Extremální funkce pro bipartitní grafy

Zdeněk Dvořák

16. října 2020

Z první přednášky:

Věta 1. *Je-li F bipartitní graf s menší partitou velikosti a, pak*

$$\mathrm{ex}(n; F) = O(n^{2-1/a}).$$

Pravděpodobnostní dolní odhad:

Lemma 2. *Pro každá přirozená čísla $2 \leq a \leq b$ a dostatečně velké n je*

$$\mathrm{ex}(n; K_{a,b}) \geq \frac{1}{24} n^{2-\beta},$$

kde

$$\beta = \frac{a+b-2}{ab-1}.$$

Důkaz. Nechť G_0 je náhodný graf na n vrcholech obsahující každou hranu nezávisle s pravděpodobností $p = \frac{1}{2} n^{-\beta}$. Pak

$$\mathbb{E}[\|G_0\|] = p\binom{n}{2} \geq \frac{p}{3} n^2 = \frac{1}{6} n^{2-\beta}.$$

Nechť t je počet výskytů $K_{a,b}$ v G_0. Máme

$$\mathbb{E}[t] \leq n^{a+b} p^{ab} \leq \frac{1}{8} n^{2-\beta}$$

Nechť G je graf získaný z G_0 odebráním hrany z každého výskytu $K_{a,b}$. Pak G neobsahuje $K_{a,b}$ jako podgraf a

$$\mathbb{E}[\|G\|] \geq \mathbb{E}[\|G_0\|] - \mathbb{E}[t] \geq \frac{1}{24} n^{2-\beta}.$$

□

Poznámka: $\beta = 1/a + \frac{(a-1)^2}{a(ab-1)} > 1/a$.

Pro $x \in GF(p^m)$ definujme <u>normu</u> x jako $N(x) = x \cdot x^p \cdot x^{p^2} \cdots x^{p^{m-1}}$.

Lemma 3. *Norma na $GF(p^m)$ má následující vlastnosti.*

- $N(xy) = N(x)N(y)$ *pro každé* $x, y \in GF(p^m)$.
- $N(x) = 0$ *právě když* $x = 0$.
- $N(x) \in GF(p)$ *pro každé* $x \in GF(p^m)$.

Důkaz. První dvě vlastnosti jsou triviální. Jelikož v $GF(p^m)$ platí $x^{p^m} = x$ pro každé $x \in GF(p^m)$, máme $N(x)^p = N(x)$, a kořeny polynomu $y^p - y$ jsou právě prvky $GF[p]$, proto $N(x) \in GF[p]$. □

Graf $H_{p,m}$ má jako vrcholy dvojice (x, y), kde $x \in GF(p^m)$ a $y \in GF(p) \setminus \{0\}$; vrcholy (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou spojené hranou právě když $N(x_1 + x_2) = y_1 y_2$. Pro každé (x_1, y_1) a $x_2 \neq -x_1$ je soused (x_2, y_2) jednoznačně určen vztahem $y_2 = y_1/N(x_1 + x_2)$; proto $H_{p,m}$ je $(p^m - 1)$-regulární. Počet n vrcholů $H_{p,m}$ je $p^m(p-1)$ a

$$\|H_{p,m}\| = \frac{1}{2}(p^m - 1)n = \frac{1}{2}n^{2-\frac{1}{m+1}} + \frac{m}{2(m+1)}n^{2-\frac{2}{m+1}} + O\big(n^{2-\frac{3}{m+1}}\big).$$

Věta 4. *Graf $H_{p,1}$ neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf, a proto pro každé $b \geq 2$ platí*

$$\mathrm{ex}(n; K_{2,b}) \geq \frac{1}{2}n^{3/2} + \frac{1}{4}n + O(n^{1/2})$$

pro nekonečně mnoho hodnot n.

Důkaz. Pro $m = 1$ máme $N(x) = x$. Společný soused (x, y) vrcholů $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ musí splňovat rovnice

$$x + a_1 = b_1 y$$
$$x + a_2 = b_2 y.$$

Dosadíme-li za y z první rovnice do druhé, dostáváme

$$x + a_2 = \frac{b_2}{b_1}(x + a_1),$$

a tedy

$$(1 - b_2/b_1)x = a_1 b_2/b_1 - a_2.$$

Jestliže $b_1 \neq b_2$, pak tato rovnice má jediné řešení x, které jednoznačně určuje y. Jestliže $b_1 = b_2$, pak $a_1 \neq a_2$ a pravá strana je nenulová, rovnice tedy nemá žádné řešení.

