Sudé cykly

Zdeněk Dvořák

30. října 2020

Z minulé přednášky:

Věta 1. *Je-li F bipartitní graf, v němž vrcholy v jedné z partit mají stupně nejvýše a, pak*

$$\mathrm{ex}(n; F) = O(n^{2-1/a}).$$

Pro sudé cykly dává odhad $\mathrm{ex}(n; C_{2k}) = O(n^{3/2})$. Oproti tomu přímočarý dolní odhad dává:

Lemma 2. *Pro přirozené $k \geq 2$*

$$\mathrm{ex}(n; C_{2k}) = \Omega(n^{1+1/(2k-1)}).$$

Důkaz. Nechť $c = 6^{1/(1-2k)}$. Uvažme náhodný graf G, každá hrana s pravděpodobností

$$p = cn^{-\frac{2k-2}{2k-1}}.$$

Pro $n \geq 3$ máme

$$E[\|G\|] = p\binom{n}{2} \geq \frac{p}{3}n^2 = \frac{c}{3}n^{1+1/(2k-1)}$$

a

$$E[\text{počet } 2k\text{-cyklů}] \leq n^{2k}p^{2k} = c^{2k}n^{1+1/(2k-1)} = \frac{c}{6}n^{1+1/(2k-1)},$$

po odebrání hrany z každého $2k$-cyklu tedy máme graf s $\Omega(n^{1+1/(2k-1)})$ hranami. □

Existují i lepší (explicitní) konstrukce. Naším cílem bude ukázat lepší horní odhad (Bondy-Simonovitsova věta). Začněme pomocnými lemmátky.

Lemma 3. *Nechť H je cyklus s chordou a nechť (A, B) je rozdělení jeho vrcholů na neprázdné části takové, že $E(H[A]) \cup E(H[B]) \neq 0$. Pak pro $1 \leq \ell \leq |H| - 1$ v H existuje cesta délky ℓ z A do B.*

Důkaz. Nechť $n = |H|$. Očíslujme vrcholy H v pořadí na cyklu prvky $\mathbb{Z}_n$ a jako $a : \mathbb{Z}_n \to \{0, 1\}$ označme charakteristickou funkci množiny A. Nechť e je chorda cyklu H. BÚNO e je incidentní s vrcholem 0, jako v označme druhý konec e; ze symetrie můžeme předpokládat $v \leq n - v$.

Obsahuje-li $H - e$ cesty všech délek mezi 1 a $|H| - 1$ z A do B, jsme hotovi. Jinak uvažme nejmenší t tž. $1 \leq t \leq |H| - 1$ a $H - e$ neobsahuje cestu délky t z A do B. Pak máme $a(x) = a(x + t)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}_n$, a obecněji $a(x) = a(x+mt)$ pro každé celé číslo m. Nechť $q = \mathrm{nsd}(t, n)$; existují celá čísla m a r tž. $q = mt + rn$, a proto $a(x + q) = a(x + mt + rn) = a(x + mt) = a(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}_n$. V $H - e$ proto neexistuje ani cesta délky q z A do B a z minimality t dostáváme $t = q$. Tedy $t = q$ a t dělí n. Jelikož A i B jsou neprázdné, máme $t \geq 2$.

Z minimality t dále dostáváme, že pro každé $t' \in \{1, \dots, t - 1\}$ existuje v $H - e$ cesta délky t' z A do B, a tedy pro nějaké $x \in \mathbb{Z}_n$ platí $a(x) \neq a(x + t')$. Jelikož $a(x) = a(x + mt)$ pro každé celé číslo m, dostáváme následující: $(\star)$ Pro každé $t' \in \{1, \dots, t - 1\}$ a množinu K skládající se z t po sobě jdoucích vrcholů $H - e$ existuje $x \in K$ tž. $a(x) \neq a(x + s)$ pro každé $s \equiv t' \pmod{t}$. Speciálně $H - e$ obsahuje cestu z A do B délky ℓ pro každé $\ell \in \{1, \dots, |H| - 1\}$, které není dělitelné t.

