jako podgraf a má přibližně $(1-1/r)\frac{n^2}{2}$ hran. Stabilita: I grafy bez F mající o něco méně hran stále musí mít podobnou strukturu.

Lemma 2. *Nechť F je graf barevnosti $r+1$, $r \ge 1$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\beta > 0$ tž. pro dostatečně velké n, je-li G graf s n-vrcholy minimálního stupně alespoň $(1-1/r-\beta)n$ neobsahující F jako podgraf, pak existuje rozdělení $V(G)$ na části A_1, ..., A_r tž.*

$$\sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\| \le \varepsilon n^2.$$

Důkaz. Nechť $t = |F|$, $s = \lceil \frac{32}{\varepsilon} t^2 \rceil + t$ a $\beta = \min\left(\frac{t}{rs}, \frac{1}{2r(r-1)}\right)$. Jelikož $\beta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$, Věta 1 pro dostatečně velké n implikuje, že G obsahuje $T_r(rs)$ jako podgraf; nechť $B_1, \ldots, B_r \subseteq V(G)$ velikosti s jsou partity tohoto podgrafu a $B = B_1 \cup \ldots \cup B_r$. Pro dostatečně velké n máme $|B| \le \frac{t}{rs} n \le \frac{\varepsilon}{4} n$.

Rozložme $V(G) \setminus B$ na části T, A'_1, ..., A'_r, S, kde

- T obsahuje vrcholy, které mají alespoň t sousedů v každé z partit B_1, ..., B_r a
- A'_i pro $i = 1, \ldots, r$ obsahuje vrcholy, které mají méně než t sousedů v B_i a alespoň $s - \frac{16}{\varepsilon} t$ sousedů v každé další partitě.

Máme $|T| < t\binom{s}{t}^r$, jinak G obsahuje $T_{r+1}((r+1)t)$ a tedy i F jako podgraf. Pro dostatečně velké n tedy $|T| \le \frac{t}{rs} n \le \frac{\varepsilon}{4} n$.

Jelikož G má minimální stupeň alespoň $(1-1/r-\beta)n$, počet hran mezi B a $A'_1 \cup \ldots \cup A'_r \cup S$ je alespoň $((1-1/r-\beta)n - |B| - |T|)rs \ge (r-1)sn - 3tn$.

Na druhou stranu, vrcholy v S mají méně než t sousedů v jedné z partit a méně než $s - \frac{16}{\varepsilon}t$ sousedů v jiné z partit, proto

$$(r-1)sn-3tn \leq (n-|S|)((r-1)s+t)+|S|((r-1)s+t-16t/\varepsilon) = (r-1)sn+tn-16t|S|/\varepsilon,$$

a proto $|S| \leq \frac{\varepsilon}{4}n$.

Kdybychom pro nějaké $i \in \{1, \ldots, r\}$ měli $\|G[A'_i]\| \geq \frac{\varepsilon}{4r}n^2$, pak pro dost velké n Věta 1 implikuje, že $G[A'_i]$ obsahuje $K_{t,t}$ jako podgraf. Vrcholy tohoto $K_{t,t}$ mají alespoň $s - 2t\frac{16}{\varepsilon}t \geq t$ společných sousedů v každé partitě B_j pro $j \neq i$, a G by obsahoval $T_{r+1}((r+1)t)$ a tedy i F jako podgraf, což je spor. Proto $\|G[A'_i]\| \leq \frac{\varepsilon}{4r}n^2$.

Položme $A_i = A'_i$ pro $i = 1, \ldots, r-1$ a $A_r = A'_r \cup (B \cup T \cup S)$. Pak

$$\sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\| \leq r\frac{\varepsilon}{4r}n^2 + \frac{3\varepsilon}{4}n^2 = \varepsilon n^2.$$

□

Pro graf G označme $m_r(G) = \|G\| - (1 - 1/r)|G|^2/2$.

Pozorování 3. *Nechť G je graf, r je přirozené číslo a $\beta > 0$. Jestliže v je vrchol G stupně menšího než $(1 - 1/r - \beta)|G|$, pak $m_r(G - v) > m_r(G) + \beta|G| - 1$.*

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned} m_r(G-v) - m_r(G) &= (1-1/r)\big[|G|^2 - (|G|-1)^2\big]/2 - (\|G\| - \|G-v\|) \\ &> (1-1/r)(|G|-1/2) - (1-1/r-\beta)|G| > \beta|G| - 1. \end{aligned}$$

□

Věta 4. *Nechť F je graf barevnosti $r+1$, $r \geq 1$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\beta' > 0$ tž. pro dostatečně velké n, je-li G graf s n-vrcholy a alespoň $(1-1/r-\beta')n^2/2$ hranami neobsahující F jako podgraf, pak existuje rozdělení $V(G)$ na části $A_1, \ldots, A_r$ tž.*

$$\sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\| \leq \varepsilon n^2.$$

Důkaz. Máme $\varepsilon < 1/2$, jinak je tvrzení triviální. Nechť β je konstanta ze znění Lemma 2 pro $\varepsilon/2$. Položme $\beta' = \beta\varepsilon/7$. Opakovaně odebírejme z G vrcholy stupně menšího než $(1-1/r-\beta)$-krát aktuální počet vrcholů, dokud takové vrcholy existují nebo dokud jsme neodebrali alespoň $\varepsilon n/2$ vrcholů.

