Úvod a opakování

Zdeněk Dvořák

9. října 2020

$|G|$ počet vrcholů G, $\|G\|$ počet hran G.

Definice 1. *Maximální možný počet hran libovolného grafu na n vrcholech, který neobsahuje žádný podgraf izomorfní $F_1, \ldots, F_m$:*

$$\mathrm{ex}(n; F_1, \ldots, F_m).$$

Hustotní varianta:

$$\overline{\mathrm{ex}}(n; F_1, \ldots, F_m) = \frac{\mathrm{ex}(n; F_1, \ldots, F_m)}{\binom{n}{2}}.$$

Asymptotické chování:

$$\overline{\mathrm{ex}}(\infty; F_1, \ldots, F_m) = \inf\{\overline{\mathrm{ex}}(n; F_1, \ldots, F_m) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Lemma 2. *Jestliže $n_1 \geq n_2$, pak $\overline{\mathrm{ex}}(n_1; F_1, \ldots, F_m) \leq \overline{\mathrm{ex}}(n_2; F_1, \ldots, F_m)$.*

Důkaz. Nechť G je graf na n_1 vrcholech neobsahující $F_1, \ldots, F_n$ s $\mathrm{ex}(n_1; F_1, \ldots, F_m)$ hranami. Zvolme nejprve náhodně uniformně n_2-prvkovou podmnožinu X jeho vrcholů, a pak libovolnou neuspořádanou dvojici xy prvků X. Zjevně každá dvojice vrcholů G má stejnou pravděpodobnost, že bude zvolena jako xy, a tedy pravděpodobnost, že xy je hrana G, je

$$p = \frac{\|G\|}{\binom{n_1}{2}} = \overline{\mathrm{ex}}(n_1; F_1, \ldots, F_m).$$

Na druhou stranu, $G[X]$ má nejvýše $\mathrm{ex}(n_2; F_1, \ldots, F_m)$ hran, a tedy pravděpodobnost, že xy je hrana $G[X]$, je

$$p_X = \frac{\|G[X]\|}{\binom{n_2}{2}} \leq \frac{\mathrm{ex}(n_2; F_1, \ldots, F_m)}{\binom{n_2}{2}} = \overline{\mathrm{ex}}(n_2; F_1, \ldots, F_m).$$

Dostáváme tedy

$$\overline{\mathrm{ex}}(n_1; F_1, \ldots, F_m) = p \leq \max\left\{p_X : X \in \binom{V(G)}{n_2}\right\} \leq \overline{\mathrm{ex}}(n_2; F_1, \ldots, F_m).$$

$\square$

Důsledek 3.

$$\overline{\mathrm{ex}}(\infty; F_1, \ldots, F_m) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathrm{ex}}(n; F_1, \ldots, F_m),$$

a pro každé n_0 platí

$$\overline{\mathrm{ex}}(\infty; F_1, \ldots, F_m) \leq \overline{\mathrm{ex}}(n_0; F_1, \ldots, F_m).$$

Asymptoticky pro n jdoucí do nekonečna

$$\mathrm{ex}(n; F_1, \ldots, F_m) = (\overline{\mathrm{ex}}(\infty; F_1, \ldots, F_m) + o(1))\frac{n^2}{2}.$$

Příklad 4. *Max. počet hran grafu na 5 vrcholech bez C_3 a C_4 je 5, tj. $\overline{\mathrm{ex}}(5; C_3, C_4) = 1/2$. Proto $\mathrm{ex}(n; C_3, C_4) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ pro každé $n \geq 5$ a $\overline{\mathrm{ex}}(\infty; C_3, C_4) \leq 1/2$.*

Poznámka: Ve skutečnosti $\overline{\mathrm{ex}}(\infty; C_3, C_4) = 0$ a $\mathrm{ex}(n; C_3, C_4) = \Theta(n^{3/2})$, jak uvidíme níže.

Lemma 5. *Je-li T les na $k \geq 3$ vrcholech, pak $\mathrm{ex}(n; T) < (k-2)n$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje graf G s $n \geq 1$ vrcholy a alespoň $(k-2)n$ hranami neobsahující T, a zvolme takový s nejmenším možným počtem vrcholů. Jelikož $\|G\| > 0$, máme $n \geq 2$. Z minimality $|G|$ plyne, že všechny jeho vrcholy mají stupeň alespoň $k-1$ (vrcholy menšího stupně jde smazat bez porušení předpokladů). Jestliže H je libovolný podgraf G s méně než k vrcholy, pak každý vrchol H má souseda mimo $V(H)$. Proto můžeme nalézt podgraf G izomorfní T postupným přidáváním listů; to je spor. $\square$

Turánův graf $T_r(n)$: r-partitní graf na n vrcholech, v němž se velikosti každých dvou partit liší nejvýše o 1; $t_r(n) = \|T_r(n)\|$.

