Sledy, tahy, cesty. Stupně a skóre

Zdeněk Dvořák

28. listopadu 2018

Vrcholy v_1 a v_2 sousedí, jestliže v_1v_2 je hrana. Vrchol v a hrana e jsou incidentní, jestliže $v \in e$.

Posloupnost v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n je sled (z v_0 do v_1, délky n) jestliže $v_0, \ldots, v_n$ jsou vrcholy, $e_1, \ldots, e_n$ jsou hrany, a e_i je incidentní s v_{i-1} a v_i pro $i = 1, \ldots, n$. Sled je uzavřený, jestliže $v_0 = v_n$. Sled je

- tah, jestliže hrany $e_1, \ldots, e_n$ jsou navzájem různé,
- cesta, jestliže vrcholy $v_0, \ldots, v_n$ (a tedy i hrany $e_1, \ldots, e_n$) jsou navzájem různé,
- kružnice, jestliže vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ jsou navzájem různé a $v_0 = v_n$.

Pozorování 1. *Vede-li mezi dvěma vrcholy sled délky n, vede mezi nimi i cesta délky nejvýše n; nejkratší sled mezi dvěma vrcholy je cesta.*

Vzdálenost $d(u, v)$ dvou vrcholů u a v je délka nejkratší cesty mezi nimi (∞ nebo nedefinováno pokud žádná taková cesta neexistuje).

Pozorování 2. *Vzdálenost v grafu je metrika, tj. $d(u, v) = 0$ právě když $u = v$, $d(u, v) = d(v, u)$, a $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ pro všechny vrcholy u, v, w.*

Relace $\sim$ tž. $u \sim v$ právě když v G existuje sled (či cesta) mezi u a v je ekvivalence. Její třídy jsou komponenty souvislosti. Má-li graf jen jednu komponentu, je souvislý.

1 Stupně

Stupeň $\deg(v)$ vrcholu v je počet s ním incidentních hran. Graf je d-regulární, jestliže všechny vrcholy mají stupeň právě d. Izolovaný vrchol je vrchol stupně 0. Minimální stupeň vrcholu v grafu G se značí $\delta(G)$, maximální stupeň $\Delta(G)$.

Příklad 1. *Úplný graf* K_n *je* $(n-1)$*-regulární, libovolná kružnice je 2-regulární. Cesta* P_n *pro* $n \geq 2$ *má dva vrcholy stupně* 1 *a* $n-2$ *vrcholů stupně* 2.

Lemma 3. *Pro každý (konečný) graf* G *platí*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2|E(G)|.$$

Tedy

- *součet stupňů vrcholů je vždy sudý,*
- *každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně,*
- *průměrný stupeň* G *je roven* $2|E(G)|/|V(G)|$.

Důkaz. Sečteme-li stupně, každou hranu započítáme dvakrát (jednou za každý její konec). □

Příklad 2. *Je-li graf* G d*-regulární pro liché* d*, pak* G *má sudý počet vrcholů.*

Libovolný d*-regulární graf s* n *vrcholy má právě* $dn/2$ *hran.*

Je-li G *souvislý a všechny jeho stupně jsou sudé, pak pro každou hranu* e *je graf* $G-e$ *souvislý (jinak by měl komponentu obsahující právě jeden vrchol lichého stupně).*

Skóre grafu je posloupnost stupňů jeho vrcholů uspořádaná dle velikosti.

Příklad 3. *Skóre* P_n *(pro* $n \geq 2$*) je*

$$1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{(n-2)\text{-krát}}.$$

Pozorování 4. *Izomorfní grafy mají stejné skóre, opačné tvrzení neplatí.*