Nechť G' je výsledný graf. Jestliže jsme odebrali $\lceil \varepsilon n/2 \rceil$ vrcholů, pak dle Pozorování 3 máme

$$\begin{aligned} m_r(G') &\geq m_r(G) + (\beta|G'| - 1)\lceil \varepsilon n/2 \rceil \\ &\geq m_r(G) + \tfrac{\beta\varepsilon}{6} n^2 \geq (\beta\varepsilon/6 - \beta')n^2 \\ &\geq (\beta\varepsilon/6 - \beta')|G'|^2. \end{aligned}$$

Dle Věty 1 pro dost velké n (a tedy dost velké $|G'| \geq n - \lceil \varepsilon n/2 \rceil \geq \lfloor 3n/4 \rfloor$) G' obsahuje F jako podgraf, což je spor. Proto $|G| - |G'| < \varepsilon n/2$ a G' má minimální stupeň alespoň $(1 - 1/r - \beta)|G'|$. Nechť $A'_1, \ldots, A'_r$ je rozklad $V(G')$ získaný v Lemma 2 pro $\varepsilon/2$. Položme $A_i = A'_i$ pro $i = 1, \ldots, r-1$ a $A_r = A'_r \cup (V(G) \setminus V(G'))$. Pak

$$\sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} n^2 + \sum_{i=1}^{r} \|G[A'_i]\| \leq \varepsilon n^2.$$

□

Pozorování 5. *Nechť G je úplný r-partitní graf na n vrcholech s partitami $A_1, \ldots, A_r$. Pak*

$$\|G\| = \Big(1 - 1/r - \sum_{i=1}^{r} (1/r - |A_i|/n)^2\Big) n^2/2.$$

Důkaz. Pro $i = 1, \ldots, r$ označme $d_i = |A_i| - n/r$; máme $\sum_{i=1}^{r} d_i = 0$. Platí

$$\|G\| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} |A_i|(n - |A_i|) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{r} (|A_i|/n)^2\Big) n^2/2$$

a

$$\sum_{i=1}^{r} |A_i|^2 = \sum_{i=1}^{r} (d_i + n/r)^2 = \sum_{i=1}^{r} d_i^2 + n^2/r.$$

□

Důsledek 6. *Nechť F je graf barevnosti $r+1$, $r \geq 1$, a $\gamma > 0$. Nechť je G graf s n vrcholy a $\mathrm{ex}(n; F)$ hranami neobsahující F jako podgraf. Je-li n dost velké, pak G má minimální stupeň alespoň $(1 - 1/r - \gamma)n$.*

Důkaz. Nechť $t = |F|$, $\varepsilon = \min\big(\frac{1}{8r^2}, \frac{\gamma}{5rt}\big)$ a nechť β' je konstanta z Věty 4 pro $\varepsilon/2$; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\beta' \leq \varepsilon$.

Pro dost velké n je $\mathrm{ex}(n; F) \geq t_r(n) \geq (1 - 1/r - \beta')n^2/2$, a tedy dle Věty 4 existuje rozdělení $V(G)$ na části $A_1, \ldots, A_r$ tž. $\sum_{i=1}^{r} \|G[A_i]\| \leq \varepsilon n^2/2$. Dle

Pozorování 5 máme $(1/r - |A_i|/n)^2 \leq \beta' + \varepsilon$ a tedy $||A_i| - n/r| \leq \sqrt{2\varepsilon}n \leq \frac{n}{2r}$ a $|A_i| \geq \frac{n}{2r}$ pro každé i. Obdobně celkový počet nehran mezi různými částmi rozkladu je nejvýše $(\beta' + \varepsilon)n^2/2 \leq \varepsilon n^2$, a proto G obsahuje nejvýše $\frac{n}{4r}$ vrcholů sousedících s více než $4r\varepsilon n$ takovými nehranami. Nechť A_1 je nejmenší z částí rozkladu. Pro dostatečně velké n tedy v A_1 existuje t vrcholů $x_1, \ldots, x_t$ sousedících dohromady s méně než $4rt\varepsilon n$ nehranami mezi různými částmi rozkladu. Tyto vrcholy tedy mají alespoň $n - |A_1| - 4rt\varepsilon n \geq (1 - 1/r - \gamma)n + 1$ společných sousedů S.

Kdyby G obsahoval vrchol v stupně menšího než $(1 - 1/r - \gamma)n$, uvažujme graf G' vzniklý z $G - v$ přidáním vrcholu u sousedícího právě s vrcholy $S - v$. Pak $\|G'\| > \|G\| = \mathrm{ex}(n; F)$, a proto G' obsahuje F jako podgraf, zjevně obsahující u. Podgraf F ale neobsahuje alespoň jeden z vrcholů $x_1, \ldots, x_t$, a nahrazením u tímto vrcholem bychom dostali F jako podgraf v G. To je spor, a tedy G má minimální stupeň alespoň $(1 - 1/r - \gamma)n$. $\square$