Grafy – definice a pojmy

Zdeněk Dvořák

15. listopadu 2018

Příklad 1.

- *Existuje v počítačové síti kabel, po jehož přerušení spolu nějaké dva počítače nebudou moct komunikovat?*
- *Potřebujeme města propojit elektrickým vedením. Natažení vedení mezi dvěma městy má nějakou cenu (obecně různou pro různé dvojice měst). Jak nejlevněji lze města propojit do souvislé elektrické sítě?*
- *Máme dáno schéma elektrického obvodu. Lze ho realizovat na čipu bez křížení spojů? Případně, jaké je minimální množství křížení?*
- *Máme skupinu lidí a pro každé dva víme, zda se snáší nebo ne. Do kolika nejméně týmů je můžeme rozdělit tak, aby se v rámci jednoho týmu všichni snášeli? Jak velký může být největší takový tým?*
- *Jak najít nejrychlejší cestu z Aše do Mikulova?*
- *Jak má čisticí stroj projet všechny ulice ve městě, aby celková vzdálenost byla co nejmenší?*

Definice 1. *Graf je dvojice (V, E), kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Pro graf G píšeme tyto množiny jako $E(G)$ a $V(G)$. Hranu $\{v_1, v_2\}$ typicky zapisujeme v_1v_2.*

Příklad 2.

Úplný graf K_n je graf s $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $E(K_n) = \{v_iv_j : 1 \le i < j \le n\}$.

Cesta P_n je graf s $V(P_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $E(P_n) = \{v_iv_{i+1} : 1 \le i \le n-1\}$.

Kružnice (cyklus) C_n je graf s $V(C_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $E(C_n) = \{v_iv_{i+1} : 1 \le i \le n-1\} \cup \{v_1v_n\}$.

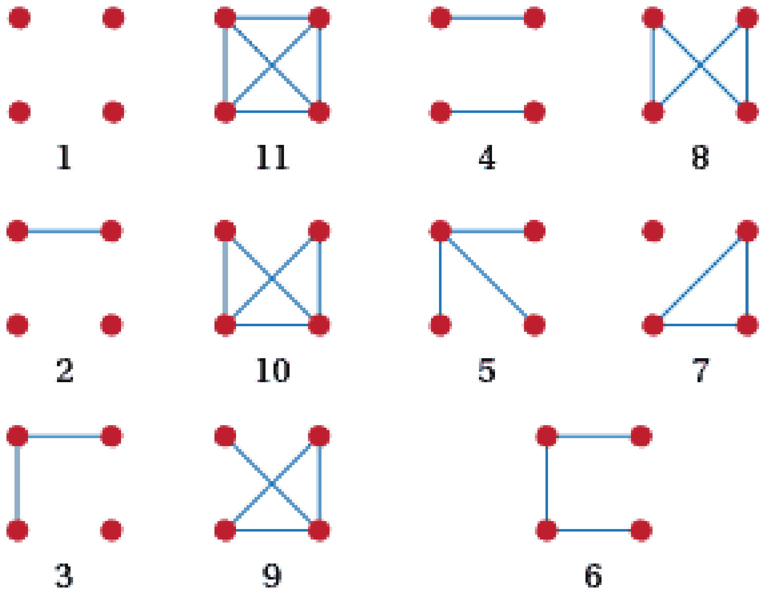
Varianty: Smyčky, násobné hrany, orientované grafy, váhy vrcholů, délky hran, ...

1 Izomorfismus a podgrafy

Dva grafy G_1 a G_2 jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce $f : V(G_1) \to V(G_2)$ tž. $uv \in E(G_1) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(G_2)$; taková bijekce se nazývá izomorfismus. Tj. G_1 a G_2 se liší pouze přejmenováním vrcholů. Píšeme $G_1 \simeq G_2$.

Pozorování 1. *Relace izomorfismu je ekvivalence.*

Příklad 3. *Existuje právě 11 (tříd) navzájem neizomorfních grafů na 4 vrcholech.*



Lemma 2. *Počet různých grafů s vrcholy* $\{1, \dots, n\}$ *je*

$$2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n}.$$

Počet navzájem neizomorfních grafů s vrcholy $\{1, \dots, n\}$ *je alespoň*

$$2^{\binom{n}{2}}/n! \geq 2^{\binom{n}{2}}/n^n = 2^{\frac{1}{2}n^2 - n\log_2 n - \frac{1}{2}n}.$$

Důkaz. Pro každou dvojici se můžeme nezávisle rozhodnout, zda bude hrana nebo ne, graf s vrcholy $\{1, \dots, n\}$ lze tedy zvolit $2^{\binom{n}{2}}$ způsoby. Existuje pouze $n!$ bijekcí množiny $\{1, \dots, n\}$, každý graf je tedy izomorfní nejvýše $n!$ z těchto grafů, a počet navzájem neizomorfních grafů je alespoň $2^{\binom{n}{2}}/n!$. $\square$

Graf H je podgraf grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Graf H je indukovaný podgraf grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Doplněk $\overline{G}$ grafu G je graf s $V(\overline{G}) = V(G)$ a $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$.

Příklad 4. *Kružnice* C_n *obsahuje podgraf (ale ne indukovaný podgraf) izomorfní cestě* P_n*. Kružnice* C_n *obsahuje* n *podgrafů izomorfních cestě* P_{n-1}*. Úplný graf* K_n *obsahuje* $3\binom{n}{4}$ *podgrafů izomorfních* 4*-cyklu* C_4*. Doplněk* C_5 *je izomorfní* C_5*.*