Základy teorie pravděpodobnosti

Zdeněk Dvořák

14. listopadu 2018

1 Nezávislost

Jevy A a B jsou nezávislé, jestliže $P[A|B] = P[A]$ – tj. to že platí B nám nic neříká o A. Ekvivalentně, $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$.

Typický příklad: opakování pokusu/výběru za identických podmínek.

Příklad 1. *Hodíme dvěma kostkami, A = „na první kostce padla 6-ka“, B = „na druhé kostce padla 6-ka“. $A = \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$, $B = \{(1,6),(2,6),\ldots,(6,6)\}$, $A \cap B = \{(6,6)\}$, $P[A] = 6/36 = 1/6$, $P[A|B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]} = \frac{1/36}{6/36} = 1/6$.*

Obecně: Součin konečných pravděpodobnostních prostorů $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ je konečný pravděpodpobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ a $P : \mathcal{F} \to \langle 0, 1\rangle$ splňuje $P[(x_1, x_2)] = P_1[x_1] \cdot P_2[x_2]$ pro každé $x_1 \in \Omega_1$ a $x_2 \in \Omega_2$. Z toho plyne pro $A \in \mathcal{F}_1$ a $B \in \mathcal{F}_2$:

$$\begin{aligned} P[A \times B] &= \sum_{x_1 \in A, x_2 \in B} P[(x_1, x_2)] = \sum_{x_1 \in A, x_2 \in B} P_1[x_1] \cdot P_2[x_2] \\ &= \sum_{x_1 \in A} P_1[x_1] \cdot \sum_{x_2 \in B} P_2[x_2] = P_1[A] \cdot P_2[B]. \end{aligned}$$

V prostoru $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ jsou tedy jevy „v prvním prostoru nastalo A“ (tedy jev $A \times \Omega_2$) a „ve druhém prostoru nastalo B“ (tedy jev $\Omega_1 \times B$) nezávislé:

$$P[A \times \Omega_2] \cdot P[\Omega_1 \times B] = P_1[A] \cdot P_2[B] = P[A \times B] = P[(A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B)].$$

Ale jsou i další možnosti:

Příklad 2. *Hodíme dvěma kostkami, A = „součet je 7“, B = „na první kostce je liché číslo“. $A = \{(1,6),(2,5),\ldots,(6,1)\}$, $A \cap B = \{(1,6),(3,4),(5,2)\}$, $P[A] = 6/36 = 1/6$, $P[B] = 1/2$, $P[A|B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]} = \frac{3/36}{1/2} = 1/6$.*

Pozorování 1. *Jsou-li jevy A a B nezávislé, pak*

- $P[B|A] = P[B]$
- *jevy* $\overline{A}$ *a* B *jsou nezávislé*
- *jevy* $\overline{A}$ *a* $\overline{B}$ *jsou nezávislé.*

Jevy $A_1, \ldots, A_k$ jsou po dvou nezávislé, jestliže každé dva jsou nezávislé. Jevy $A_1, \ldots, A_k$ jsou nezávislé, jestliže

$$P[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{j \in I} P[A_i]$$

pro každou podmnožinu $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$.

Příklad 3. *Hodíme dvěma kostkami, A = „součet je 7“, B = „na první kostce je liché číslo“, C = „na druhé kostce je liché číslo“. Jevy A, B a C jsou po dvou nezávislé (viz minulý příklad; nezávislost jevů B a C je triviální), ale $P[A \cap B \cap C] = 0$. Jevy tedy nejsou nezávislé.*

2 Náhodné veličiny

Náhodná veličina v prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Příklad 4.

Součet čísel padlých na dvou kostkách: $X((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$.
Počet vlasů náhodného občana ČR: $X(\text{člověk}) = \text{počet jeho vlasů}$.
Indikátor jevu A:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x \in A \\ 0 & \text{jestliže } x \notin A \end{cases}$$

Rozdělení náhodné veličiny X je funkce z $\mathbb{R}$ do $\langle 0, 1 \rangle$ přiřazující každému $v \in R$ hodnotu

$$P[X = v] = P[\{z \in \Omega : X(z) = v\}].$$

Distribuční funkce náhodné veličiny X je funkce z $\mathbb{R}$ do $\langle 0, 1 \rangle$ přiřazující každému $v \in R$ hodnotu

$$P[X \leq v] = P[\{z \in \Omega : X(z) \leq v\}].$$

Poznámka: pro nekonečné pravděpodobnostní prostory je složitější zadefinovat rozdělení ($P[X = v]$ může být 0 pro každou hodnotu v), ale distribuční funkce funguje beze změny.