Pozorování 6.

$$t_r(n) \leq (1 - 1/r)\frac{n^2}{2},$$

rovnost nastává když $r|n$.

$$t_r(n) \geq (1 - 1/r)\frac{n^2}{2} - \frac{r}{8},$$

rovnost nastává pro r sudé a $n \equiv r/2 \pmod r$.

Věta 7 (Turánova věta)**.** *Pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí*

$$\mathrm{ex}(n; K_{r+1}) = t_r(n),$$

a tedy $\overline{\mathrm{ex}}(\infty; K_{r+1}) = 1 - 1/r$. Navíc, jestliže G je n-vrcholový graf klikovosti nejvýše r a $\|G\| = t_r(n)$, pak G je izomorfní $T_r(n)$.

Důkaz 1. Nechť $|G| = n$, $\|G\| = \mathrm{ex}(n; K_{r+1})$, a G má klikovost nejvýše r. Jestliže $v_1, v_2 \in V(G)$ jsou nesousední vrcholy, pak $\deg(v_1) = \deg(v_2)$: kdyby $\deg(v_1) < \deg(v_2)$, pak graf v němž nahradíme v_1 kopií vrcholu v_2 by měl klikovost nejvýše r a víc hran než G. Jestliže $v_1, v_2, v_3 \in V(G)$ a $v_1v_2, v_2v_3 \notin E(G)$, pak také $v_1v_3 \notin E(G)$: dle předchozího pozorování $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3)$, a kdyby $v_1v_3 \in E(G)$, pak graf v němž nahradíme v_1 a v_3 kopiemi vrcholu v_2 by měl klikovost nejvýše r a víc hran než G. Relace $\sim$ na $V(G)$ definovaná tž. $u \sim v$ právě když $uv \notin E(G)$ je tedy ekvivalence. Třídy ekvivalence $\sim$ jsou nezávislé množiny a v G jsou obsaženy všechny hrany mezi těmito třídami, a tedy G je úplný multipartitní graf. Počet partit G je nejvýše r, jelikož G má klikovost nejvýše r. Mezi úplnými multipartitními grafy s nejvýše r partitami je $T_r(n)$ ten s ostře největším počtem hran, a proto G je izomorfní $T_r(n)$. $\square$

Důkaz 2. Indukcí dle počtu vrcholů. Nechť $|G| = n$, $\|G\| = \mathrm{ex}(n; K_{r+1})$, a G má klikovost nejvýše r. Jestliže $n \le r$, pak $G = K_n = T_r(n)$, proto předpokládejme $n \ge r+1$. Graf G obsahuje kliku A velikosti r, jinak bychom mohli přidat hranu a dostat graf klikovosti nejvýše r s více než $\|G\|$ hranami. Každý vrchol $V(G-A)$ má nejvýše $r-1$ sousedů v A, jinak by G obsahoval kliku velikosti $r+1$. Z indukce dostáváme

$$\|G\| \le \|G-A\| + (n-r)(r-1) + \binom{r}{2} \le t_r(n-r) + (n-r)(r-1) + \binom{r}{2} = t_r(n).$$

Když $\|G\| = t_r(n)$, všechny nerovnosti musí platit s rovností, z indukce je tedy $G-A$ izomorfní $T_r(n-r)$ a každý vrchol $G-A$ má $r-1$ sousedů v klice A. Vrcholy v různých partitách $G-A$ musí mít různá okolí v A, jinak by G obsahoval kliku velikosti $r+1$. Proto G je izomorfní $T_r(n)$. $\square$

Věta 8 (Erdős-Stoneova věta)**.** *Každý graf F splňuje*

$$\overline{\mathrm{ex}}(\infty; F) = 1 - \frac{1}{\chi(F) - 1}.$$

Důkaz probereme na dalších přednáškách. Pro $\chi(F) \ge 3$ dává tato věta asymptoticky přesný odhad $\mathrm{ex}(n; F)$:

$$\frac{\mathrm{ex}(n; F)}{\left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1}\right)\frac{n^2}{2}} = 1 + o(1)$$

pro n jdoucí do nekonečna. Pro bipartitní grafy F je situace složitější, Erdős-Stoneova věta nám pouze říká, že $\mathrm{ex}(n; F) = o(n^2)$.