Nechť $\ell \in \{1, \dots, |H| - 1\}$ je dělitelné t. Nyní uvážíme cesty používající chordu e. Nejprve předpokládejme, že $v \leq t$; máme $v \geq 2$, jelikož e je chorda. Dle $(\star)$ existuje $x \in \{0, 1, \dots, t - 1\}$ tž. $a(n - x) \neq a(n - x + s)$ pro každé $s \equiv v - 1 \pmod{t}$. Pak $(n - x)(n - x + 1) \dots 0v(v + 1) \dots (\ell + v - x - 1)$ je cesta z A do B délky ℓ (je to skutečně cesta bez opakujících se vrcholů, jelikož $\ell + v - 1 < n$).

Můžeme tedy předpokládat, že $t < v < n - t$. Cesta v H obsahující e je *prohnutá*, jestliže neobsahuje zároveň hrany $(n-1)0$ a $v(v+1)$, ani neobsahuje zároveň hrany 01 a $(v - 1)v$. Uvažme nyní případ, že H obsahuje prohnutou cestu P délky t z A do B, bez újmy na obecnosti neobsahující hrany $(n - 1)0$ a $(v - 1)v$, s konci $w \in \{0, \dots, t - 1\}$ a $z \in \{v, \dots, v + t - 1\}$. Jestliže $w + \ell - t \leq v - 1$, pak spojení P s cestou $w \dots (w + \ell - t)$ je cesta délky ℓ z A do B. Jinak jako w' označme největší číslo menší než v tž. $w' \equiv w \pmod{t}$; pak spojení P s cestami $w \dots w'$ a $v \dots (v + \ell + w - w' - t)$ je cesta délky ℓ z A do B (je to skutečně cesta, jelikož $v + \ell + w - w' - t = (v - w' - t) + \ell + w \leq \ell + w < n$).

Můžeme tedy předpokládat, že žádná taková prohnutá cesta neexistuje, a tedy

(a) pro $w \in \{0, \dots, t - 1\}$ platí $a(w) = a(v + t - 1 - w)$ a

(b) pro $w \in \{0, \dots, t - 1\}$ platí $a(-w) = a(v - t + 1 + w)$.

Pro $w \in \{1, \ldots, t-1\}$ tedy máme

$$a(v{-}1{-}w) = a(v{+}t{-}1{-}w) = a(w) = a(w{-}t) = a(v{-}t{+}1{+}(t{-}w)) = a(v{+}1{-}w).$$

Dále (pro $w = 0$) máme

$$a(v+1) = a(v-t+1) = a(0) = a(v+t-1).$$

Tedy $a(x) = a(x{+}2)$ pro $x \in \{v{-}t, \ldots, v{-}1\}$. Jelikož tento vztah platí pro t po sobě jdoucích hodnot x, platí pro každé $x \in \mathbb{Z}_n$. Z minimality t dostáváme $t = 2$ a (A, B) je rozdělení $H - e$ na partity. Dle (a) máme $a(0) = a(v + 1)$, a tedy $a(0) \neq a(v)$ a $e \notin E(H[A]) \cup E(H[B])$. To je spor s předpokladem $E(H[A]) \cup E(H[B]) \neq 0$. □

Lemma 4. *Nechť $k \geq 2$ je přirozené číslo. Nechť G je souvislý graf a v je jeho vrchol. Pro $i \geq 0$ označme jako V_i množinu vrcholů G ve vzdálenosti i od v, a jakožto G_i bipartitní podgraf G mezi V_i a V_{i+1}. Jestliže G neobsahuje C_{2k} a $i \leq k-1$, pak G_i ani $G[V_i]$ neobsahují bipartitní podgraf izomorfní cyklu délky alespoň $2k$ s chordou.*

Důkaz. Nechť F je takový podgraf v G_i nebo $G[V_i]$, a nechť (Y, Z) jsou jeho partity tž. $Y \subseteq V_i$. Zjevně $i \geq 1$ a $|Y| \geq 2$. Pro každý vrchol $x \in V_j$ s $j \geq 1$ si zvolme libovolně hranu z x do V_{j-1} a jakožto T si označme kostru G tvořenou zvolenými hranami, zakořeněnou ve v. Nechť y je nejhlubší vrchol T tž. podstrom T pod y obsahuje Y. Nechť a je syn y tž. podstrom T pod a obsahuje nějaký vrchol Y, jako A označme vrcholy Y v tomto podstromu a položme $B = V(F) \setminus A$. Dle volby y nějaký vrchol z Y patří do B, a jelikož (Y, Z) jsou partity F, dostáváme $E(F[B]) \neq \emptyset$.