Pozorování 2. _

$\lim_{v\to-\infty} P[X \le v] = 0$, $\lim_{v\to\infty} P[X \le v] = 1$

Jestliže $v_1 \le v_2$, *pak* $P[X \le v_1] \le P[X \le v_2]$ *a* $P[v_1 < x \le v_2] = P[X \le v_2] - P[X \le v_1]$.

Příklad 5. *Hod falešnou mincí s pravděpodobností rubu* p, *indikátor* I_{rub} *má rozělení*

$$P[I_{rub} = 1] = p, P[I_{rub} = 0] = 1 - p$$

(alternativní rozdělení).

Číslo C *padlé na spravedlivé* n*-stěnné kostce má rozdělení*

$$P[C = i] = 1/n$$

(rovnoměrné rozdělení).

Hodíme n*-krát falešnou mincí s pravděpodobností rubu* p, *počet* R *padlých rubů má rozdělení*

$$P[R = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(binomické rozdělení $Bi(n,p)$*).*

Jezdíte MHD, občas vás náhodně zkontroluje revizor; pro zjednodušení předpokládejme, že v každém okamžiku se stejnou pravděpodobností a nezávisle na předchozích kontrolách. Náhodná proměnná K *= počet kontrol v jednom měsíci má rozdělení*

$$P[K = k] = \frac{\lambda^k}{e^\lambda \cdot k!},$$

kde λ *je průměrný počet kontrol revizorem za měsíc (Poissonovo rozdělení).*

3 Střední hodnota

Střední hodnota veličiny X na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{z\in\Omega} P[z] \cdot X(z).$$

Stačí znát rozdělení X:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{v} P[X = v] \cdot v,$$

kde součet je přes všechny možné hodnoty veličiny X.

Příklad 6. *Střední hodnota čísla C padlého na n-stěnné kostce:*

$$E[C] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Střední hodnota počtu rubů R v n hodech spravedlivou mincí:

$$E[R] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \frac{1}{2^n} \cdot n 2^{n-1} = \frac{n}{2}.$$

Pro indikátor jevu A platí $E[I_A] = P(A)$.

Lemma 3 (Linearita střední hodnoty)**.** *Pro veličiny X a Y a reálné číslo r platí*

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

a

$$E[rX] = r \cdot E[X].$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X+Y] &= \sum_{z \in \Omega} P[z] \cdot (X(z) + Y(z)) \\ &= \sum_{z \in \Omega} P[z] \cdot X(z) + \sum_{z \in \Omega} P[z] \cdot Y(z) = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[rX] &= \sum_{z \in \Omega} P[z] \cdot rX(z) \\ &= r \cdot \sum_{z \in \Omega} P[z] \cdot X(z) = r \cdot \mathrm{E}[X]. \end{aligned}$$

□

Příklad 7. *Počet rubů R v n hodech spravedlivou mincí. Jako A_i pro $i = 1, \ldots, n$ označme jev "v i-tém hodu padl rub"; pak $R = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$ a $E[I_{A_i}] = P(A_i) = 1/2$, proto $E[R] = n/2$.*

V krabici máme čísla 1, 5, 10, 20*. Tři z nich náhodně vytáhneme; jaká je střední hodnota součtu prvního a třetího vytaženého čísla? Pro každé $k \in \{1,2,3\}$ má každé číslo má pravděpodobnost $1/4$, že bude vytaženo jako k-té; střední hodnota k-tého vytaženého čísla tedy je $(1+5+10+20)/4 = 9$. Z linearity střední hodnoty je tedy střední hodnota součtu prvního a třetího vytaženého čísla rovna* 18*.*

Pozor! Střední hodnota nemusí nutně moc vypovídat o "nejpravděpodobnějším" případu.

Příklad 8. *Nechť M je hodnota majetku náhodné rodiny v USA v dolarech. Pak (čísla z roku 2017)*

$$E[M] \approx 760\,000,$$

ale

$$P[M \leq 760\,000] \approx 83\%$$

a

$$P[M < 97\,300] \approx 50\%.$$