Erdős-Stoneova věta

Zdeněk Dvořák

7. října 2020

Technické lemma, které budeme často používat:

Lemma 1. *Pro každé $c \geq 0$, $\varepsilon > 0$ a dostatečně velké n, jestliže G je graf na n vrcholech a $\|G\| \geq (c+\varepsilon)\frac{n^2}{2}$, pak G má indukovaný podgraf G_0 s $n_0 \geq \sqrt{\varepsilon/4} \cdot n$ vrcholy a minimálním stupněm alespoň $(c+\varepsilon/2)n_0$.*

Důkaz. BÚNO $c + \varepsilon \leq 1$, jinak předpoklad nemůže být splněn.

Uvažme podgraf G_0 získaný následujícím algoritmem. Inicializujme $G_0 := G$, a dokud existuje $v \in V(G_0)$ stupně méně než $(c+\varepsilon/2)|G_0|$, dávejme $G_0 := G_0 - v$. Nechť $n_0 = |G_0|$. Pak

$$\begin{aligned}
\|G\| &\leq \|G_0\| + (c+\varepsilon/2)\sum_{a=n_0+1}^{n} a \\
&\leq \binom{n_0}{2} + (c+\varepsilon/2)\sum_{a=1}^{n} a \\
&\leq \frac{n_0^2}{2} + (c+\varepsilon/2)\frac{n^2+n}{2}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\|G\| \geq (c+\varepsilon)\frac{n^2}{2}$ a $c + \varepsilon/2 < 1$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{n_0^2}{2} &\geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\
&\geq \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{n^2}{2}
\end{aligned}$$

pro $n \geq 4/\varepsilon$, a tedy $n_0 \geq \sqrt{\varepsilon/4} \cdot n$. □

Proto bude Erdős-Stoneovu větu stačit dokázat pro grafy s velkým minimálním stupněm.

Lemma 2. *Pro každé přirozené číslo $r \geq 1$ a $\beta > 0$, každý graf na n vrcholech s minimálním stupněm alespoň $(1 - 1/r + \beta)n$ obsahuje $T_{r+1}(\Omega(\log n))$ jako podgraf.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí dle r. Graf G obsahuje $T_r(mr)$ jako podgraf pro nějaké $m = \Theta(\log n)$ (pro $r \geq 2$ to plyne z indukčního předpokladu, pro $r = 1$ je to triviální); nechť K je odpovídající množina mr vrcholů G. BÚNO

- $n \gg r, 1/\beta$, jelikož jinak $1 = \Omega(\log n)$ a $T_{r+1}(1) \subseteq G$ triviálně;
- $mr \leq \frac{1}{2} \log_2 n$.

Nechť $U \subseteq V(G) \setminus K$ se skládá z vrcholů, které mají více než $(1 - 1/r + \beta/2)|K|$ sousedů v K. Nechť G má q hran mezi K a $V(G) \setminus K$. Jelikož G má minimální stupeň alespoň $(1 - 1/r + \beta)n$, máme

$$q \geq |K|\big((1 - 1/r + \beta)n - |K|\big).$$

Na druhou stranu, vrcholy mimo U mají nejvýše $(1 - 1/r + \beta/2)|K|$ sousedů v K, a proto

$$q \leq |U||K| + (1 - 1/r + \beta/2)n|K| = |K|\big((1 - 1/r + \beta/2)n + |U|\big).$$

Proto $|U| \geq \frac{\beta}{2}n - |K|$, a jelikož $|K| = \Theta(\log n)$, pro dostatečně velké n máme $|U| \geq \frac{\beta}{3}n$.

Každý vrchol $u \in U$ má méně než $(1/r - \beta/2)|K| \leq m - (\beta r/2) \cdot m$ nesousedů v K, a tedy u má více než $m' = \lfloor (\beta r/2) \cdot m \rfloor$ sousedů v každé z partit podgrafu $T_r(mr)$ na K; v tomto $T_r(mr)$ tedy existuje podgraf $T_r(m'r)$ s množinou vrcholů K_u tž. u v G sousedí se všemi vrcholy K_u. Počet různých podgrafů $T_r(m'r)$ v $T_r(mr)$ je nejvýše $2^{mr} \leq \sqrt{n}$. Proto pro nějaký takový podgraf s množinou vrcholů Z platí $K_u = Z$ pro alespoň $|U|/\sqrt{n} \geq \frac{\beta}{3}\sqrt{n}$ vrcholů $u \in U$. Jelikož $m' = \Theta(\log n)$, pro dostatečně velké n je $\frac{\beta}{3}\sqrt{n} \geq m'$. Pak Z spolu s vrcholy $u \in U$ tž. $K_u = Z$ tvoří podgraf $T_{r+1}(m'(r + 1))$ v G. □

Důsledek 3 (Erdős-Stone)**.** *Pro každé přirozené číslo $r \geq 1$ a $\varepsilon > 0$, každý graf na n vrcholech s alespoň $(1 - 1/r + \varepsilon)\frac{n^2}{2}$ hranami obsahuje $T_{r+1}(\Omega(\log n))$ jako podgraf.*

Důsledek 4. *Pro každé přirozené číslo $r \geq 1$ a $\varepsilon > 0$ existuje c tž.*

$$\operatorname{ex}(n; F) \leq (1 - 1/r + \varepsilon)\frac{n^2}{2}$$

pro každý graf F barevnosti větší než r a každé $n \geq c^{|F|}$.

Předpoklad $n \geq \exp(|F|)$ je nutný.

Lemma 5. *Pro každé $\varepsilon \leq 1/20$ a každé přirozené číslo $m \geq 2$ existuje graf s $n = \left\lfloor \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{m/2} \right\rfloor$ vrcholy a alespoň $\varepsilon \frac{n^2}{2}$ hranami neobsahující $K_{m,m}$ jako podgraf.*

Důkaz. Nechť G je náhodný graf na n vrcholech, v němž každá dvojice tvoří hranu nezávisle s pravděpodobností $p = 2\varepsilon$. Máme

$$\mathbb{E}[\|G\|] = p\binom{n}{2}.$$

Nechť t je počet výskytů $K_{m,m}$ jako podgraf G. Máme

$$\mathbb{E}[t] \leq \binom{n}{m}^2 p^{m^2} \leq n^{2m} p^{m^2} = \left(n^2 p^m\right)^m \leq 1.$$

Nechť G' je graf vzniklý z G odebráním jedné hrany z každého podgrafu $K_{m,m}$. Pak

$$\mathbb{E}[\|G'\|] \geq \mathbb{E}[\|G\| - t] \geq p\binom{n}{2} - 1 = p\frac{n^2}{2} - p\frac{n}{2} - 1 \geq \varepsilon\frac{n^2}{2}.$$

□