Nechť t je délka cest z y do Y v T, $1 \leq t \leq i \leq k-1$. Dle Lemma 3 v F existuje cesta Q z A do B délky $2(k-t)$. Jeden konec Q leží v A a druhý v $B \cap Y$, jelikož Q má sudou délku, (Y, Z) jsou partity F a $A \subseteq F$. Sjednocení Q s cestami v T z jejích konců do y dává cyklus délky $2k$ v G, což je spor. □

Lemma 5. *Nechť $d \geq 3$ je přirozené číslo a nechť G je bipartitní graf průměrného stupně alespoň $2d$. Pak G obsahuje cyklus délky alespoň $2d$ s chordou.*

Důkaz. Odebíráním vrcholů stupně menšího než d získáme podgraf $G' \subseteq G$ minimálního stupně alespoň d. Nechť $P = v_1 v_2 \ldots v_m$ je nejdelší cesta v G'. Pak všichni sousedi v_1 leží v P a mají sudé indexy. Nechť v_a a v_b jsou dva s největšími indexy, $a < b$ a $b \geq 2d$. Pak cyklus $v_1 \ldots v_b$ má chordu $v_1 v_a$. □

Důsledek 6. *Nechť $d \geq 3$ je přirozené číslo a nechť G je graf průměrného stupně alespoň $4d$. Pak G obsahuje bipartitní podgraf izomorfní cyklu délky alespoň $2d$ s chordou.*

Důkaz. Graf G má bipartitní podgraf průměrného stupně alespoň $2d$, na nějž aplikujeme Lemma 5. $\square$

Věta 7. *Pro přirozené* $k \geq 2$

$$\mathrm{ex}(n; C_{2k}) = O(n^{1+1/k}).$$

Důkaz. Pro $k = 2$ víme $\mathrm{ex}(n; C_4) = \Theta(n^{3/2})$, proto můžeme předpokládat $k \geq 3$. Nechť H je graf na n vrcholech bez C_{2k} s $\mathrm{ex}(n; C_{2k})$ hranami, a položme $d = \frac{\mathrm{ex}(n;C_{2k})}{n}$. Pro spor předpokládejme, že $d > 6k + 2kn^{1/k}$. Graf H má průměrný stupeň $2d$ a obsahuje tedy souvislý podgraf G minimálního stupně alespoň d.

Nechť v je vrchol G. Pro $i \geq 0$ označme jako V_i množinu vrcholů G ve vzdálenosti i od v, a jakožto G_i bipartitní podgraf G mezi V_i a V_{i+1}.

Pro $0 \leq i \leq k-1$ dle Lemma 4 G_i ani $G[V_i]$ neobsahují bipartitní podgraf izomorfní cyklu délky alespoň $2k$ s chordou. Dle Lemma 5 a Důsledku 6 mají G_i a $G[V_i]$ průměrné stupně menší než $2k$ a $4k$. Indukcí dle i dokažme, že pro $0 \leq i \leq k-1$ platí

$$\|G_i\| < 2k|V_{i+1}|.$$

Pro $i = 0$ máme $\|G_i\| = \deg v = |V_{i+1}|$, čili tvrzení platí. Předpokládejme nyní, že $i > 0$ a tvrzení platí pro menší i. Pak

$$\begin{aligned}\|G_i\| &= \Big(\sum_{v \in V_i} \deg v\Big) - \|G_{i-1}\| - 2\|G[V_i]\| \\ &> d|V_i| - 2k|V_i| - 4k|V_i| = (d-6k)|V_i| > 2k|V_i|.\end{aligned}$$

Vrcholy G_i patřící do V_i mají tedy průměrný stupeň

$$\frac{\sum_{v \in V_i} \deg_{G_i}(v)}{|V_i|} = \frac{\|G_i\|}{|V_i|} > 2k.$$

Jelikož G_i má průměrný stupeň menší než $2k$, vrcholy G_i patřící do V_{i+1} musí mít průměrný stupeň menší než $2k$, a tedy $\|G_i\| < 2k|V_{i+1}|$.

Pro $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tedy máme

$$(d-6k)|V_i| < \|G_i\| < 2k|V_{i+1}|,$$

a tedy

$$|V_{i+1}| > \frac{d-6k}{2k}|V_i|,$$

a

$$n \geq |V_k| > \Big(\frac{d-6k}{2k}\Big)^k.$$

Proto $d \leq 6k + 2kn^{1/k}$, což je spor. $\square$