Eulerovské grafy. Stromy a kostry.

Zdeněk Dvořák

28. listopadu 2018

1 Eulerovské tahy

Tah v grafu G je eulerovský, jestliže obsahuje všechny hrany G. Graf je eulerovský, jestliže je souvislý a všechny jeho stupně jsou sudé. *Poznámka:* v definici eulerovského grafu se občas vynechává podmínka na souvislost.

Věta 1. *Graf bez izolovaných vrcholů má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když je eulerovský.*

Důkaz. Nechť G je graf bez izolovaných vrcholů.

Nejprve předpokládejme, že G má uzavřený eulerovský tah T. Jelikož G nemá izolované vrcholy, T navštíví každý vrchol alespoň jednou. Každé dva vrcholy jsou tedy spojené podtahem T, a proto je G souvislý. Navštíví-li T vrchol v k-krát, pak stupeň v je roven $2k$, všechny vrcholy G tedy mají sudý stupeň. Graf G je tedy eulerovský.

Že platí opačné tvrzení dokážeme indukcí dle počtu hran. Předpokládejme tedy, že G je eulerovský, a že každý eulerovský graf s méně než $|E(G)|$ hranami obsahuje uzavřený eulerovský tah. Jak jsme nahlédli v minulé lekci, zvolíme-li si libovolnou hranu $uv \in E(G)$, pak $G - uv$ je souvislý a existuje v něm tedy cesta P z u do v. Spojení P s hranou uv je kružnice T_0. Nechť G_1, G_2, …, G_m jsou komponenty $G - E(T_0)$ s alespoň dvěma vrcholy. Odebráním T_0 jsme snížili stupeň každého vrcholu v T_0 o dva, všechny vrcholy tedy stále mají sudý stupeň a G_1, …, G_m jsou eulerovské grafy. Z indukčního předpokladu obsahují uzavřené eulerovské tahy T_1, …, T_m. Jelikož G je souvislý, pro $i = 1, \ldots, m$ existuje vrchol $v_i \in V(G_i) \cap V(T_0)$. Připojením tahu T_i k T_0 ve vrcholu v_i pro $i = 1, \ldots, m$ dostáváme uzavřený eulerovský tah v G. $\square$

2 Orientované grafy

Orientovaný graf je dvojice (V, E), kde E je množina uspořádaných dvojic vrcholů z V. Jeho podkladový neorientovaný graf je graf vzniklý nahrazením uspořádaných dvojic v E neuspořádanými. (Orientovaný) sled v orientovaném grafu musí respektovat orientaci hran; je to tedy posloupnost v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, …, e_n, v_n tž. $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$. (Orientovaný) tah, cesta, …se odvozuje od orientovaného sledu stejně jako v neorientovaném případě. Vstupní stupeň $\deg^-(v)$ vrcholu v je počet incidentních hran orientovaných do v, výstupní stupeň $\deg^+(v)$ je počet incidentních hran orientovaných ven z v.

Orientovaný graf je slabě souvislý, pokud je souvislý jeho podkladový neorientovaný graf. Je silně souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy vede orientovaná cesta. Orientovaný graf je eulerovský, je-li slabě souvislý a každý vrchol má vstupní stupeň rovný výstupnímu.

Věta 2. *Orientovaný graf bez izolovaných vrcholů má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, je-li eulerovský.*

Důkaz. Analogicky k neorientovanému případu. Existenci orientované kružnice lze dokázat přímo (jdeme po hranách, dokud nenarazíme na vrchol, kterým jsme již prošli; nemůžeme se zaseknout jinde, jelikož žádný vrchol nemá výstupní stupeň 0). □

Důsledek 3. *Nechť G je orientovaný graf, v němž každý vrchol má vstupní stupeň rovný výstupnímu. Pak G je silně souvislý, právě když G je slabě souvislý.*

Důkaz. Je-li G slabě souvislý, má dle Věty 2 uzavřený eulerovský tah, a tedy mezi každými dvěma vrcholy vede orientovaný tah a G je silně souvislý. Opačná implikace je triviální. □

Příklad 1. *Dálkové ovládání ke dveřím na garáži má 16-místný kód ve dvojkové soustavě; ve chvíli, kdy přijme posloupnost rádiových signálů kódujících odpovídající bity (bez ohledu na to co přijalo předtím), otevře dveře. Signál odpovídající každému bitu musí být vysílán 0,1 s. Za jak dlouho jde vyzkoušet všechny kódy?*

Kdybychom postupně vysílali $2^{16} \times 16$ bitů, zabralo by to přes 29 hodin. Nicméně stačí vyslat posloupnost bitů, v níž se každá 16-bitová vyskytuje jako souvislá podposloupnost.

Uvažme graf, jehož vrcholy jsou 15-bitová čísla, z vrcholu $b_1 \ldots b_{15}$ vede hrana označená 1 do vrcholu $b_2 \ldots b_{15}1$ a hrana označená 0 do vrcholu $b_2 \ldots b_{15}0$; vstupují tedy do něj hrany (označené b_{15}) právě z vrcholů $0b_1 \ldots b_{14}$ a $1b_1 \ldots b_{14}$.

Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je tedy 2*. Navíc graf je silně (a tedy i slabě) souvislý (přidáváním bitů na konec se dokážeme dostat z libovolné posloupnosti na libovolnou jinou). Existuje v něm tedy uzavřený eulerovský tah* T*. Vypíšeme-li kód libovolného vrcholu* v *a poté postupně kódy na hranách podél průchodu tahem* T *z* v*, každý* 16*-bitový kód bude vypsán právě jednou (když z vrcholu označeného jeho prvními* 15 *bity přejdeme přes hranu označenou jeho posledním bitem).*

Výsledná posloupnost má délku $15 + 2^{16}$*, její vyslání nám zabere necelé 2 hodiny.*

3 Stromy

Strom je minimálně souvislý graf, tj. souvislý graf, který se po odebrání libovolné hrany rozpadne na komponenty. Graf G je tedy souvislý, právě když obsahuje jako podgraf strom s množinou vrcholu $V(G)$; takovému stromu se říká kostra.

Pozorování 4. *Graf* T *je strom, právě když je souvislý a neobsahuje kružnici.*

Důkaz. Pokud souvislý graf T obsahuje kružnici K, pak odebrání libovolné hrany K zachovává souvislost. Jestliže T je strom, pak tedy K neobsahuje kružnici.

Naopak, předpokládejme, že T je souvislý a bez kružnic. Pak pro každou hranu e je $T - e$ nesouvislý, jinak by obsahoval cestu mezi konci e a tedy T by obsahoval kružnici. Proto T je strom. □

Graf bez kružnic je les. Každá jeho komponenta je tedy strom.

Pozorování 5. *Souvislý graf s* n *vrcholy má alespoň* $n - 1$ *hran. Graf bez kružnic s* n *vrcholy má nejvýše* $n - 1$ *hran.*

Důkaz. Graf na n vrcholech bez hran má n komponent a přidání hrany zmenší počet komponent nejvýše o 1, souvislý graf tedy musí mít alespoň $n-1$ hran.

Je-li G graf bez kružnic s n vrcholy, obdobně si představme, jak postupně přidáváme hrany $E(G)$. Přidávaná hrana vždy musí být mezi různými komponentami, jinak by vytvořila kružnici (tvořenou přidávanou hranou a cestou mezi jejími konci), přidání každé hrany tedy sníží počet komponent o jedna; výsledný graf má alespoň jednu komponentu, tedy počet přidaných hran je nejvýše $n - 1$. □

Důsledek 6. *Strom* T *má* $|V(T)| - 1$ *hran, jeho průměrný stupeň tedy je* $2 - 2/|V(T)| < 2$*.*

List je vrchol stupně jedna.

Důsledek 7. *Každý strom T s alespoň dvěma vrcholy má list.*

Lemma 8. *Nechť G je graf a v je list v G. Pak G je strom právě když $G - v$ je strom.*

Důkaz. Využijeme ekvivalentní charaktrerizaci z Pozorování 4. Odebrání vrcholu stupně 1 nenaruší souvislost (a nevytvoří kružnici). Přidání vrcholu stupně 1 zachovává souvislost a nevytváří kružnice. □

Věta 9. *Nechť T je graf. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) T je strom.

(b) Mezi každými dvěma vrcholy T vede právě jedna cesta.

(c) T je maximální graf bez kružnic (tj. neobsahuje kružnici, ale pro každou dvojici nesousedních vrcholů u a v graf $G + uv$ obsahuje kružnici).

(d) T neobsahuje kružnici a má $|V(T)| - 1$ hran.

(e) T je souvislý a má $|V(T)| - 1$ hran.

Důkaz. **(a)⇒(b):** Jelikož T je souvislý, mezi každými dvěma vrcholy u a v vede alespoň jedna cesta. Kdyby mezi nimi vedly dvě různé cesty P_1 a P_2, pak existuje hrana xy ležící v právě jedné z nich, třeba v P_1. Pak $(P_1 - xy) \cup P_2$ obsahuje sled v $T - xy$ z x do y, vrcholy x a y tedy leží ve stejné komponentě $T - xy$. Pak ale $T - xy$ je souvislý, ve sporu s předpokladem, že T je minimálně souvislý.

(b)⇒(c): Jelikož mezi každými dvěma vrcholy vede právě jedna cesta, graf nemůže obsahovat kružnici. Přidáním každé hrany vznikne kružnice (tvořená touto hranou a cestou mezi jejími konci).

(c)⇒(d): Jelikož přidání libovolné hrany vytvoří kružnici, T je souvislý. Dle Pozorování 5 má tedy $|V(T)| - 1$ hran.

(d)⇒(e): Kdyby T nebyl souvislý, pak by byl disjunktním sjednocením dvou grafů T_1 a T_2. Jelikož ani jeden z nich neobsahuje kružnici, dle Pozorování 5 máme $|E(T_1)| \le |V(T_1)| - 1$ a $|E(T_2)| \le |V(T_2)| - 1$, a proto $|E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| \le |V(T_1)| + |V(T_2)| - 2 \le |V(T)| - 2$, což je spor.

(e)⇒(a): Kdyby $T - e$ byl souvislý pro nějakou hranu e, pak dle Pozorování 5 by $T - e$ měl alespoň $|V(T)| - 1$ hran, a T by měl alespoň $|V(T)|$ hran, což je spor. □