Lemma 9. *Pro každá přirozená čísla $a \leq b$ platí*

$$\mathrm{ex}(n; K_{a,b}) < \frac{\sqrt[a]{a^2+b}}{2} n^{2-1/a}.$$

Důkaz. Nechť G je graf na n vrcholech neobsahující $K_{a,b}$ jako podgraf. Nechť m je počet $(a+1)$-tic $(x, v_1, \ldots, v_a)$ vrcholů G takových, že $xv_1, \ldots, xv_a \in E(G)$. Na jednu stranu, pro každou volbu x máme $\deg^a x$ možností volby a-tice jeho sousedů, a tedy

$$m = \sum_{x \in V(G)} \deg^a x \geq \frac{\left(\sum_{x \in V(G)} \deg x\right)^a}{n^{a-1}} = \frac{(2\|G\|)^a}{n^{a-1}}.$$

Na druhou stranu, pro a-tici navzájem různých vrcholů $(v_1, \ldots, v_a)$ lze x zvolit méně než b způsoby (jinak by G obsahoval $K_{a,b}$), a počet $(a+1)$-tic $(x, v_1, \ldots, v_a)$ kde v_1, ..., v_a nejsou navzájem různá, je menší než $a^2 n^a$ (méně než a^2 způsoby lze vybrat indexy $i \neq j$ tž. $v_i = v_j$ a n^a způsoby lze zvolit x a vrcholy v_k pro $k \neq i$). Tedy

$$m < (a^2 + b)n^a.$$

Kombinací těchto nerovností dostáváme

$$\|G\| < \frac{\sqrt[a]{a^2+b}}{2} n^{2-1/a}.$$

□

Důsledek 10. *Je-li F bipartitní graf s menší partitou velikosti a, pak*

$$\mathrm{ex}(n; F) = O(n^{2-1/a}).$$

Lemma 11. *Pro každé prvočíslo p existuje graf s $2(p^2+p+1)$ vrcholy a $(p^2+p+1)(p+1)$ hranami, který neobsahuje C_4 jako podgraf.*

Důkaz. Jelikož p je prvočíslo, existuje konečná projektivní rovina řádu p, s p^2+p+1 body a p^2+p+1 přímkami. Nechť G je incidenční graf této projektivní roviny, tj. graf jehož vrcholy jsou body a přímky a hrany spojují přímky s v nich obsaženými body. Tento graf má $2(p^2+p+1)$ vrcholů a $(p^2+p+1)(p+1)$ hran. Navíc neobsahuje C_4, jinak by dvě různé přímky musely mít průnik velikosti větší než 1. □

Důsledek 12. *Pro každé $b \geq 2$ platí*

$$\mathrm{ex}(n; K_{2,b}) = \Theta(n^{3/2}).$$

Důkaz. Dle Lemma 9 platí $\mathrm{ex}(n; K_{2,b}) \leq \frac{\sqrt{b+4}}{2} n^{3/2} = O(n^{3/2})$. Nechť $n \geq 16$. Pak existuje prvočíslo p tž. $\sqrt{n}/4 \leq p \leq \sqrt{n}/2$, a $2(p^2 + p + 1) \leq n$. Nechť G je graf zkonstruovaný v Lemma 11 doplněný $n - 2(p^2 + p + 1)$ izolovanými vrcholy. Pak G neobsahuje C_4 (a tedy ani $K_{2,b}$) jako podgraf, má n vrcholů a alespoň $n^{3/2}/64$ hran. Proto $\mathrm{ex}(n; K_{2,b}) \geq n^{3/2}/64 = \Omega(n^{3/2})$. □

Důsledek 13. *Nechť F je bipartitní graf s menší partitou velikosti nejvýše 2 a $n \geq |V(F)|$. Pak*

$$\mathrm{ex}(n; F) = \begin{cases} -\infty & \textit{jestliže } \|F\| = 0 \\ 0 & \textit{jestliže } \|F\| = 1 \\ \Theta(n) & \textit{jestliže } \|F\| \geq 2 \textit{ a } F \textit{ je les} \\ \Theta(n^{3/2}) & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz. Jestliže F nemá žádnou hranu, pak je podgrafem každého grafu s $n \geq |V(F)|$ vrcholy a $\mathrm{ex}(n; F) = -\infty$. Jestliže F má právě jednu hranu, pak je podgrafem každého grafu s $n \geq |V(F)|$ vrcholy a alespoň jednou hranou a $\mathrm{ex}(n; F) = 0$. Jestliže F je les s alespoň dvěma hranami, pak F není zároveň podgrafem $K_{1,n-1}$ a maximálního párování na n vrcholech, a tedy $\mathrm{ex}(n; F) \geq \lfloor n/2 \rfloor$; spolu s Lemma 5 dostáváme $\mathrm{ex}(n; F) = \Theta(n)$. Je-li F bipartitní graf s menší partitou velikosti nejvýše 2 a F není les, pak F obsahuje 4-cyklus, a Důsledek 10 a Lemma 11 implikují $\mathrm{ex}(n; F) = \Theta(n^{3/2})$. □