Systém tedy má nejvýše jedno řešení, každé dva vrcholy tedy mají nejvýše jednoho společného souseda, a graf tedy neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf. □

Věta 5. *Graf $H_{p,2}$ neobsahuje $K_{3,3}$ jako podgraf, a proto pro každé $b \geq 3$ platí*

$$\mathrm{ex}(n; K_{3,b}) \geq \frac{1}{2}n^{5/3} + \frac{1}{3}n^{4/3} + O(n)$$

pro nekonečně mnoho hodnot n.

Důkaz. Společný soused (x, y) navzájem různých vrcholů (a_1, b_1), (a_2, b_2) a (a_3, b_3) musí splňovat rovnice

$$\begin{aligned} N(x + a_1) &= b_1 y \\ N(x + a_2) &= b_2 y \\ N(x + a_3) &= b_3 y. \end{aligned}$$

Má-li tato soustava řešení, pak a_1, a_2 a a_3 jsou navzájem různé ($a_i = a_j$ implikuje $b_i = b_j$, ve sporu s $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$).

Dosadíme za y z první rovnice do druhé a třetí a výsledné rovnice podělíme $N(a_i - a_1)$ pro $i = 2, 3$, dostáváme

$$\begin{aligned} N(1/(x + a_1) + (a_2 - a_1)^{-1}) &= \frac{b_2}{b_1 N(a_2 - a_1)} \\ N(1/(x + a_1) + (a_3 - a_1)^{-1}) &= \frac{b_3}{b_1 N(a_3 - a_1)} \end{aligned}$$

Stačí tedy ukázat, že je-li $c_2 \neq c_3$, pak systém rovnic

$$\begin{aligned} N(z + c_2) &= d_2 \\ N(z + c_3) &= d_3 \end{aligned}$$

má nejvýše dvě řešení. Povšimněme si, že $N(z + c_i) = (z + c_i)(z + c_i)^p = (z + c_i)(z^p + c_i^p)$. Stačí tedy nahlédnout následující silnější tvrzení: Jestliže $c_2 \neq c_3$ a $c'_2 \neq c'_3$, pak systém rovnic (v neznámých z a z')

$$\begin{aligned} (z + c_2)(z' + c'_2) &= d_2 \\ (z + c_3)(z' + c'_3) &= d_3 \end{aligned}$$

má nejvýše dvě řešení. Skutečně, odečtením těchto rovnic dostáváme

$$z' = \frac{1}{c_2 - c_3}((c'_3 - c'_2)z + d_2 - d_3 + c_3 c'_3 - c_2 c'_2),$$

a tedy z jednoznačně určuje z'. Dosazením do první rovnice systému dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{c'_3 - c'_2}{c_2 - c_3} z^2 + k_1 z + k_2 = 0$$

s nenulovým koeficientem u z^2, ta má nejvýše dvě řešení. □

Pro obecný případ použijeme následující tvrzení, které nebudeme dokazovat.

Věta 6. *V libovolném tělese má systém rovnic*

$$
\begin{aligned}
(z_1 - a_{1,1})(z_2 - a_{1,2}) \cdots (z_t - a_{1,t}) &= b_1 \\
(z_1 - a_{2,1})(z_2 - a_{2,2}) \cdots (z_t - a_{2,t}) &= b_2 \\
&\cdots \\
(z_1 - a_{t,1})(z_2 - a_{t,2}) \cdots (z_t - a_{t,t}) &= b_t
\end{aligned}
$$

tž. $a_{i,j} \neq a_{i',j}$ *pro každé* $i \neq i'$ *a* j *nejvýše* $t!$ *řešení.*

Poznámka: pro $b_1 = \ldots = b_t = 0$ je důkaz jednoduchý.

Obdobně jako Větu 5 tedy lze dokázat následující.

Věta 7. *Graf* $H_{p,m}$ *neobsahuje* $K_{m+1,m!+1}$ *jako podgraf, a proto pro každé* $b \geq m! + 1$ *platí*

$$\mathrm{ex}(n; K_{m+1,b}) \geq \frac{1}{2} n^{2-\frac{1}{m+1}} + \frac{m}{2(m+1)} n^{2-\frac{2}{m+1}} + O\big(n^{2-\frac{3}{m+1}}\big)$$

pro nekonečně mnoho hodnot n.