Dependent random choice

Zdeněk Dvořák

23. října 2020

Z první přednášky:

Věta 1. *Je-li F bipartitní graf s menší partitou velikosti a, pak*

$$\mathrm{ex}(n; F) = O(n^{2-1/a}).$$

Chceme zobecnit na grafy, které mají v jedné partitě maximální stupeň nejvýše a. Idea: najdeme velkou podmnožinu B vrcholů tž. každých a z nich má hodně společných sousedů. Jak takovou množinu najít? Vezmeme náhodně několik vrcholů a jako B zvolíme jejich společné sousedy; kdyby vrcholy v B měly málo společných sousedů, měli bychom malou pravděpodobnost, že se do nich trefíme. Přesněji:

Lemma 2. *Nechť G je graf s n vrcholy a a, b, m a t jsou kladná přirozená čísla. Jestliže*

$$\|G\| \geq (b + m^t n^{a-t})^{1/t} n^{2-1/t},$$

pak existuje $B \subseteq V(G)$ velikosti alespoň b tž. každých a vrcholů v B má alespoň m společných sousedů.

Důkaz. Zvolme vrcholy $v_1, \ldots, v_t$ náhodně nezávisle uniformně a jakožto B_0 označme množinu jejich společných sousedů. Pro každý vrchol je pravděpodobnost, že $v \in B_0$, rovna pravděpodobnosti, že s $v_1, \ldots, v_t$ jsme se trefili do okolí v, je tedy rovna $n^{-t} \deg^t(v)$. Proto

$$\begin{aligned} E[|B_0|] = n^{-t} \sum_{v \in V(G)} \deg^t(v) &\geq n^{1-2t} \Big(\sum_{v \in V(G)} \deg v \Big)^t \\ &> n^{1-2t} \|G\|^t \geq b + m^t n^{a-t}. \end{aligned}$$

Jaká je pravděpodobnost, že a-tice vrcholů $u_1, \ldots, u_a$, které mají méně než m společných sousedů, patří do B_0? S vrcholy $v_1, \ldots, v_t$ bychom se museli trefit mezi tyto společné sousedy, pravděpodobnost je tedy méně než $m^t n^{-t}$. Střední hodnota počtu takových a-tic v B_0 je tedy méně než

$$n^a m^t n^{-t} = m^t n^{a-t}.$$

Z každé takové a-tice odeberme z B_0 jeden vrchol a výslednou množinu označme jako B. Každá a-tice vrcholů v B má tedy alespoň m společných sousedů a

$$E[|B|] > E[|B_0|] - m^t n^{a-t} > b.$$

□

Jako snadný důsledek dostáváme následující tvrzení.

Věta 3. *Je-li F bipartitní graf, v němž vrcholy v jedné z partit mají stupně nejvýše a, pak*

$$\mathrm{ex}(n; F) = O(n^{2-1/a}).$$

Důkaz. Nechť G je graf na n vrcholech, který neobsahuje F. Pak neexistuje $B \subseteq V(G)$ velikosti $|F|$ taková, že každých a vrcholů z B má alespoň $|F|$ společných sousedů – jinak můžeme vnořit vrcholy jedné partity F do B libovolně a hladově vnořit vrcholy druhé partity (které mají stupně nejvýše a). Dle Lemma 2 s $b = m = |F|$ a $t = a$ dostáváme

$$\||G|\| < (|F| + |F|^a)^{1/a} n^{2-1/a} \leq 2|F| n^{2-1/a}.$$

□

Občas se hodí zvolit t větší, zejména chceme-li ukázat existenci podgrafu, jehož velikost záleží na n.

Lemma 4. *Pro každé $c \geq 2$ a dostatečně velké n platí následující. Má-li graf G na n vrcholech alespoň $3n^2/c$ hran, pak obsahuje 1-podrozdělení úplného grafu s $\lfloor \sqrt{n/c^3} \rfloor$ vrcholy.*

Důkaz. Existence 1-podrozdělení K_p je implikována přítomností množiny p vrcholů takových, že každé dva z nich mají alespoň $p + \binom{p}{2} \leq p^2$ společných sousedů. Jestliže graf G na n vrcholech neobsahuje 1-podrozdělení K_p, z Lemma 2 (s $a = 2$, $b = p$, $m = p^2$) dostáváme pro každé přirozené číslo t

$$\|G\| < (p + p^{2t} n^{2-t})^{1/t} n^{2-1/t} = (pn^{-1} + p^{2t} n^{1-t})^{1/t} n^2.$$

Pro $p = \lfloor \sqrt{n/c^3} \rfloor$ tedy dostáváme

$$\|G\| < (n^{-1/2} c^{-3/2} + nc^{-3t})^{1/t} n^2.$$

Jestliže $t < \frac{\log cn}{2\log c}$, platí $n^{-1/2}c^{-3/2} < nc^{-3t}$, a proto

$$\|G\| < 2n^{1/t}c^{-3}n^2.$$

Položme $t = \lfloor \frac{\log n}{2\log c} \rfloor$; pro dostatečně velké n je $t^2 \geq \log n/\log(3/2)$ a tedy dostáváme

$$\|G\| < 2n^{1/t}c^{-3}n^2 < 2n^{1/(t+1)}n^{1/t^2}c^{-3}n^2 \leq 3n^2/c.$$

Má-li tedy G alespoň $3n^2/c$ hran, pak obsahuje 1-podrozdělení úplného grafu s $\lfloor \sqrt{n/c^3} \rfloor$ vrcholy. $\square$

Tento výsledek lze vylepšit, povšimneme-li si, že nepotřebudeme mít vždy p^2 společných sousedů; při vnořování i-té hrany stačí mít i společných sousedů mimo B. Proto se hodí následující variace na Lemma 2.

Lemma 5. *Nechť G je graf na $2n$ vrcholech s alespoň n^2/c hranami a nechť $b \leq \frac{\sqrt{2n}}{4c}$ je přirozené číslo. Pak pro nějakou množinu $B \subseteq V(G)$ velikosti b platí, že pro každé $i \geq 1$ existuje méně než i dvojic vrcholů z B, které mají méně než i společných sousedů ve $V(G) \setminus B$.*

Důkaz. Existuje rozdělení vrcholů G na části V_1 a V_2 velikosti n tak, že alespoň polovina hran G má jeden konec ve V_1 a druhý ve V_2 (stačí uvážit náhodné rozdělení). Nechť G_1 je bipartitní podgraf G vzniklý odstraněním hran uvnitř V_1 a V_2. Ze symetrie můžeme předpokládat, že $\sum_{v\in V_1} \deg^2_{G_1}(v) \leq \sum_{v\in V_2} \deg^2_{G_1}(v)$. Zvolme náhodně nezávisle uniformně dva vrcholy $v_1, v_2 \in V_1$ a jako $B_0 \subseteq V_2$ označme množinu jejich společných sousedů. Stejný argument jako v důkazu Lemma 2 dává

$$E[|B_0|] = n^{-2}\sum_{v\in V_2} \deg^2_{G_1}(v) \geq n^{-3}\Big(\sum_{v\in V_2} \deg_{G_1}(v)\Big)^2 \geq \frac{1}{4}n^{-3}\|G\|^2 \geq \frac{n}{4c^2}.$$

Pro dvojici vrcholů $T = \{x_1, x_2\} \subseteq V_2$ majících $t > 0$ společných sousedů ve V_1 označme $w(T) = 1/t$; povšimněme si, že každé dva vrcholy z B_0 mají alespoň jednoho společného souseda v_1. Označme jako W množinu všech dvojic vrcholů z V_2, které mají alespoň jednoho společného souseda. Označme $Y = \sum_{T\in\binom{B_0}{2}} w(T)$; pak

$$E[Y] = \sum_{T\in W} w(T)\Pr[T \subseteq B_0] = \sum_{T\in W} w(T)\frac{(1/w(T))^2}{n^2} = n^{-2}\sum_{T\in W} w^{-1}(T).$$

V poslední sumě sčítáme pro každou dvojici vrcholů z V_2 počet jejich společných sousedů ve V_1; ekvivalentně, pro každý vrchol z V_1 můžeme spočítat počet dvojic jeho sousedů. Proto

$$\begin{aligned} E[Y] &= n^{-2} \sum_{v \in V_1} \binom{\deg_{G_1}(v)}{2} < \frac{1}{2n^2} \sum_{v \in V_1} \deg^2_{G_1}(v) \\ &\leq \frac{1}{2n^2} \sum_{v \in V_2} \deg^2_{G_1}(v) = E[|B_0|]/2. \end{aligned}$$

Proto $E[|B_0| - Y] > E[|B_0|]/2$, a tedy existuje volba B_0 taková, že $|B_0| > Y + E[|B_0|]/2$. Speciálně $|B_0| > E[|B_0|]/2 \geq \frac{n}{8c^2}$ a $|B_0| > Y$. Nechť B je náhodná podmnožina B_0 velikosti b. Pak

$$E\Big[\sum_{T \in \binom{B}{2}} w(T)\Big] = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{|B_0|}{2}} Y \leq \frac{b^2|Y|}{|B_0|^2} < \frac{b^2}{|B_0|} \leq 1.$$

Existuje tedy množina B velikosti b taková, že každé dva vrcholy z B mají společného souseda ve V_1 a $\sum_{T \in \binom{B}{2}} w(T) < 1$. Pro $i \geq 2$, jestliže $T \in \binom{B}{2}$ je dvojice vrcholů, které mají méně než i společných sousedů mimo B, pak $w(T) > 1/i$, a tedy $\binom{B}{2}$ obsahuje méně než i takových dvojic. $\square$

Nechť $T_1, \ldots, T_{\binom{b}{2}}$ jsou dvojice vrcholů B, setříděné dle počtu společných sousedů mimo B. Pak zjevně vrcholy v T_i mají alespoň i společných sousedů a do G můžeme vnořit 1-podrozdělení K_b.

Důsledek 6. *Každý graf s $2n$ vrcholy a alespoň n^2/c hranami obsahuje 1-podrozdělení K_b pro $b = \lfloor \frac{\sqrt{2n}}{4c} \rfloor$.*

Tato závislost na c je asymptoticky optimální, jak lze ukázat analýzou vhodného náhodného grafu.

Dále bychom chtěli ukázat zobecnění Věty 3 pro a-degenerované grafy. K tomu potřebujeme variantu Lemma 2 se dvěma podmnožinami, v nichž každá a-tice vrcholů má hodně společných sousedů ve druhé podmnožině.

Lemma 7. *Nechť $a, m \geq 2$ jsou přirozená čísla a nechť G je graf s n vrcholy a alespoň $2n^{2-\frac{1}{8a}}$ hranami. Je-li n dostatečně velké, pak existují podmnožiny $B_1, B_2 \subset V(G)$ velikosti alespoň m tž. pro $i \in \{1, 2\}$ má každá a-tice vrcholů z B_i alespoň m společných sousedů v B_{3-i}.*

Důkaz. Položme $t = 4a$, $b = \lfloor n^{1/2} \rfloor$, $a' = \lceil 7a/2 \rceil$. Pak

$$\|G\| \geq 2n^{2-\frac{1}{8a}} \geq (b + m^t n^{a'-t})^{1/t} n^{2-1/t}$$

pro dostatečně velké n. Proto dle Lemma 2 existuje množina $B_1 \subseteq V(G)$ velikosti alespoň $b \geq m$ taková, že každá a'-tice vrcholů z B_1 má alespoň m společných sousedů.

Zvolme $t_1 = a' - a$ vrcholů T_1 z B_1 náhodně nezávisle uniformně, a jako B_2 zvolme množinu jejich společných sousedů (zjevně $|B_2| \geq m$). Pravděpodobnost, že B_2 obsahuje a-tici vrcholů s méně než m společnými sousedy je méně než

$$\begin{aligned} n^a \left(\frac{m}{b}\right)^{t_1} &\leq n^a \left(\frac{2m}{n^{1/2}}\right)^{t_1} \\ &= (2m)^{t_1} n^{a-t_1/2} = (2m)^{t_1} n^{(3a-a')/2} \leq (2m)^{t_1} n^{(3-7/2)a/2} \\ &= (2m)^{t_1} n^{-a/4} \leq 1 \end{aligned}$$

pro dostatečně velké n. Proto existuje volba B_2 tž. každá a-tice vrcholů z B_2 má alespoň m společných vrcholů v B_1. Naopak, každou a-tici vrcholů lze doplnit T_1 na a'-tici; tato a'-tice má alespoň m společných sousedů a z definice všechny z nich leží v B_2. $\square$

Důsledek 8. *Je-li F a-degenerovaný bipartitní graf, pak*

$$\mathrm{ex}(n; F) = O\big(n^{2-\frac{1}{8a}}\big).$$

Důkaz. Na graf s n vrcholy a $\Omega(\big(n^{2-\frac{1}{8a}}\big)$ hranami aplikujeme Lemma 7 pro $m = |F|$ a dostaneme množiny B_1 a B_2. Nechť $v_1, \ldots, v_{|F|}$ jsou vrcholy F v pořadí takovém, že v_i má nejvýše a sousedů v $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ pro $i = 1, \ldots, |F|$. Nechť $p(i) \in \{1, 2\}$ označuje číslo partity, v níž v_i leží. Pak postupně pro $i = 1, \ldots, |F|$ vnořujeme hladově v_i do $B_{p(i)}$. $\square$